TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **11**, No. 1 (2010), 59-67.

Emparelhamentos Generalizados Associados à Tesselação $\{12g-6,3\}$[1]

M.B. FARIA[2], Departamento de Matemática, CCE, UFV, 36570-000 Viçosa, MG, Brasil.

R. PALAZZO Jr, Departamento de Telemática, FEEC, UNICAMP, 13083-852 Campinas, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho apresentamos as generalizações do problema de emparelhamentos de arestas relativos aos Casos I e IV, incluídos na Fig. 2, onde mostramos que todos os ciclos de vértices dos correspondentes polígonos têm comprimento 3, ou seja, os emparelhamentos das arestas dos polígonos Φ^{I}_{12g-6} e Φ^{IV}_{12g-6} tem todos os ciclos de vértices com comprimento 3 (Teoremas 3.1 e 3.1.1 da seção 3.). Além disso, como todos os ciclos de vértices têm comprimento 3 decorre que tais polígonos são domínios fundamentais da tesselação $\{12g-6,3\}$. Uma das motivações para o estudo de emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos com $12g-6$ arestas associados à tesselação $\{12g-6,3\}$ é que tais tesselações fornecem empacotamentos esféricos com densidade máxima e, portanto, estão relacionadas com a construção de códigos ótimos cuja probabilidade de erro é mínima.

Palavras-chave. Emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos, Códigos geometricamente uniforme, Empacotamento de esferas, Geometria hiperbólica.

1. Introdução

O problema de empacotamento de esferas tem como principal objetivo a busca pela maior densidade possível de empacotamento. Dentre os possíveis empacotamentos de esferas, destacamos os associados a reticulados, ou seja, aos conjuntos de esferas cujos centros fornecem um reticulado. Nestes casos, temos que a densidade de empacotamento é o volume da esfera dividido pelo volume do polígono que a contém.

Assim, quando consideramos um reticulado da forma $\{p,q\}$, temos um empacotamento de esferas associado. A busca por empacotamentos reticulados ótimos, no sentido da maior densidade possível, está ligada à busca de códigos ótimos, pois maior densidade de empacotamento implica em menor probabilidade de erro.

Em [10, p. 241], Toth apresentou o limitante superior máximo para a densidade de empacotamento no plano hiperbólico, sendo este igual a $\frac{3}{\pi}$. Em [2, Cáp. 4

[1]Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro, processo número 505258/2008-0, e à Universidade Federal de Viçosa pela licença para estágio pós-doutoral.
[2]mercio@gmail.com

Recebido em 04 Setembro 2009; Aceito em 19 Junho 2010.

Teorema 4.1.1] apresentamos estudos assintóticos para reticulados do tipo $\{p,q\}$. Demonstramos que assintoticamente[3] a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$. Porém, esta densidade é atingida por empacotamentos de horobolas $\{\infty,3\}$.

A relevância de tais resultados para empacotamento de esferas, está no fato que um reticulado hiperbólico do tipo $\{12g-6,3\}$ fornece um empacotamento ótimo com relação a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Além disso, para $g \to \infty$ temos que as densidades, de empacotamento e de cobertura, do referido reticulado atingem o valor máximo apresentado por Toth. Daí, nosso interesse em explorar os emparelhamentos de arestas de polígonos, em particular os polígonos com $12g-6$ arestas.

Neste trabalho apresentamos as generalizações que fizemos dos casos I e IV (seção 3.), incluídos na Fig. 2, onde mostramos que todos os seus ciclos de vértices têm comprimento 3 e, portanto, são domínios fundamentais da tesselação $\{12g-6,3\}$.

2. Emparelhamento de Arestas de um Polígono

Seja P um polígono e considere $\mathcal{A}$ o conjunto de arestas de P. Um emparelhamento de arestas de P é definido da seguinte forma.

