

Comportamento dos Zeros de Polinômios Sujeitos a uma Perturbação do Coeficiente Dominante

V.A. BOTTA P.¹, M. MENEGUETTE Jr.², Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP, 19060-900, Presidente Prudente, SP, Brasil.

Resumo. Em algumas áreas da Matemática, como na Análise Numérica, por exemplo, é de fundamental importância o comportamento dos zeros dos polinômios algébricos na análise de algumas questões. Considerando uma classe de polinômios cujos coeficientes satisfazem algumas condições, estudaremos o comportamento dos zeros desses polinômios na tentativa de encontrar um contra-exemplo para uma conjectura apresentada por Meneguette [5].

Palavras-chave. Zeros de polinômios, Disco unitário, Perturbação do coeficiente dominante.

1. Introdução

O comportamento dos zeros dos polinômios algébricos é uma subárea clássica da Análise que possui muitas questões a serem pesquisadas. Como exemplo, temos a seguinte conjectura, que é um problema que encontra-se em aberto em Meneguette [5]:

Conjectura 1.1. *Sejam $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio tal que*

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \text{ e } a_n < a_{n-1},$$

cujos zeros encontram-se no disco unitário, e $P'(z)$ com os coeficientes ordenados, isto é,

$$0 < a_1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq (n-1)a_{n-1} \leq na_n.$$

Então, os zeros do polinômio

$$P_\gamma(z) = (a_n + \gamma)z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

encontram-se no disco unitário, para todo $\gamma > 0$.

¹botta@fct.unesp.br

²messias@fct.unesp.br

Até o presente momento, o autor dessa conjectura não obteve respostas a respeito de sua validade ou não no caso geral. Botta, Meneguetto e Cuminato [2] provaram sua validade no caso em que o polinômio $P(z)$ é um polinômio reflexivo, ou seja,

$$a_i = a_{n-i}, \quad a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Além disso, Botta [3] mostrou sua validade quando os coeficientes do polinômio $P(z)$ apresentado na conjectura satisfazem as seguintes condições:

$$0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} > a_n$$

e

$$pa_i < (p-1)a_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad \text{e} \quad pa_n > (p-1)a_{n-1},$$

onde p é um número inteiro positivo, $p > 1$.

Na tentativa de buscar um contra-exemplo para a Conjectura 1.1, analisaremos, nesse trabalho, uma classe de polinômios $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ cujos coeficientes, para $n = km - 1$ e $k, m \in \mathbb{N}$, satisfazem

$$\begin{aligned} 0 < a_0 = \dots = a_{m-1} &< a_m = \dots = a_{2m-1} < a_{2m} = \dots = a_{3m-1} < \dots \\ &< a_{(k-1)m} = \dots = a_{km-1} = a_n, \end{aligned} \quad (1.1)$$

ou seja, os coeficientes de $P(z)$ são iguais para cada grupo de m elementos consecutivos.

Como $P(z)$ tem os coeficientes ordenados, pelo Teorema de Eneström-Keakeya, que será apresentado a seguir, temos que os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$. Além disso, pelo menos um zero de $P(z)$ tem módulo um. Portanto, qualquer perturbação no coeficiente dominante de $P(z)$ acarretará uma perturbação nos zeros de $P(z)$, podendo estes entrarem ou saírem do disco unitário quando o parâmetro γ cresce. Experimentos computacionais revelam uma tendência dos zeros saírem do disco unitário. Então, uma questão que surge é a seguinte: sendo $P_\lambda(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i + (a_n - \lambda)z^n$, será possível os zeros de $P_\lambda(z)$ voltarem a entrar no disco unitário dependendo de λ ? Se isso ocorrer, teríamos um contra-exemplo para a Conjectura 1.1, pois assim existiria $\gamma > 0$ tal que os zeros de $P_\gamma(z)$ definido na Conjectura 1.1 poderiam sair do disco unitário, contradizendo a tese da Conjectura 1.1. Portanto, para responder a essa questão, apresentaremos, no decorrer desse trabalho, uma análise do comportamento dos zeros de $P_\lambda(z)$.

2. Resultados Clássicos

O primeiro resultado a ser apresentado é o Teorema de Eneström-Keakeya, que determina a quantidade de zeros de um polinômio no disco unitário.

