TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **10**, No. 1 (2009), 1-9.

Teorema de Adição para as Funções de Mittag-Leffler[1]

R.F. CAMARGO[2], A.O. CHIACCHIO[3], E. CAPELAS DE OLIVEIRA[4], Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP, 13081-970, Campinas, SP, Brasil.

Resumo. A partir do conceito de função de Green relativa à equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo, apresentamos novas relações e um teorema de adição envolvendo as funções de Mittag-Leffler.

Palavras-chave. Cálculo Fracionário, Função de Mittag-Leffler, Teoremas de Adição, Equação do Telégrafo, Função de Green.

1. Introdução

O cálculo fracionário é uma das ferramentas mais precisas para se refinar a descrição de fenômenos naturais. Uma maneira bastante comum de se utilizar esta ferramenta é substituir a derivada de ordem inteira de uma equação diferencial parcial, que descreve um determinado fenômeno, por uma derivada de ordem não-inteira. Vários resultados importantes e generalizações foram obtidos através desta técnica, em diversas áreas do conhecimento, tais como: mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte, redes elétricas, probabilidade, biomatemática, dentre outros [3].

Por várias razões esperadas, a solução de uma equação diferencial de ordem não-inteira costuma ser mais complexa do que a da respectiva equação de ordem inteira. Uma das dificuldades advém do fato de o conhecimento das funções inerentes ao cálculo fracionário, não ser tão desenvolvido quanto o conhecimento das funções relacionadas ao cálculo de ordem inteira. Em particular, mencionamos que uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem com coeficientes constantes apresenta, como solução, uma função exponencial o que não é o caso de uma equação diferencial fracionária, de onde emergem as funções de Mittag-Leffler [8].

No presente trabalho, utilizando o conceito de função de Green relativa à equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo [4], apresentamos e demonstramos um teorema de adição para as funções de Mittag-Leffler.

---

[1] Agradecemos ao CNPq e à FAPESP 06/52475-8 por terem financiado este projeto.
[2] rubens@fc.unesp.br
[3] ary@ime.unicamp.br
[4] capelas@ime.unicamp.br

2. Preliminares

Para resolver nossa principal equação diferencial parcial fracionária[5], utilizamos a metodologia da justaposição de transformadas [5], ou seja, aplicamos a transformada de Fourier na parte espacial e a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal. Sendo assim, nesta seção apresentamos a derivada fracionária no sentido de Caputo [1], bem como suas transformadas de Laplace e Fourier. Além disso, recuperamos alguns resultados envolvendo as funções de Mittag-Leffler.

2.1. Derivada Fracionária

Provavelmente a existência de várias definições não equivalentes para a derivada de ordem fracionária, bem como a falta de uma interpretação geométrica evidentes fizeram com que o cálculo fracionário não fosse utilizado em larga escala [11]. Apesar disto, como foi mencionado na introdução, inúmeros resultados importantes e generalizações foram obtidos graças ao cálculo fracionário.

Há várias formas de se introduzir a derivada de ordem não-inteira como uma generalização para a derivada de ordem inteira, dentre elas podemos citar a definição de Riemann-Liouville, que é a mais conhecida e a de Caputo, que é mais restritiva, mas parece ser mais adequada para o estudo de problemas físicos [4]. Além disso, destacamos a definição de Grünwald-Letnikov que é mais apropriada para se utilizar em problemas numéricos e a definição de Weyl que, dentre várias aplicações, é de fundamental importância para o cálculo da derivada fracionária, por exemplo, da função[6] $f(x) = 1/x$. Estas e outras definições podem ser encontradas em detalhes no livro de Podlubny [11].

No presente trabalho estamos interessados na resolução de uma EDPF relacionada a um problema físico, por esta razão apresentamos apenas a derivada no sentido de Caputo.