Definição 2.1. *Um* emparelhamento de arestas *de P é um conjunto $\Phi = \{T_\tau | \tau \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$: 1) existe aresta $\tau' \in \mathcal{A}$ com $T_\tau(\tau') = \tau$; 2) as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$ satisfazem a relação $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$; 3) se τ for aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.*

O emparelhamento Φ de um polígono P gera um grupo Γ. Com este grupo podemos obter superfícies de Riemann R de um dado gênero g através do quociente de $\mathbb{E}$ por Γ, denotado por $\mathbb{E}/\Gamma$, onde $\mathbb{E}$ pode ser o plano euclidiano, ou o plano elíptico, ou o plano hiperbólico. Se Γ é um grupo finitamente gerado do primeiro tipo[4], podemos denotar a assinatura de Γ por $(g : k; m_1, m_2, ..., m_k)$, onde g denota o gênero, k o número de elementos elípticos e/ou parabólicos. Caso Γ não tenha elementos parabólicos nem elípticos, então denotamos a assinatura de Γ por $(g : 0)$.

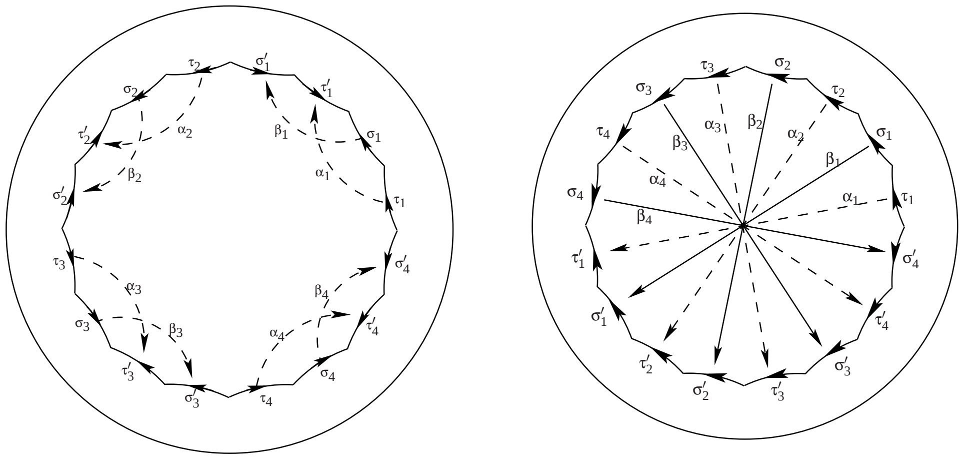
Seja um grupo finitamente gerado do primeiro tipo com assinatura $(g : 0)$. Então o número N de arestas do polígono emparelhadas pelas funções geradoras está entre $4g$ e $12g-6$ [1].

Os emparelhamentos para polígonos com $4g$ arestas foram bem explorados na literatura [2, 6, 7, 9, 12]. A Figura 1, ilustra dois destes emparelhamentos.

Com relação aos emparelhamentos de arestas de polígonos com $12g-6$ arestas que representam uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero g, para o caso do gênero ser dois ($g = 2$) sabemos que existem somente oito emparelhamentos, [7] (veja Fig. 2) (salvo conjugações por isometrias preservando orientação). Para os gêneros $3, 4$ e 5 o número de possíveis emparelhamentos tem $5, 7$ e 10 dígitos respectivamente, conforme observou Girondo e González-Diez em [8]. Em [3], um dos emparelhamentos foi generalizado para qualquer valor do gênero g.

[3] Assintoticidade no sentido de p e q tenderem a infinito, onde p e q determinam um ladrilhamento $\{p,q\}$.

[4] Dizemos que um grupo Γ é do primeiro tipo se o conjunto dos pontos de acumulação das órbitas $\Gamma(z)_{z\in\mathbb{D}^2}$ é igual à fronteira do disco de Poincaré $\partial\mathbb{D}^2$.



(a) (b)

Figura 1: (a) Ilustração do emparelhamento para gênero $g=4$
(b) Emparelhamento para $g=4$ com arestas diametralmente opostas

Na próxima seção apresentamos as generalizações dos casos I e IV, [4].

3. Emparelhamentos Generalizados Φ_{12g-6}^{I} e Φ_{12g-6}^{IV}

Considere um polígono $P_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$ com $12g-6$ arestas, $g \geq 2$, onde $\mathbb{D}^2$ representa o plano hiperbólico. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por $\{v_1, v_2, ..., v_{12g-6}\}$ e suas arestas por $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{12g-6}\}$ onde τ_i é o segmento geodésico iniciando em v_i e findando em v_{i+1}, $i \bmod (12g-6)$. Denotando os vértices inicial e final de uma aresta τ por $I(\tau)$ e $F(\tau)$, temos pela construção do polígono que $I(\tau_i) = v_i$ e $F(\tau_i) = v_{i+1}$.