Teorema 2.1 (Eneström-Kakeya). *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio cujos coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, satisfazem $0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$. Então, $P(z)$ possui seus zeros em $|z| \leq 1$.*

Um resultado mais amplo e equivalente ao Teorema de Eneström-Kakeya, que pode ser encontrado em Anderson, Saff e Varga [1], é o seguinte:

Teorema 2.2. *O polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, tem todos os seus zeros na região $\alpha \leq |z| \leq \beta$, onde $\alpha = \min_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{a_i}{a_{i+1}} \right\}$ e $\beta = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{a_i}{a_{i+1}} \right\}$.*

Consideremos

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \{j = 1, \dots, n+1 : \beta a_{n+1-j} - a_{n-j} > 0\}, \text{ onde } a_{-1} := 0, \\ \underline{S} &= \{j = 1, \dots, n+1 : a_{j-1} - \alpha a_j > 0\}, \text{ onde } a_{n+1} := 0, \\ \bar{k} &= \text{mdc}\{j : j \in \bar{S}\} \text{ e } \underline{k} = \text{mdc}\{j : j \in \underline{S}\}, \end{aligned}$$

onde *mdc* é o máximo divisor comum.

Teorema 2.3. *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Todos os zeros de $P(z)$ encontram-se na região $\alpha \leq |z| \leq \beta$. Além disso, $P(z)$ pode se anular em $|z| = \beta$ se, e somente se, $\bar{k} > 1$. Se $\bar{k} > 1$, os zeros de $P(z)$ em $|z| = \beta$ são simples e dados por*

$$\left\{ \beta e^{2\pi i j / \bar{k}}, j = 1, \dots, \bar{k} - 1 \right\}.$$

Da mesma forma, $P(z)$ pode se anular em $|z| = \alpha$ se, e somente se, $\underline{k} > 1$. Se $\underline{k} > 1$, os zeros de $P(z)$ em $|z| = \alpha$ são simples e dados por

$$\left\{ \alpha e^{2\pi i j / \underline{k}}, j = 1, \dots, \underline{k} - 1 \right\}.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Anderson, Saff e Varga [1].

O resultado a seguir mostra que se um polinômio $P(z)$ tem coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, satisfazendo (1.1), então $P(z)$ tem $m - 1$ zeros simples de módulo um.

Teorema 2.4. *O polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ tal que seus coeficientes satisfazem (1.1) possui $m - 1$ zeros simples de módulo um.*

Demonstração. Como $P(z)$ satisfaz (1.1), podemos escrevê-lo da forma

$$P(z) = (1 + z + \dots + z^{m-1})(a_0 + a_m z^m + \dots + a_{(k-1)m} z^{(k-1)m}) = Q(z)R(z).$$

Para o polinômio $Q(z)$, temos que $\alpha = \beta = 1$. Logo, pelo teorema anterior, todos os seus $m - 1$ zeros estão em $|z| = 1$ e, além disso, como $\bar{k} = m$, são simples. \square

Utilizaremos também uma das fórmulas de Vieta, dada por

$$z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad (2.1)$$

onde z_1, z_2, \dots, z_n são os zeros do polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$.

Suponhamos que o polinômio $P(z)$ tenha p ($p \leq n$) zeros em $|z| \leq 1$.

Associado a ele será considerado o polinômio

$$P^*(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = a_0 \prod_{j=1}^n (z - z_j^*),$$

sendo seus zeros z_k^* , em relação ao disco unitário, os inversos dos zeros z_k de $P(z)$, isto é, $z_k^* = \frac{1}{z_k}$.

Logo, qualquer zero de $P(z)$ que possui módulo um é também zero de $P^*(z)$ e se $P(z)$ não tem zeros em $|z| = 1$, $P^*(z)$ também não tem zeros em $|z| = 1$.

Além disso, se $P(z)$ não tem zeros em $|z| = 1$ e p zeros em $|z| < 1$, então $P^*(z)$ possui $n - p$ zeros em $|z| < 1$.