A derivada de ordem μ no sentido de Caputo é definida da seguinte maneira [1]

$$\mathsf{D}_t^\mu f(t,x) \equiv \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\mu)} \displaystyle\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau,x)}{(t-\tau)^{\mu+1-n}} \mathrm{d}\tau\,, & n-1<\mu<n\,, \\ f^{(n)}(t,x)\,, & \mu \equiv n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

na qual $f^{(n)}(t,x)$ denota a derivada usual de ordem n em relação à variável t.

Deste ponto em diante, consideramos o limite inferior a como sendo $-\infty$ na parte espacial e zero na parte temporal. O primeiro e segundo casos estão associados, respectivamente, às transformadas de Fourier e de Laplace [5, 9].

Sendo s, com $\mathrm{Re}(s) > 0$, o parâmetro da transformada de Laplace sabemos que [11]

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} f(t,x)\right\} = s^\mu F(s,x) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0^+,x),$$

[5] Vamos utilizar a notação EDPF para designar uma equação diferencial parcial fracionária.

[6] Tanto a definição de Caputo quanto a de Riemann-Liouville para a derivada fracionária divergem, por exemplo, para a função $f(x) = 1/x$.

com $n-1<\mu\leq n$ e $n\in\mathbb{N}$. Nesta equação, $F(s,x)$ denota a transformada de Laplace de $f(t,x)$. Além disso, sendo ω o parâmetro da transformada de Fourier podemos escrever para a derivada fracionária de Caputo

$$\mathfrak{F}\left\{\mathsf{D}_x^{\mu} f(t,x)\right\} = |\omega|^{2\mu} F(t,\omega),$$

na qual $F(t,\omega)$ é a transformada de Fourier da função $f(t,x)$.

Enquanto a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo depende de condições iniciais que possuem interpretação física, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville depende de condições dadas em termos de ${}_a\mathsf{D}_t^{\mu-k-1} f(t)|_{t=0}$. Outra importante diferença entre estas duas abordagens é que a derivada fracionária de Caputo de uma constante é zero, o que não ocorre com a definição de Riemann-Liouville.[7] Isto justifica a utilização da derivada de Caputo e não a de Riemann-Liouville, quando estamos interessados em resolver uma EDPF.

2.2. Funções de Mittag-Leffler

Nesta seção introduzimos a clássica função de Mittag-Leffler, denotada por $E_\alpha(x)$, bem como a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, denotada por $E_{\alpha,\beta}(x)$, a partir da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, também conhecida como função de Mittag-Leffler generalizada, proposta por Prabhakar [12], isto é,

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \frac{z^k}{k!}, \tag{2.1}$$

na qual $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer,

$$(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)} \equiv \rho(\rho+1)\cdots(\rho+k-1)$$

e $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ e $\mathrm{Re}(\beta)>0$. Esta função generaliza a função de Mittag-Leffler clássica e também a de dois parâmetros [6, 10], pois $E_{\alpha,1}^1(x) = E_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)}$ e $E_{\alpha,\beta}^1(x) = E_{\alpha,\beta}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}$, conseqüentemente para $\alpha,\beta,\rho=1$ temos $E_{1,1}^1(x)=\mathrm{e}^x$.

Nesta seção estamos interessados apenas na transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler. Diversas relações envolvendo a função de Mittag-Leffler de um parâmetro podem ser encontradas em [11].

A fim de calcular a transformada de Laplace inversa da função $(s^\alpha \pm a)^{-1}$ utilizamos uma expansão em torno de $s=\pm\infty$ e uma divisão longa, desta forma podemos escrever

$$\mathfrak{L}\left[E_\alpha(\mp a\, t^\alpha)\right] = \frac{1}{s}\left[\frac{s^\alpha}{s^\alpha \pm a}\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \pm a},$$

[7] Note que desta forma a derivada segundo Riemann-Liouville não pode ser interpretada como a taxa de variação.

na qual $|a/s^\alpha| < 1$. Para a respectiva transformada inversa temos

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \pm a}\right] = E_\alpha(\mp a\, t^\alpha),$$

com $\alpha > 0$. Hartley-Lorenzo [7] discutem a solução geral de uma EDPF linear e obtêm diversas relações envolvendo a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Para a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, temos que a transformada de Laplace é dada por [11, 13]

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\mp a t^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \pm a} \tag{2.2}$$

e a correspondente transformada inversa

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \pm a}\right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\mp a t^\alpha), \tag{2.3}$$

a qual é válida para $|a/s^\alpha| < 1$.