Se o gênero g for igual a 2 temos um polígono com 18 arestas, P_{18}. O caso I apresentado em [7] fornece um emparelhamento que representa uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero 2 e é dado pelos pares de arestas, emparelhadas da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} \{\tau_1, \tau_{10}\}, \{\tau_2, \tau_5\}, \{\tau_3, \tau_7\}, \{\tau_4, \tau_8\}, \{\tau_6, \tau_9\} \\ , \{\tau_{11}, \tau_{14}\}, \{\tau_{15}, \tau_{18}\}, \{\tau_{12}, \tau_{16}\}, \{\tau_{13}, \tau_{17}\} \end{array}\right]. \tag{3.1}$$

Nesta seção, exibimos a generalização do emparelhamento correspondente ao caso I que é descrita por:

- Dado o polígono P_{12g-6} descrito acima, assumimos, para permitir emparelhamento de arestas por isometrias, que os seguintes pares de arestas possuem o mesmo comprimento:

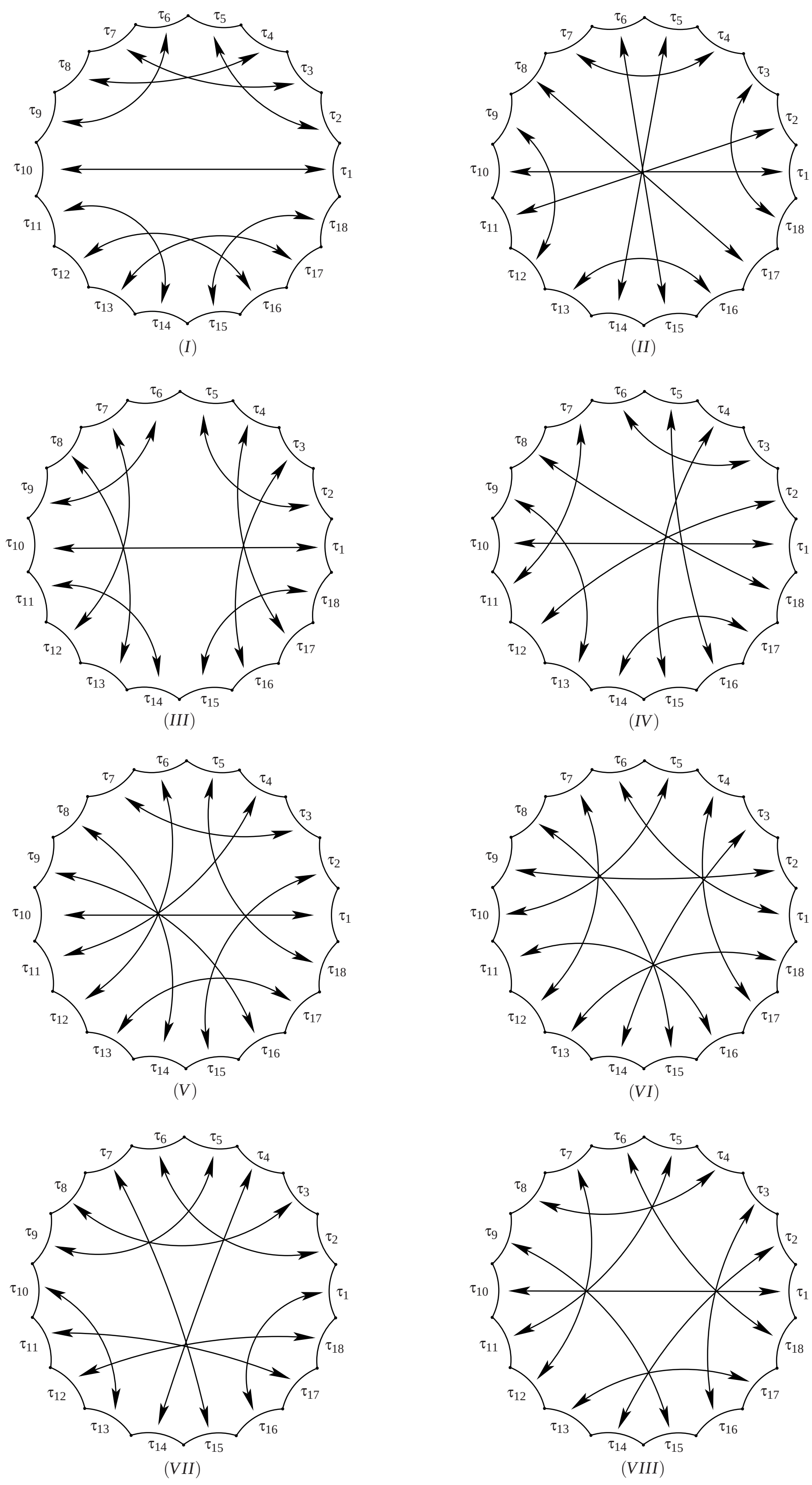


Figura 2: Os oito tipos de emparelhamento, de polígonos com 18 arestas, existentes para gênero $g = 2$. Figura reproduzida da página 267 em [7].

$$\begin{array}{l}\{\tau_1,\tau_{10}\};\{\tau_2,\tau_5\};\{\tau_6,\tau_9\};\{\tau_3,\tau_7\};\{\tau_4,\tau_8\};\\ \{\tau_{11+10k},\tau_{14+10k}\};\{\tau_{15+10k},\tau_{12g-6-2k}\};\{\tau_{16+10k},\tau_{19+10k}\};\{\tau_{20+10k},\tau_{12g-7-2k}\};\\ \{\tau_{12+10k},\tau_{17+10k}\};\{\tau_{13+10k},\tau_{18+10k}\};\quad se\ 0\leq k\leq g-3.