TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **10**, No. 1 (2009), 11-20.

Solução da Equação de Fluxo Subterrâneo a partir de Estimador de Erro *a posteriori*[1]

A. FIRMIANO[2], E. WENDLAND[3], Departamento de Hidráulica e Saneamento SHS/EESC/USP, Cx.P. 359, 13560-970 São Carlos, SP, Brasil.

Resumo A determinação do campo de velocidades em aqüíferos é essencial para o gerenciamento de recursos hídricos subterrâneos e a avaliação do transporte de solutos dissolvidos na fase aquosa. O presente trabalho apresenta uma solução para a equação de fluxo de água subterrânea em aqüífero confinado a partir de uma implementação do método de elementos finitos em linguagem Java. A solução consiste na aproximação da equação de Poisson válida em domínio irregular, com meio heterogêneo e anisotrópico. Neste trabalho foi implementado um estimador de erro de acordo com a técnica proposta por Zienkiewicz e Zhu. Este estimador de erro, baseado no pós-processamento do gradiente hidráulico, foi capaz de identificar a região do domínio que contém a singularidade. A distribuição de carga hidráulica calculada foi comparada com soluções analíticas apresentadas na literatura. O modelo de fluxo de água subterrânea apresentou boa concordância do campo de velocidades em regime transiente. A solução para a curva de rebaixamento convergiu para a solução em regime permanente.

1. Introdução

O campo de velocidades da água subterrânea estabelece uma estreita relação entre a equação fundamental do fluxo e o transporte de contaminantes no meio poroso saturado. As informações provenientes da distribuição de cargas hidráulicas, de um aqüífero em que se está modelando, poderiam ser utilizadas nos termos advectivo e difusivo da equação do transporte, fornecendo ao modelo matemático uma abrangência um pouco mais realista nos movimentos hídricos na zona de saturação.

Este transporte de contaminantes, ou de soluto ou de outros constituintes químicos dissolvidos, que são importantes componentes de vários processos geológicos, ocorrem devido aos fenômenos de advecção, difusão molecular e dispersão mecânica regidos no meio poroso.

A advecção refere-se ao movimento de solutos conduzidos pelo movimento da água subterrânea. A difusão molecular é o fluxo difusivo do soluto na direção do gradiente de concentração. Este processo ocorre em função do movimento browniano dos íons na solução. Os íons de uma região de concentração alta tendem a se misturarem com íons de uma região de baixa concentração estabelecendo uma mesma

[1]Apoio financeiro do projeto PROBRAL - processo CAPES/DAAD BEX 1017/07-1
[2]lezandro@sc.usp.br
[3]ew@sc.usp.br, www.shs.eesc.usp.br, albatroz.shs.eesc.usp.br

distribuição no espaço. A dispersão mecânica ocorre pela diferença na concentração do soluto com a mistura resultando do movimento físico da água. Portanto, onde a concentração difere, o soluto é transportado por difusão molecular quando o fluxo de velocidade é relativamente baixo e por dispersão mecânica quando a velocidade é considerada alta.

O presente trabalho apresenta uma metodologia para obter os valores da velocidade real, com suas respectivas direções, em cada elemento finito de uma malha de elementos quadriláteros. A resolução numérica da equação fundamental do fluxo da água subterrânea, utiliza a linguagem de programação JAVA para implementar o gradiente hidráulico de um aqüífero confinado interagindo com drenança vertical. Velocidades aparentes, provenientes da lei de Darcy, junto com estimativas do parâmetro físico que representam a porosidade efetiva do aqüífero em escala regional, determinam as velocidades reais do fluxo da água subterrâneas.

Para que as informações obtidas da equação do fluxo sejam aplicadas na equação do transporte de contaminantes algumas ponderações devem ser consideradas. Por exemplo, o contaminante em estudo não irá influenciar na velocidade do fluxo da água subterrânea, caracterizando o aqüífero em estudo como um campo conservativo. E ainda, a temperatura média no meio poroso não sofrerá alterações significantes durante o tempo observado.

A condição de fluxo horizontal é adotada para simplificar o estudo de água subterrânea, pois, para grandes extensões do aqüífero, efeitos das áreas de recarga, de descarga e de poços parcialmente penetrantes podem ser desconsiderados [4].