Enfim, podemos escrever a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler generalizada [8], ou seja,

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1}E^\rho_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^\rho}$$

cuja transformada inversa pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^\rho}\right] = t^{\beta-1}E^\rho_{\alpha,\beta}(\pm\lambda\, t^\alpha), \tag{2.4}$$

com $\mathrm{Re}(s) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Note que para $\rho = 1$, isto é, $E^1_{\alpha,\beta}(x) = E_{\alpha,\beta}(x)$ recuperamos o resultado da equação (2.2). Destacamos por fim que recentemente Chamati-Tonchev [2] introduziram a função de Mittag-Leffler generalizada na teoria de "finite-size scaling".

3. A Equação do Telégrafo Fracionária

A assim chamada equação diferencial do telégrafo fracionária é dada por

$$(\mathsf{D}_t^{2\alpha} + 2\lambda\,\mathsf{D}_t^\alpha - \mathsf{D}_x^{2\gamma})G_\alpha^\gamma(x,t) = \lambda_1\delta(t)\delta(x), \tag{3.1}$$

na qual $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $\mathsf{D}_\xi = \partial/\partial\xi$, λ e λ_1 são constantes positivas. Esta equação generaliza a clássica equação do telégrafo e também, para valores específicos dos parâmetros, a equação de difusão. A função de Green associada à equação (3.1) foi recentemente discutida [4].

Em [4] discute-se a solução para a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo através de dois métodos diferentes. Comparando os resultados obtidos podemos escrever novas relações matemáticas e um teorema de adição envolvendo as funções de Mittag-Leffler. Apresentamos os principais passos que levaram ao nosso resultado principal e posteriormente propomos uma demonstração formal para um novo teorema de adição associado à função de Mittag-Leffler generalizada.

Consideramos condições iniciais homogêneas e convenientes condições de contorno, de tal forma que a transformada de Fourier possa ser calculada. Utilizando a justaposição de transformadas, Fourier na parte espacial e Laplace na parte temporal, obtemos a partir da equação (3.1), a seguinte expressão

$$\mathcal{G}_\alpha^\gamma(\omega, s) = \frac{\lambda_1}{s^{2\alpha} + 2\lambda\, s^\alpha + \Lambda}, \tag{3.2}$$

na qual $\Lambda = -|\omega|^{2\gamma}$, ω e s são, respectivamente, os parâmetros da transformada de Fourier e de Laplace. Podemos reescrevê-la na forma

$$\mathcal{G}_\alpha^\gamma(\omega, s) = \frac{\lambda_1}{\Lambda}\frac{\Lambda\, s^{-\alpha}}{s^\alpha + 2\lambda}\frac{1}{1 + \dfrac{\Lambda\, s^{-\alpha}}{s^\alpha + 2\lambda}} = \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Lambda^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(s^\alpha + 2\lambda)^{k+1}},$$

com $|\Lambda\, s^{-\alpha}/(s^\alpha + 2\lambda)| < 1$.

Calculando a transformada de Laplace inversa podemos escrever

$$\mathbb{G}_\alpha^\gamma(\omega, t) = \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda)^k\, t^{2\alpha k + 2\alpha - 1} E_{\alpha, 2\alpha k + 2\alpha}^{k+1}(-2\lambda\, t^\alpha), \tag{3.3}$$

onde $E_{\alpha,\beta}^{\rho}(x)$ é dada pela equação (2.1).