\\ \{\tau_{10g-9},\tau_{10g-6}\};\{\tau_{10g-5},\tau_{10g-2}\};\{\tau_{10g-8},\tau_{10g-4}\};\{\tau_{10g-7},\tau_{10g-3}\}\end{array}$$

Considere as isometrias hiperbólicas (únicas) que identificam os pares conforme segue:

$$\begin{array}{c}\alpha_1(\tau_1)=\tau_{10};\ \alpha_2(\tau_2)=\tau_5;\ \alpha_3(\tau_6)=\tau_9;\\ \alpha_4(\tau_3)=\tau_7;\ \alpha_5(\tau_4)=\tau_8;\\ \beta_{1+6k}(\tau_{11+10k})=\tau_{14+10k};\ \beta_{2+6k}(\tau_{15+10k})=\tau_{12g-6-2k};\ \beta_{3+6k}(\tau_{16+10k})=\tau_{19+10k};\\ \beta_{4+6k}(\tau_{20+10k})=\tau_{12g-7-2k};\ \beta_{5+6k}(\tau_{12+10k})=\tau_{17+10k};\ \beta_{6+6k}(\tau_{13+10k})=\tau_{18+10k};\\ \alpha_6(\tau_{10g-9})=\tau_{10g-6};\ \alpha_7(\tau_{10g-5})=\tau_{10g-2};\ \alpha_8(\tau_{10g-8})=\tau_{10g-4};\ \alpha_9(\tau_{10g-7})=\tau_{10g-3}\\ se\ 0\leq k\leq g-3.\end{array}$$

Dizemos que o conjunto

$$\Phi^I_{12g-6}=\{\alpha_j,\beta_{1+6k},\beta_{2+6k},\beta_{3+6k},\beta_{4+6k},\beta_{5+6k},\beta_{6+6k},;k=0,1,2,...,g-3\quad e\quad j=1,2,...,9\}$$

é um emparelhamento para o polígono P_{12g-6}. Particularmente, se tomarmos $g=2$ teremos o emparelhamento apresentado em (3.1).