A superfície potenciométrica é definida pela carga hidráulica dos pontos no interior do domínio. A curva de rebaixamento analisada no presente estudo é dada pela variação da carga hidráulica, ao longo do tempo, no nó que corresponde o poço.

1.1. Equações governantes

O modelo matemático para a distribuição de cargas que regem o fluxo de água subterrânea, obtido pela lei de Darcy e pelo princípio da conservação de massa em um volume elementar representativo (REV) de um aqüífero é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right]+W\left(x,y,z,t\right)=S_s\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{1.1}$$

sendo h a carga hidráulica $[m]$; K_{xx}, K_{yy} e K_{zz} os componentes principais do tensor da condutividade hidráulica $\left[\frac{m}{s}\right]$; S_s o coeficiente de armazenamento específico $\left[\frac{1}{m}\right]$ e W os termos de fonte ou sumidouros de água dentro do aqüífero $\left[\frac{1}{s}\right]$.

Se considerar desprezíveis as variações de carga ao longo da dimensão vertical, uma vez que a dimensão horizontal dos aqüíferos em escalas regionais pode ser da ordem de dezenas de quilômetros, o fluxo h pode ser modelado pela seguinte equação bidimensional em x e y [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[T_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right]+W\left(x,y,t\right)=S\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{1.2}$$

sendo $T_{xx} = b.K_{xx}$, e $T_{yy} = b.K_{yy}$ $\left[\frac{m^2}{s}\right]$ as transmissividades nas direções x e y do aqüífero confinado de espessura b $[m]$ e $S = S_s.b$ o coeficiente de armazenamento $[adimensional]$. W representa os termos de drenança em $z = 0$ (camada confinante inferior) e em $z = b$ (camada confinante superior) acrescidos da atividade de um poço i na posição (x_i, y_i).

2. Metodologia

2.1. Método de Elementos Finitos

Uma malha de elementos quadriláteros é gerada para representar o domínio correspondente às dimensões horizontais do aqüífero. O Método dos Resíduos Ponderados permite a obtenção de uma solução aproximada $\hat{h}$.

Para cada elemento finito $\Omega^{(e)}$ do domínio discretizado Ω, a carga hidráulica $\hat{h}^{(e)}$ será obtida através da interpolação das cargas nodais $\hat{h}_j^{(e)}$, utilizando as funções de base $\Phi_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)$ em coordenadas locais (ξ, η), cujos vértices (ξ_j, η_j) são $\{(-1,-1), (1,-1), (1,1), (-1,1)\}$. Desta forma, para cada elemento finito:

$$\hat{h}^{(e)} = \sum_{j=0}^{3} \Phi_j \hat{h}_j^{(e)}. \tag{2.1}$$

A contribuição em cada elemento para o resíduo da solução numérica no nó i pode ser obtida, ao considerar na equação (1.2), a formulação integral :

$$\int\limits_{\Omega^{(e)}} \Phi_i \left(S \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T_{xx} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[T_{yy} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial y} \right] - W(x, y, t) \right) d\Omega^{(e)} = 0, \tag{2.2}$$

sendo Φ_i a função de ponderação do resíduo e $\Omega^{(e)}$ um elemento finito da malha inicial.

Substituindo a aproximação (2.1) na equação do resíduo (2.2) e aplicando a *Identidade de Green* nas derivadas de 2ª ordem, a formulação fraca para a equação discreta do fluxo é:

$$S[M] \left\{ \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} \right\} + [K]\{\hat{h}\} = \{F\}, \tag{2.3}$$

sendo $[M] = \int\limits_{\Omega^{(e)}} \Phi_i \Phi_j d\Omega^{(e)}$ a matriz de massa;

$[K] = \int\limits_{\Omega^{(e)}} \nabla \Phi_i \cdot (T \nabla \Phi_j) \, d\Omega^{(e)}$ a matriz de rigidez;

$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & 0 \\ 0 & T_{yy} \end{bmatrix}$ o tensor transmissividade e

$\{F\} = \int\limits_{\Omega^{(e)}} \Phi_i W d\Omega^{(e)} + \int\limits_{\Gamma^{(e)}} \Phi_i \vec{n} \left(T \nabla h_i\right) d\Gamma^{(e)}$ o vetor de cargas nodais[4].