Por outro lado, considerando o denominador da equação (3.2) escrito da seguinte forma

$$s^{2\alpha} + 2\lambda s^\alpha + \Lambda = (s^\alpha - \mu_1)(s^\alpha - \mu_2),$$

onde $\mu_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$ e $\mu_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$, podemos calcular a transformada de Laplace inversa de uma maneira distinta, de modo a obter

$$\mathbb{G}_\alpha^\gamma(\omega, t) = \lambda_1 \frac{t^{2\alpha - 1}}{\mu_1 - \mu_2}\{\mu_1 E_{\alpha, 2\alpha}(\mu_1 t^\alpha) - \mu_2 E_{\alpha, 2\alpha}(\mu_2 t^\alpha)\}.$$

4. Teorema de Adição

Comparando as duas expressões para $\mathbb{G}_\alpha^\gamma(\omega, t)$, obtidas anteriormente, podemos escrever um novo teorema de adição para as funções de Mittag-Leffler. Note que a demonstração para o teorema que se segue é uma conseqüência natural das duas formas de se calcular a função de Green, contudo aqui apresentamos uma demonstração formal.

Teorema 4.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$ e $|y| < 1$. Se $x \neq y$ então*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2k\alpha + 2\alpha}^{k+1}(x + y) = \frac{x\, E_{\alpha, 2\alpha}(x) - y\, E_{\alpha, 2\alpha}(y)}{x - y}, \tag{4.1}$$

onde $E_{\alpha, 2k\alpha + 2\alpha}^{k+1}(x + y)$ é dado pela equação (2.1) e $E_{\alpha,\beta}^{1}(\xi) = E_{\alpha,\beta}(\xi)$ é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

Demonstração. Sejam $|x| < 1$ e $|y| < 1$. A partir da equação (2.1) podemos escrever para o primeiro membro da equação (4.1)

$$\Omega \equiv \sum_{k=0}^{\infty}(-xy)^k E^{k+1}_{\alpha,2k\alpha+2\alpha}(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty}(-xy)^k \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(k+1)_\rho}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha k+2\alpha)}\frac{(x+y)^\ell}{\ell!}.$$

Utilizando a expressão do binomial e rearranjando os somatórios podemos escrever

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-xy)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=n}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\ell+1)}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha k+2\alpha)}\frac{x^{\ell-n}y^n}{n!(\ell-n)!}.$$

Introduzindo a mudança de variável $\ell \to \ell+n$ na equação anterior obtemos

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-xy)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\ell+n+1)}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha k+2\alpha)}\frac{x^\ell}{\ell!}.$$

Fazendo a mudança de índices, $n \to n-k$ e $\ell \to \ell-k$ temos

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{y^n}{(n-k)!}\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{\Gamma(\ell+n-k+1)}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)}\frac{x^\ell}{(\ell-k)!}$$

que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty}y^n\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(\ell+n-k)!}{(n-k)!(\ell-k)!},$$

com $n \geq k$ e $\ell \geq k$, nos demais casos $\Omega = 0$.

Para efetuar a soma em k, utilizamos a seguinte relação para os coeficientes binomiais:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-n \\ m-n \end{pmatrix}.$$

Desta forma concluímos, para o primeiro membro da equação (4.1), que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-xy)^k E^{k+1}_{\alpha,2k\alpha+2\alpha}(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)}.$$

Por outro lado, o segundo membro da equação anterior pode ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha)}\sum_{n=0}^{\ell}\left(\frac{y}{x}\right)^n.$$

Utilizando a sequinte expressão

$$\frac{x^{\ell+1}-y^{\ell+1}}{x-y} = x^\ell\sum_{n=0}^{\ell}\left(\frac{y}{x}\right)^n$$

válida para $x \neq y$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)} &= \frac{1}{x-y}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^{\ell+1}-y^{\ell+1}}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha)} \\ &= \frac{1}{x-y}\left\{x\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha)} - y\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{y^\ell}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha)}\right\}.\end{aligned}$$