3.1. O emparelhamento Φ^I_{12g-6}

Esta subseção contém resultados que nos permitem conhecer um pouco mais sobre o emparelhamento Φ^I_{12g-6}. Neste sentido, apresentamos um resultado que estabelece que todo ciclo[5] de vértices tem comprimento três. Antes, seja $\varphi\in\Phi^I_{12g-6}$ e suponha que $\varphi(\tau_i)=\tau_j$. Então temos que φ satisfaz

$$\varphi(I(\tau_i))=F(\varphi(\tau_i))=F(\tau_j)\qquad e\qquad \varphi(F(\tau_i))=I(\varphi(\tau_i))=I(\tau_j).$$

Em outras palavras, como $I(\tau_l)=v_l$ e $F(\tau_l)=v_{l+1}$, disso decorre que $\varphi(v_i)=v_{j+1}$ e $\varphi(v_{i+1})=v_j$.

Teorema 3.1. *Seja Φ^I_{12g-6} um emparelhamento do polígono P_{12g-6}. Então todos os ciclos de vértices têm comprimento 3 conforme verificamos a seguir:*

$$\{v_2,v_6,v_{10}\};\ \{v_3,v_5,v_8\};\ \{v_4,v_7,v_9\};$$

$$\{v_{11+5k},v_{15+5k},v_{1-k}\};\qquad k=0,1,...,2g-5$$

$$\{v_{12+10k},v_{14+10k},v_{18+10k}\};\ \{v_{13+10k},v_{17+10k},v_{19+10k}\};\quad k=0,1,...,g-3$$

$$\{v_{10g-9},v_{10g-5},v_{-2g+5}\};\ \{v_{10g-8},v_{10g-6},v_{10g-3}\};\ \{v_{10g-7},v_{10g-4},v_{10g-2}\}$$

[5] Seja $\Gamma_{12g-6}=\langle\Phi_{12g-6}\rangle$. Um *ciclo* é uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, é um conjunto da forma

$$\{T(z)\,|\,T\in\Gamma_{12g-6}\text{ e }z\text{ e }T(z)\text{ são vértices de }P_{12g-6}\}.$$

Demonstração. Iniciamos obtendo o ciclo que contém o vértice v_2. Note que

$$v_2 = F(\tau_1) = I(\tau_2).$$

Pela definição das funções de emparelhamento, temos que τ_2 é emparelhada à aresta τ_5 através da transformação α_2. Segue então que

$$\alpha_2(v_2) = \alpha_2(I(\tau_2)) = F(\alpha_2(\tau_2)) = F(\tau_5) = v_6,$$

de modo que v_6 pertence ao ciclo determinado por v_2. Mas, além de ser o vértice final de τ_5, temos que v_6 é o vértice inicial de τ_6 e como τ_6 é emparelhado a τ_9 por α_3, obtemos

$$\alpha_3(v_6) = \alpha_3(I(\tau_6)) = F(\alpha_3(\tau_6)) = F(\tau_9) = v_{10},$$

de modo que v_{10} pertence ao ciclo determinado por v_2 e v_6. Novamente, temos que $v_{10} = I(\tau_{10})$ e τ_{10} é emparelhada a τ_2 através da isometria α_1^{-1}. Segue que

$$\alpha_1^{-1}(v_{10}) = \alpha_1^{-1}(I(\tau_{10})) = F\left(\alpha_1^{-1}(\tau_{10})\right) = F(\tau_1) = v_2,$$

completando um ciclo. Assim, o ciclo determinado por v_2 é

$$\{v_2, v_6, v_{10}\}. \tag{3.2}$$

Seguindo este raciocínio, temos os demais $4g-3$ ciclos. □

Seja Γ^I_{12g-6} o grupo gerado pelo emparelhamento Φ^I_{12g-6} associado ao polígono P_{12g-6}. A partir do Teorema 3.1 concluímos que o número de ciclos de vértices é $4g-2$.

Desse modo, concluímos que o quociente de $\mathbb{H}^2$ pelo grupo gerado pelo emparelhamento Φ^I_{12g-6}, isto é, Γ^I_{12g-6}, denotado por $\mathbb{H}^2/\Gamma^I_{12g-6}$, nos fornece uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g.