A derivada $\left\{ \dfrac{\partial \hat{h}}{\partial t} \right\}$ da equação (2.3) é aproximada pela expressão $\left(\dfrac{\hat{h}^{t+\Delta t} - \hat{h}^{t}}{\Delta t} \right)$. Considerando $\omega \in [0,1]$ um parâmetro da discretização temporal [2], as seguintes interpolações são obtidas:

$$\{\hat{h}\} = (1-\omega)\{\hat{h}\}^t + \omega\{\hat{h}\}^{t+\Delta t} \text{ e } \{F\} = (1-\omega)\{F\}^t + \omega\{F\}^{t+\Delta t}.$$

A equação discretizada para cada passo de tempo Δt será dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \left(S\,[M] + \omega \Delta t\,[K]\right)\{\hat{h}\}^{t+\Delta t} &= \left(S\,[M] - (1-\omega)\,\Delta t\,[K]\right)\{\hat{h}\}^t \\ &\quad + \Delta t \left((1-\omega)\,\{F\}^t + \omega\{F\}^{t+\Delta t}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Os termos $[M]$ e $[K]$ representam as matrizes globais obtidas pelo *assembly* das matrizes locais dos elementos de uma malha inicial que discretiza o domínio Ω. A solução iterativa (2.4) pode usar o método de *Crank-Nicholson* atribuindo $\omega = \frac{1}{2}$ e usando os valores $\{\hat{h}\}^{t_0}$ fornecidos pelas condições iniciais do problema em $t = t_0$.

Após a imposição das condições de contorno de Dirichlet $\{\hat{h}\} = h_D$, a qual especifica os valores das cargas hidráulicas na fronteira Γ_D, e as condições de contorno de Neumann $\nabla \hat{h} = 0$, para a representação de fluxo nulo nas fronteiras impermeáveis Γ_N do aqüífero confinado[5], a solução da equação (2.4) fornece a solução numérica $\{\hat{h}\}^{t_0+\Delta t}$. De maneira sucessiva, determinam-se as soluções $\{\hat{h}(x_i, y_i)\}$ em cada nó (x_i, y_i) da malha inicial, no *n-ésimo* passo de tempo $t = t_0 + n\Delta t$.

2.2. Gradiente da solução numérica

O gradiente $\nabla \hat{h}$ da solução numérica é usado na análise de erro *a posteriori* dos processos adaptativos que utilizam técnicas de recuperação do gradiente [10].

As funções de interpolação lineares, com os parâmetros das coordenadas locais, relacionam o gradiente em cada elemento finito por:

$$\nabla \hat{h}^{(e)}(x, y) = \left(J^T\right)^{-1} \nabla \hat{h}^{(e)}(\xi, \eta), \tag{2.5}$$

sendo J a matriz jacobiana da mudança de coordenadas.

A malha inicial usada neste trabalho fornece $\left(J^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, e a substituição de (2.1) em (2.5) resulta na expressão $\nabla \hat{h}^{(e)} = \left(J^T\right)^{-1} \sum\limits_{j=0}^{3} \left(\nabla \Phi_j\right) \hat{h}_j^{(e)}$.

Após simples operações matemáticas, obtém-se:

$$\nabla \hat{h}^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\eta)\left(\hat{h}_2^{(e)} - \hat{h}_3^{(e)}\right) + (1-\eta)\left(\hat{h}_1^{(e)} - \hat{h}_0^{(e)}\right) \\ \\ (1+\xi)\left(\hat{h}_2^{(e)} - \hat{h}_1^{(e)}\right) + (1-\xi)\left(\hat{h}_3^{(e)} - \hat{h}_0^{(e)}\right) \end{pmatrix}.$$

[4] $\vec{n}$ é o vetor unitário exterior à fronteira $\Gamma^{(e)} = \partial \Omega^{(e)}$.