Utilizando a equação (2.1) com $\rho = 1$ temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)} = \frac{x\,E_{\alpha,2\alpha}(x) - y\,E_{\alpha,2\alpha}(y)}{x-y}$$

onde $E^1_{\alpha,\beta}(z) \equiv E_{\alpha,\beta}(z)$ é a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. O teorema está provado □

5. Aplicações

Utilizando a regra de l'Hôpital e a equação (4.1), obtemos, como corolário, o importante resultado que se segue, isto é, uma regra de soma envolvendo uma função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

Corolário 5.1.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k E^{k+1}_{\alpha,2\alpha k+2\alpha}(2x) = \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)E_{\alpha,2\alpha}(x). \tag{5.1}$$

Demonstração. Utilizando a regra de l'Hôpital e tomando o limite $y \to x$ na equação (4.1) segue-se o resultado □

Como um particular caso desta relação, tomamos $\alpha = 1$ na equação (5.1) de modo a obter uma nova regra de soma para a função hipergeométrica confluente,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!}\,{}_1F_1(k+1;2k+2;2x) = \mathrm{e}^x. \tag{5.2}$$

Além disso, apenas como uma verificação do teorema, consideramos o caso em que $y = -x$. Utilizando a equação (4.1) podemos escrever

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}\,E^{k+1}_{\alpha,2\alpha k+2\alpha}(0) = E_{2\alpha,2\alpha}(x^2). \tag{5.3}$$

Enfim, substituindo $\alpha = 1$ na equação anterior, recuperamos a clássica expansão de MacLaurin para a função co-seno hiperbólico.

6. Conclusões

Neste trabalho, utilizando o conceito de função de Green fracionária associada à equação do telégrafo fracionária, escrita em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, estabelecemos novas relações envolvendo as funções de Mittag-Leffler.

Uma continuação natural deste trabalho é generalizar os resultados advindos do cálculo das funções de Green e propagadores para a equação geral de difusão (de onda) com derivada temporal fracionária, em uma, duas e três dimensões, isto é, substituindo o operador diferencial de Laplace por sua generalização fracionária.

Abstract. Through the concept of the Green's function associated with the fractional differential equation related to the telegraph's problem, new relations and an addition theorem involving the Mittag-Leffler functions are presented.

Referências

[1] M. Caputo, Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **56** (1974), 897-904.

[2] H. Chamati, N.S. Tonchev, Generalized Mittag-Leffler functions in the theory of finite-size scaling for systems with strong anisotropy and/or long-range interaction, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39** (2006), 469-478.

[3] Debnath, Recent applications of fractional calculus to Science and Engineering, *Int. J. Math.* **2003** (2003), 3413-3442.

[4] R. Figueiredo Camargo, A.O. Chiacchio, E. Capelas de Oliveira, Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation, *J. Math. Phys.*, **49** (2008), 033505, [DOI 10.1063/1.2890375].

[5] R. Figueiredo Camargo, "Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, 2005.

[6] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira, A.O. Chiacchio, "Sobre a Função de Mittag-Leffler", R. P., 15/2006, UNICAMP, Campinas, SP, 2006.

[7] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, A solution to the fundamental linear fractional order differential equation, *NASA/TP* - 1998-208693 (1998).

[8] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Mathematics Studies, vol. 204, Edited by Jan van Mill, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[9] C.F. Lorenzo, T.T. Hartley, *Initialized fractional calculus*, *NASA/TP* - 2000-209943 (2000).

[10] F. Mainardi, R. Gorenflo, On Mittag-Leffler-Type functions in fractional evolution process, *J. Comput. Appl. Math.*, **118** (2000), 283-299.

[11] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations", Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[12] T.R. Prabhakar, A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, **19** (1971), 7-15.

[13] A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev, "Integrals and Series", vol. I, II, III, Elementary Functions, Gordon and Breach, New York, 1986.