Seja, agora, a sequência de polinômios

$$P_j(z) = \sum_{k=0}^{n-j} a_k^{(j)} z^k,$$

onde $P_0(z) = P(z)$ e

$$P_{j+1}(z) = a_0^{(j)} P_j(z) - a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Então,

$$a_k^{(j+1)} = a_0^{(j)} a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)} a_{n-j-k}^{(j)}. \quad (2.2)$$

Se em cada polinômio $P_j(z)$ o termo constante $a_0^{(j)}$ é representado por δ_j , então

$$\delta_{j+1} = |a_0^{(j)}|^2 - |a_{n-j}^{(j)}|^2 = a_0^{(j+1)}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Lema 2.1. *Considerando $a_0 \neq 0$, se P_j tem p_j zeros em $|z| \leq 1$ e se $\delta_{j+1} \neq 0$, então P_{j+1} tem*

$$p_{j+1} = \frac{1}{2} \{n - j - [(n - j) - 2p_j] \text{ sinal}(\delta_{j+1})\}$$

zeros em $|z| \leq 1$. Além disso, P_{j+1} tem os mesmos zeros em $|z| = 1$ que P_j .

A demonstração deste lema pode ser encontrada em Marden [4].

Teorema 2.5. *Se $|a_0| < |a_n|$, $a_0 \neq 0$, $P(z)$ tem todos os seus zeros no disco unitário se, e somente se, $P_1^*(z)$ tem também todos os seus zeros em $|z| \leq 1$.*

A demonstração deste resultado segue do Lema 2.1 e mais detalhes podem ser encontrados em Schur [6], [7].

3. Análise dos Resultados

Sejam

$$P_\lambda(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + (a_n - \lambda)z^n, \quad \lambda > 0$$

e

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$$

cujos coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, satisfazem (1.1).

Vamos considerar $\lambda \leq a_n - a_0$, pois se $\lambda > a_n - a_0$ pela fórmula (2.1) já segue que $P_\lambda(z)$ possui pelo menos um zero fora do disco unitário.

Seja, primeiramente, o caso em que $a_0 = a_1 = \dots = a_n$. Então, para $\lambda > 0$ e tal que $a_n - \lambda > 0$, temos que pelo menos um zero de $P_\lambda(z)$ encontra-se fora do disco unitário, pois

$$a_0 = a_n \Rightarrow a_0 > a_n - \lambda \Rightarrow |a_0| > |a_n - \lambda|$$

e, pela expressão (2.1),

$$|z_1||z_2|\dots|z_n| = \frac{|a_0|}{|a_n - \lambda|} > 1,$$

onde z_1, z_2, \dots, z_n são os zeros de $P_\lambda(z)$, indicando que pelo menos um zero de $P_\lambda(z)$ encontra-se fora do disco unitário. Portanto, se $a_0 = a_1 = \dots = a_n$, não foi possível encontrar um contra-exemplo para a conjectura.

Analisaremos agora os seguintes casos:

1. m é par e n é ímpar:

Observe que

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} - a_n = 0,$$

ou seja, $z = -1$ é um zero de $P(z)$.

Além disso,

$$P_\lambda(-1) = P(-1) + \lambda = \lambda > 0.$$

Como, para $z \in \mathbb{R}^-$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} P_\lambda(z) < 0$ e $P_\lambda(-1) > 0$, então existe pelo menos um zero real de $P_\lambda(z)$ em $(-\infty, -1)$, ou seja, pelo menos um zero encontra-se fora do disco unitário. Portanto, com essas condições sobre os coeficientes, não existe um contra-exemplo para a Conjectura 1.1.

2. m e n são pares:

Este caso é impossível de ocorrer, pois como n é par, o polinômio $P_\lambda(z)$ tem um número ímpar de coeficientes, sendo impossível agrupá-los em conjuntos com m coeficientes, pois m é par.

3. Analisaremos ao mesmo tempo os casos em que m é ímpar e n é par e m e n são ímpares:

Considerando a expressão (2.2) para o polinômio $P_\lambda(z)$, temos que

$$\begin{aligned} a_{0,\lambda}^{(1)} &= a_0^2 - (a_n - \lambda)^2 < 0 \\ a_{n-1,\lambda}^{(1)} &= a_0 a_{n-1} - a_1 (a_n - \lambda) = \lambda a_1 > 0. \end{aligned}$$

Então,

$$|a_{0,\lambda}^{(1)}| - |a_{n-1,\lambda}^{(1)}| = \lambda^2 - (a_1 + 2a_n)\lambda + a_n^2 - a_0^2. \quad (3.1)$$