Corolário 3.1.1. *Se a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π, então Γ^I_{12g-6} é um grupo propriamente descontínuo, isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(R_g)$, e $\mathbb{D}^2/\Gamma^I_{12g-6}$ é difeomorfo à superfície de Riemann R_g.*

Demonstração. Assumindo que a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π e sendo as arestas emparelhadas de mesmo comprimento concluímos, pelo teorema de Poincaré, que Γ^I_{12g-6} é discreto. Como $\Gamma^I_{12g-6} \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ temos um grupo propriamente descontínuo[6]. Além disso, pelo Teorema de Poincaré, segue que o polígono é domínio fundamental do grupo gerado pelas funções de emparelhamento, de modo que o quociente $\mathbb{D}^2/\Gamma^I_{12g-6}$ é difeomorfo a uma superfície de Riemann, R_g, compacta orientável de gênero g e $\pi_1(R_g)$ é isomorfo a Γ^I_{12g-6}. □

[6] Um subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ é discreto se, e somente se, sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua, [1] e [6].

Resta apenas determinar seu gênero, que pode ser obtido através da característica de Euler-Poincaré. Do Teorema 3.1 temos que o número de ciclos de vértices é $4g-2$. Sendo $6g-3$ o número de arestas identificadas, concluimos que o emparelhamento Φ^{I}_{12g-6} representa uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g pois a característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi\left(P_{12g-6}\right) = 1-(6g-3)+(4g-2) = 2-2g.$$

3.2. Emparelhamento generalizado Φ^{IV}_{12g-6}

O caso IV apresentado em [7] também fornece um emparelhamento que representa uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero 2 e é dado pelos pares de arestas, emparelhadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \{\tau_1,\tau_{10}\},\{\tau_2,\tau_{12}\},\{\tau_3,\tau_6\},\{\tau_4,\tau_{15}\},\{\tau_5,\tau_{16}\} \\ ,\{\tau_7,\tau_{11}\},\{\tau_8,\tau_{18}\},\{\tau_9,\tau_{13}\},\{\tau_{14},\tau_{17}\} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Se consideramos que os seguintes pares de arestas possuem o mesmo comprimento:

- $\{\tau_3,\tau_6\};\{\tau_4,\tau_{8g-1}\};\{\tau_5,\tau_{8g}\};$
  $\{\tau_{7+8k},\tau_{11+8k}\};\{\tau_{8+8k},\tau_{12g-6-4k}\};\{\tau_{9+8k},\tau_{13+8k}\};$
  $\{\tau_{10+8k},\tau_{1-4k}\};\{\tau_{12+8k},\tau_{2-4k}\};\{\tau_{14+8k},\tau_{12g-7-4k}\}$
  $se\ 0\le k\le g-2,$

e que as isometrias hiperbólicas (únicas) identificam os pares conforme segue:

$$\begin{gathered} \delta_1(\tau_3)=\tau_6;\ \delta_2(\tau_4)=\tau_{8g-1};\ \delta_3(\tau_5)=\tau_{8g}; \\ \xi_{1+6k}(\tau_{7+8k})=\tau_{11+8k};\ \xi_{2+6k}(\tau_{8+8k})=\tau_{12g-6-4k};\ \xi_{3+6k}(\tau_{9+8k})=\tau_{13+8k}; \\ \xi_{4+6k}(\tau_{10+8k})=\tau_{1-4k};\ \xi_{5+6k}(\tau_{12+8k})=\tau_{2-4k};\ \xi_{6+6k}(\tau_{14+8k})=\tau_{12g-7-4k}; \\ se\ 0\le k\le g-2, \end{gathered}$$

temos que o conjunto

$$\Phi^{IV}_{12g-6}=\left\{\delta_j,\xi_{1+6k},\xi_{2+6k},\xi_{3+6k},\xi_{4+6k},\xi_{5+6k},\xi_{6+6k};\ k=0,1,2,...,g-2\ e\ j=1,2,3\right\}$$

é um emparelhamento para o polígono P_{12g-6}. Particularmente, se tomarmos $g=2$ teremos o emparelhamento apresentado em (3.3).

Os resultados apresentados a seguir para o emparelhamento Φ^{IV}_{12g-6} podem ser demonstramos de maneira análoga ao feito para o caso Φ^{I}_{12g-6} .