[5] $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

Aplicando $(\xi, \eta) = (0, 0)$ em coordenadas locais, o gradiente obtido no centro do elemento $\Omega^{(e)}$ é especificado por

$$\nabla \hat{h}^{(e)}(x_c, y_c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\hat{h}_0^{(e)} + \hat{h}_1^{(e)} + \hat{h}_2^{(e)} - \hat{h}_3^{(e)} \\ \\ -\hat{h}_0^{(e)} - \hat{h}_1^{(e)} + \hat{h}_2^{(e)} + \hat{h}_3^{(e)} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

sendo x_c e y_c, as coordenadas globais do ponto central do elemento finito.

2.3. O pós-processamento do gradiente

O gradiente (2.6) fornece, através da lei de Darcy, o campo de velocidades do fluxo da água subterrânea e, simultaneamente, estabelece uma análise de erros utilizando a técnica de recuperação do gradiente sobre o *patch*[6] de elementos finitos [10]. Este estimador de erro *a posteriori*, conhecido por estimador ZZ, é adequado para a condução de uma estratégia de refinamento adaptativo sobre a malha de elementos finitos para aproximar a solução da equação elíptica (1.2).

O procedimento de recuperação para obter $\bar{\sigma}$ (um gradiente médio sobre o *patch*), utiliza a técnica de suavização dos valores nodais que determina uma média ponderada dos valores $\hat{\sigma} = \nabla \hat{h}^{(e)}$ obtidos de cada elemento adjacente ao nó central do *patch*.

Uma vez que as funções de interpolação nodais dos elementos quadriláteros são lineares, esta técnica de recuperação de *patches* é adequada [5]. E ainda, segue da literatura que o estimador ZZ apresenta aceitáveis níveis de estabilidade e de consistência para vários problemas práticos da engenharia [6]

A vantagem deste método de recuperação situa-se na facilidade da implementação computacional deste estimador para os elementos lineares. No entanto, observa-se que soluções aproximadas, das equações diferenciais parciais de segunda ordem, pelo método *FEM-Galerkin*, tipicamente resultam em derivadas que são descontínuas nos elementos de fronteira. Embora estas descontinuidades possam ser suavizadas pelos valores médios, os gradientes resultantes ainda serão menos precisos nos nós da malha e nos elementos da fronteira. Vários esquemas de projeção local ou global para recuperar o gradiente com precisão adequada tem sido proposto [7]. Porém, estes esquemas ou são sensíveis em relação ao tipo de elemento ou possuem alto grau de dificuldade para serem implementados.

A previsão da distribuição bidimensional de um poluente importa do modelo de água subterrânea a velocidade real determinada pela velocidade aparente dada pela lei de Darcy, pela distribuição da condutividade hidráulica, K_{xx} e K_{yy} e pela distribuição da porosidade efetiva η_{ef}. Em cada elemento finito, assumindo que as coordenadas cartesianas alinham-se com os eixos principais do tensor de condutividades hidráulicas $[K]$, segue que a velocidade real $\vec{v}_r^{(e)}$ é dada pela expressão:

$$\vec{v}_r^{(e)} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{\eta_{ef}} \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{pmatrix} \nabla \hat{h}^{(e)}.$$

[6] *Node-based patch*: Grupo adjacente de elementos associados a um nó particular [1].

A estimativa do parâmetro b da espessura do aqüífero confinado e as relações $T_{xx} = b.K_{xx}$, e $T_{yy} = b.K_{yy}$, fornecem a seguinte expressão para o campo de velocidade real nos elementos da malha:

$$\vec{v}_r^{(e)} = -\frac{1}{b.\eta_{ef}} [T] \nabla \hat{h}^{(e)}, \tag{2.7}$$

sendo $T = \begin{bmatrix} T_{xx} & 0 \\ 0 & T_{yy} \end{bmatrix}$ tensor de transmissividade implementada na matriz de rigidez da equação (2.3).

3. Resultados e Discussão

A implementação JAVA considera um aqüífero confinado, sob condições de fluxo horizontal no domínio bidimensional $\Omega = (1000m) \, \mathrm{x} \, (1000m)$. As condições iniciais impõem $\hat{h}(x, y, 0) = 100m$, para todos os pontos de Ω no tempo $t = 0$, e fixa as condições de Dirichlet $\hat{h}(x_f, y_f, t) = 100m$ em todos os pontos (x_f, y_f) da fronteira $\Gamma_D = \partial\Omega$, com $t \in [0; 150]$ dias (d).