Resolvendo a equação $\lambda^2 - (a_1 + 2a_n)\lambda + a_n^2 - a_0^2 = 0$, segue que

$$\lambda = \frac{a_1 + 2a_n \pm \sqrt{a_0(4a_n + 5a_0)}}{2}.$$

Consideremos $\lambda_1 = \frac{a_0 + 2a_n - \sqrt{a_0(4a_n + 5a_0)}}{2} > 0$ (observe que $a_0 + 2a_n > \sqrt{a_0(4a_n + 5a_0)}$) e $\lambda_2 = \frac{a_0 + 2a_n + \sqrt{a_0(4a_n + 5a_0)}}{2} > 0$ os zeros reais de (3.1).

Para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, segue que $|a_{0,\lambda}^{(1)}| - |a_{n-1,\lambda}^{(1)}| < 0$, ou seja, $|a_{0,\lambda}^{(1)}| < |a_{n-1,\lambda}^{(1)}|$, o que implica que o polinômio $P_{1,\gamma}^*(z)$ tem zeros fora do disco unitário, pois considerando w_1, w_2, \dots, w_{n-1} os zeros de $P_{1,\gamma}^*(z) = a_{0,\gamma}^{(1)} z^{n-1} + \dots + a_{n-1,\gamma}^{(1)}$, temos, de (2.1),

$$|w_1| |w_2| \dots |w_{n-1}| = \frac{|a_{n-1,\gamma}^{(1)}|}{|a_{0,\gamma}^{(1)}|} > 1.$$

Logo, pelo Teorema 2.5, $P_\lambda(z)$ tem zeros fora do disco unitário.

Mas $\lambda_2 > a_n - a_0$. Portanto, é conveniente considerarmos o intervalo $\lambda_1 < \lambda < a_n - a_0$. Logo, para $\lambda_1 < \lambda < a_n - a_0$, $P_\lambda(z)$ tem zeros fora do disco unitário.

Analiticamente, para $0 < \lambda \leq \lambda_1$, onde $|a_{0,\lambda}^{(1)}| - |a_{n-1,\lambda}^{(1)}| \geq 0$, os cálculos mostraram-se complicados, sendo necessário um estudo mais complexo e detalhado do assunto, que não será abordado nesse trabalho. Mas, através de simulações numéricas, é possível verificar que os zeros de $P_\lambda(z)$, para $0 < \lambda \leq \lambda_1$, encontram-se fora do disco unitário, como podemos observar nos Exemplos 4.4 e 4.5 da próxima seção.

4. Exemplos

Nessa seção apresentaremos alguns exemplos de polinômios cujos coeficientes satisfazem as condições apresentadas na seção anterior. Nas figuras seguintes mostraremos o comportamento dos zeros do polinômio $P_\lambda(z)$ (representados pelos pontos) para λ real, $\lambda > 0$. Os zeros de $P(z)$ estão representados pelos pontos maiores e mais escuros. À medida que λ aumenta, os pontos nas figuras que representam os zeros de $P_\lambda(z)$ vão diminuindo e tornando-se mais claros.

Conjectura 4.1. *Seja*

$$P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| = 1$.

Nesse caso, o polinômio

$$P_\lambda(z) = (1 - \lambda)z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

possui zeros fora do disco unitário, como podemos observar na Figura 1.

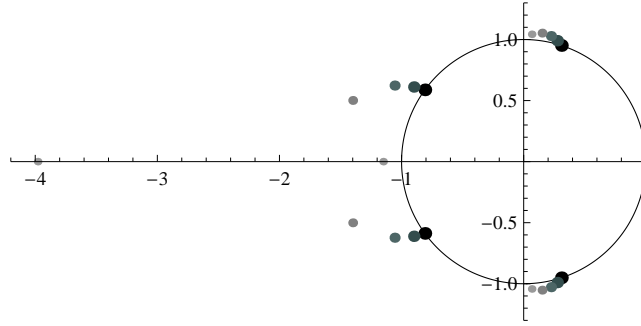


Figura 1: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (1 - \lambda)z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 .

Conjectura 4.2. *Consideremos*

$$P(z) = 3z^3 + 3z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$.