Teorema 3.2. *Seja* Φ^{IV}_{12g-6} *um emparelhamento do polígono* P_{12g-6}*. Então todos os ciclos de vértices têm comprimento* 3 *e são da seguinte forma:*

$$\{v_4,v_6,v_{8g}\};\ \{v_5,v_{8g-1},v_{8g+1}\};$$

$$\{v_{7+8k},v_{12+8k},v_{3-4k}\};\ \{v_{8+8k},v_{11+8k},v_{1-4k}\};\ \{v_{9+8k},v_{14+8k},v_{12g-6-4k}\};$$

$$\{v_{10+8k},v_{13+8k},v_{2-4k}\};\quad k=0,1,...,g-2$$

Seja Γ_{12g-6}^{IV} o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^{IV} associado ao polígono P_{12g-6}.

Corolário 3.2.2. *Se a soma dos ângulos em cada ciclo é* 2π, *então* Γ_{12g-6}^{IV} *é grupo propriamente descontínuo, isomorfo ao grupo fundamental* $\pi_1(R_g)$, *e* $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}^{IV}$ *é difeomorfo à superfície de Riemann* R_g.

Analogamente se conclui também que

$$\chi(P_{12g-6}) = 1-(6g-3)+(4g-2) = 2-2g.$$

4. Conclusões

Os emparelhamentos generalizados que apresentamos neste trabalho estão associados a polígonos que são domínios fundamentais de tesselações do tipo $\{12g-6,3\}$. Estas tesselações por sua vez, fornecem empacotamentos de esferas com a máxima densidade, ou seja, empacotamentos ótimos. Além disso, a busca por outros emparelhamentos relacionados a esta tesselação auxiliará na determinação de grupos fuchsianos aritméticos relacionados a $\{12g-6,3\}$ (veja [11]).

Além disso, os casos III e VI foram resolvidos e podem ser encontrados em [5].

Abstract. In this paper we generalize the edge-pairings problem regarding the Cases I and IV, see Fig. 2, where we show that all the cycles of vertices of the corresponding polygons have length 3, that is, the edge-pairings of the polygons Φ_{12g-6}^{I} and Φ_{12g-6}^{IV} have all the cycles of vertices with length 3 (Theorems 3.1 and 3.1.1 of Section 3.). Furthermore, since all the cycles of vertices have length 3 it follows that the polygons are the fundamental domains of the tessellation $\{12g-6,3\}$. One of the motivations to study the edge-pairings of regular hyperbolic polygons with $12g-6$ edges associated with the tessellation $\{12g-6,3\}$ is that such tessellations lead to sphere packings with maximum density and so are related to the construction of optimum codes whose error probability is minimum.

Keywords. Edge-pairings of hyperbolic polygons, Geometrically uniform codes, Sphere packings, Hyperbolic geometry.

Referências

[1] A. Beardon, "The Geometry of Discrete Groups", Springer Verlag, 1983.

[2] M. B. Faria, "Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos", Dissertação de Mestrado, Imecc, Universidade Estadual de Campinas, 2001.

[3] M.B. Faria, "Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos", Tese de Doutorado, Imecc, Universidade Estadual de Campinas, 2005.

[4] M.B. Faria, R. Palazzo Jr, "Dois casos de emparelhamentos generalizados associados a tesselação $\{12g-6,3\}$", Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá, MT, **2** (2009), 342–348.

[5] M.B. Faria, R. Palazzo Jr, "Emparelhamentos generalizados casos III e VI associados a tesselação $\{12g-6,3\}$", Anais do XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBrT 2009, Blumenau, SC, 2009.

[6] P.A. Firby, C.F. Gardiner, "Surface Topology", Ellis Horwood Limited, New York, 1991.

[7] R. Fricke, F. Klein, "Vorlesugen über die Theorie der Automorphen Funktionen", Teubener, Leipzig, 1897.

[8] E. Girondo, G. González-Diez, "Genus two extremal surfaces: extremal discs, isometries and Weierstrass points", *Israel Journal of Mathematics*, **132** (2002), 221–238.

[9] L.C. Kinsey, "Topology of Surfaces", Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] L.F. Tóth, "Regular Figures", International series of monographs on Pure and Applied Mathematics, Pergamon press LTDA, Oxford, vol. 48, 1964.

[11] V.L. Vieira, "Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais", Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, 2007.

[12] J.R. Weeks, "The Shape of Space", Marcel Dekker, New York, 1985.