A simulação considera que a camada confinante superior do aqüífero possui $10m$ e está a $50m$ do *datum*, assim, a espessura constante do aqüífero é $b = 50m$. Uma malha inicial de 256 elementos quadriláteros é gerada em torno de um poço totalmente penetrante cujo raio possui valor infinitesimal. A vazão constante é dada por $Q = -100 \ m^3/d$ e $(x_p, y_p) = (500; 500)$ são as coordenadas do poço. Com isto, o termo de extração da equação (1.2) é igual a $W = \begin{cases} -100 \ m/d, \text{ se } x = y = 500 \\ 0 \ m/d, \text{ caso contrário} \end{cases}$.

A ordem de grandeza dos demais parâmetros físicos desta simulação transiente, tais como: a porosidade e o coeficiente de armazenamento, baseou-se na ocorrência de aqüíferos confinados, citados no Relatório de Qualidade das Águas Subterrâneas do Estado de São Paulo 2001-2003 [3]. Neste relatório, identificam-se os seguintes valores para as componentes do tensor transmitividade: $Txx = Tyy = 10^{-3} m^2/s$.

A distribuição das cargas hidráulicas, obtidas pela solução iterativa (2.4) nos nós de cada elemento compõe o gradiente hidráulico no centro do elemento finito, conforme estipulado na equação (2.6) para todos os 150 passos da simulação.

Para os nós eqüidistantes à coordenada (x_p, y_p), o modelo identificou o mesmo valor de carga hidráulica, ou seja, a solução numérica encontrada sob condições isotrópicas e homogêneas é um solução radial para cada passo de tempo. E além disso, de acordo com o quadro 1, apresentou uma boa concordância com a solução analítica de Theis [9]. Esta solução analítica considera um poço de raio $r = 3,14m$, valor freqüentemente utilizado na literatura.

A geometria da malha inicial situa a singularidade (x_p, y_p) no nó 144, que é o nó comum aos elementos $119, 120, 135$ e 136 (*patch* do nó 144). Os nós do quadro 1 são os contidos no corte transversal do domínio bidimensional $\Omega = (1000m) \, \mathrm{x} \, (1000m)$ que contém a singularidade. O quadro 01 mostra que, além da boa concordância com a solução analítica, a solução numérica suaviza o valor da carga hidráulica na singularidade. E esta adequação às situações físicas foi observada em todos os 150 passos de tempo da simulação, pois a solução de Theis não converge para o regime permanente num número finito de $t = t_0 + n\Delta t$.

Quadro 1 - Comparação da solução aproximada obtida na implementação JAVA com a solução analítica de Theis em $t = 2$, $t = 15$ e $t = 45$ $dias$.

	t = 2d		t = 15d		t = 45d	
Nó	JAVA [m]	Theis	JAVA [m]	Theis	JAVA [m]	Theis
136	100,00	100,00	100,00	99,463	100,00	98,782
137	99,996	99,999	99,760	99,315	99,738	98,593
138	99,989	99,995	99,504	99,129	99,461	98,370
139	99,973	99,979	99,216	98,890	99,153	98,098
140	99,934	99,927	98,870	98,579	98,790	97,758
141	99,837	99,785	98,428	98,156	98,334	97,312
142	99,565	99,428	97,803	97,536	97,698	96,675
143	98,912	98,532	96,862	96,448	96,750	95,577
144	94,030	90,183	93,234	88,028	93,120	87,154
145	98,912	98,532	96,862	96,448	96,750	95,577
146	99,565	99,428	97,803	97,536	97,698	96,675
147	99,837	99,785	98,428	98,156	98,334	97,312
148	99,934	99,927	98,870	98,579	98,790	97,758
149	99,973	99,979	99,216	98,890	99,153	98,098
150	99,989	99,995	99,504	99,129	99,461	98,370
151	99,996	99,999	99,760	99,315	99,738	98,593
152	100,00	100,00	100,00	99,463	100,00	98,782

A característica radial da carga hidráulica foi herdada para o gradiente hidráulico, conforme o quadro 2. Este gradiente ainda apresenta amplitude decrescente na direção da singularidade para os nós da fronteira. Isto significa que a velocidade do fluxo aumenta à medida que a água subterrânea atravessa os elementos mais próximos à fonte de extração constante.