Observe que

$$P_\lambda(z) = (3 - \lambda)z^3 + 3z^2 + z + 1.$$

O polinômio $P_\lambda(z)$ possui zeros fora do disco (zero real negativo), como podemos ver na Figura 2. Além disso, conforme análise do item 1 da seção anterior (caso em que m é par e n é ímpar), temos a garantia de que $P_\lambda(z)$ possui zeros fora do disco unitário.

Conjectura 4.3. *Seja*

$$P(z) = 2z^7 + 2z^6 + 2z^5 + 2z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$.

O polinômio

$$P_\lambda(z) = (2 - \lambda)z^7 + 2z^6 + 2z^5 + 2z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

possui zeros fora do disco unitário (zero real negativo), conforme podemos ver na Figura 3 e cujo resultado está garantido pela análise feita na seção anterior para o caso em que m é par e n é ímpar.

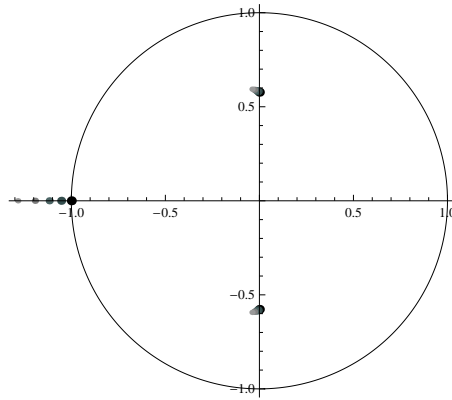


Figura 2: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (3 - \lambda)z^3 + 3z^2 + z + 1$, $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 .

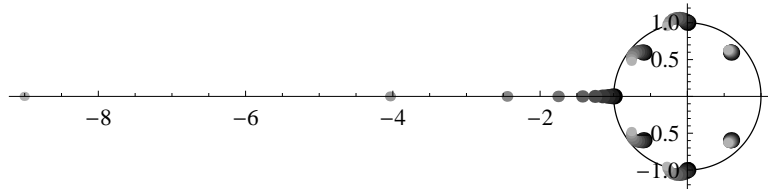


Figura 3: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (2 - \lambda)z^7 + 2z^6 + 2z^5 + 2z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.6, \dots, 1.8$.

Conjectura 4.4. *O polinômio*

$$P(z) = 7z^8 + 7z^7 + 7z^6 + 4z^5 + 4z^4 + 4z^3 + z^2 + z + 1,$$

possui seus zeros em $|z| \leq 1$.

O polinômio

$$P_\lambda(z) = (7 - \lambda)z^8 + 7z^7 + 7z^6 + 4z^5 + 4z^4 + 4z^3 + z^2 + z + 1$$

possui zeros fora do disco, como podemos observar na Figura 4.

Pelo resultado encontrado na seção anterior (caso em que m é ímpar e n é par), temos a garantia de que os zeros de $P_\lambda(z)$ encontram-se fora do disco unitário para $4.6 < \lambda < 6$ (para $\lambda > 6$, o resultado está garantido pela fórmula de Vieta). Para $0 < \lambda \leq 4.6$, através da Figura 4 podemos observar que $P_\lambda(z)$ possui zeros fora do disco unitário, mas a análise algébrica desse caso será objeto de estudos futuros.

Conjectura 4.5. *Seja*

$$P(z) = 10z^{11} + 10z^{10} + 10z^9 + 6z^8 + 6z^7 + 6z^6 + 3z^5 + 3z^4 + 3z^3 + z^2 + z + 1,$$

cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$.

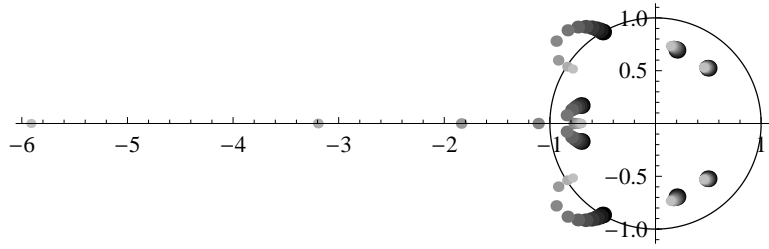


Figura 4: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (7 - \lambda)z^8 + 7z^7 + 7z^6 + 4z^5 + 4z^4 + 4z^3 + z^2 + z + 1$, $\lambda = 0, 0.6, 1.2, 1.8, \dots, 6$.

O polinômio

$$P_\lambda(z) = (10 - \lambda)z^{11} + 10z^{10} + 10z^9 + 6z^8 + 6z^7 + 6z^6 + 3z^5 + 3z^4 + 3z^3 + z^2 + z + 1$$

possui zeros fora do disco, como podemos observar na Figura 5. Nesse caso, m e n são ímpares. Então, temos a garantia de que os zeros de $P_\lambda(z)$ encontram-se fora do disco unitário para $\lambda_1 = 7.1 < \lambda < 9$ (para $\lambda > 9$, o resultado está garantido pela fórmula de Vieta). A análise algébrica para o caso em que $0 < \lambda \leq 7.1$ será estudada futuramente.

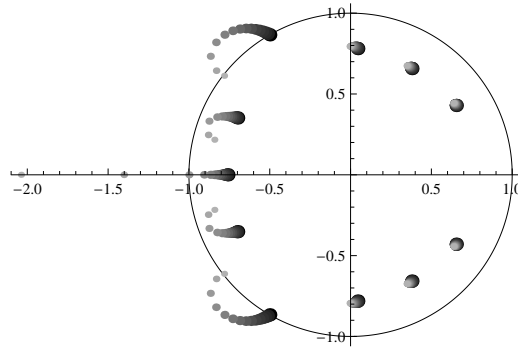


Figura 5: Comportamento dos zeros de $P_\lambda(z) = (10 - \lambda)z^{11} + 10z^{10} + 10z^9 + 6z^8 + 6z^7 + 6z^6 + 3z^5 + 3z^4 + 3z^3 + z^2 + z + 1$, $\lambda = 0, 0.5, 1.0, 1.5, \dots, 7$.

5. Conclusão

Analisamos, nesse trabalho, o comportamento dos zeros do polinômio $P_\lambda(z)$ cujos coeficientes satisfazem as condições apresentadas na Seção 3. No caso em que $a_0 = a_1 = \dots = a_n$, pelo menos um zero de $P_\lambda(z)$ encontra-se fora do disco unitário. Quando m é par e n é ímpar, foi possível mostrar que sempre existirá um zero real negativo cujo módulo é maior que um. Não existirá o caso em que m e n são pares. O caso em que m e n são ímpares e m é ímpar e n é par foi verificado

para $\lambda_1 = \frac{a_0 + 2a_n - \sqrt{a_0(4a_n + 5a_0)}}{2} < \lambda < a_n - a_0$. Portanto, não foi possível encontrar um contra-exemplo para a Conjectura 1.1 nos casos citados, sendo cada vez mais fortes as evidências de que ela é verdadeira.

Abstract. In some areas of Mathematics, for example in Numerical Analysis, the behavior of perturbed polynomial zeros is relevant to answer some questions. Considering a class of polynomials under certain coefficients conditions, we study the perturbed zeros behavior in an attempt to find a counter-example to a conjecture by Meneguette [5].

Referências

- [1] N. Anderson, E.B. Saff, R.S. Varga, On the Eneström-Kakeya theorem and its sharpness, *Linear Algebra and Appl.*, **28** (1979), 5–16.
- [2] V.A. Botta, M. Meneguette Jr., J.A. Cuminato, Sobre uma generalização do Teorema de Eneström-Kakeya: polinômio reflexivo, *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, **9**, No. 1 (2008), 125–132.
- [3] V.A. Botta, “Zeros de Polinômios Característicos e Estabilidade de Métodos Numéricos”, Tese de Doutorado, ICMC-USP, São Carlos, 2008.
- [4] M. Marden, “Geometry of Polynomials”, American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.
- [5] M. Meneguette Jr., Zeros in the unit disk, *SIAM Review*, **36** (1994), 656–657.
- [6] I. Schur, Über Potenzreihen, die in Innern des Einheitskreises beschränkt sind, *J. Reine Angew. Math.*, **147** (1917), 205–232.
- [7] I. Schur, Über Polynome, die nur in Innern des Einheitskreises verschwinden, *J. Reine Angew. Math.*, **148** (1918), 122–145.