Resultados numéricos mostraram que o sentido do vetor deslocamento no movimento da água subterrânea, obtido em cada elemento da malha, é do centro do elemento em direção à singularidade (poço). Esta abstração refere-se apenas a uma tendência, pois o movimento dispersivo da água, por ocorrer em meio poroso, encontrará as suas barreiras naturais. Ao realizar alterações com aumento ou diminuição na vazão do poço, o modelo respondeu com valores diretamente proporcionais para as velocidades reais em todos os elementos da malha.

O quadro 2 apresenta, além dos valores dos gradientes hidráulicos, a respectiva intensidade no centro dos elementos quadriláteros próximos ao *patch* do nó 144 no tempo $60d$.

A simulação mostrou que, após 45 passos da solução iterativa (2.4), o valor da carga hidráulica estabiliza (p. ex., $h = 93,120m$ em (x_p, y_p)), ou seja, o modelo computacional identificou o equilíbrio entre a vazão constante do poço e a recarga atribuída pela condição de contorno de Dirichlet. Assim, nos passos de tempo seguintes o regime passou a ser permanente.

Quadro 2 - Característica radial do gradiente da solução aproximada FEM nos elementos próximos à singularidade.

elem.165: (-0,34;0,34) valor 0,48	elem.166: (-0,28;0,49) valor 0,56	elem.167: (-0,12;0,61) valor 0,62	elem.168: (0,12;0,61) valor 0,62	elem.169: (0,28;0,49) valor 0,56	elem.170: (0,34;0,34) valor 0,48
elem.149: (-0,49;0,28) valor 0,56	elem.150: (-0,62;0,62) valor 0,88	elem.151: (-0,20;0,93) valor 0,95	elem.152: (0,20;0,93) valor 0,95	elem.153: (0,62;0,62) valor 0,88	elem.154: (0,49;0,28) valor 0,56
elem.133: (-0,61;0,12) valor 0,62	elem.134: (-0,93;0,20) valor 0,95	elem.135: (-1,99;1,99) valor 2,82	elem.136: (-1,99;1,99) valor 2,82	elem.137: (-0,93;0,20) valor 0,95	elem.167: (0,61;0,12) valor 0,62
elem.117: (-0,61;-0,12) valor 0,62	elem.118: (-0,93;-0,20) valor 0,95	elem.119: (-1,99;-1,99) valor 2,82	elem.120 (1,99;1,99) valor 2,82	elem.121: (0,93;-0,20) valor 0,95	elem.122: (0,61;-0,12) valor 0,62
elem.101: (-0,49;-0,28) valor 0,56	elem.102: (-0,62;-0,62) valor 0,88	elem.103: (-0,20;-0,93) valor 0,95	elem.104: (0,20;-0,93) valor 0,95	elem.105: (0,62;-0,62) valor 0,88	elem.166: (0,49;-0,28) valor 0,56
elem.85: (-0,34;-0,34) valor 0,48	elem.86: (-0,28;-0,49) valor 0,56	elem.87: (-0,12;-0,61) valor 0,62	elem.88: (0,12;-0,61) valor 0,62	elem.89: (0,28;-0,49) valor 0,56	elem.90: (0,34;-0,34) valor 0,48

A análise de erro realizada pela técnica de reconstrução do gradiente [10] está apresentada na tabela 1:

Tabela 1 - Análise de erro *a posteriori* da equação do fluxo subterrâneo.

Estimador	tempo 2.0	tempo 15.0	tempo 45.0
Erro Global	0,0391	0,0590	0,0609
Erro Relativo	0,0002	0,0002	0,0002
Soma Total	0,3286	0,7797	0,8187
Erro Máximo	0,0087 (elem. 119)	0,0099 (elem. 119)	0,0100 (elem. 119)
Erro Mínimo	0,0000 (elem. 0)	0,0004 (elem. 0)	0,0004 (elem. 0)

O estimador de erro *a posteriori* capturou adequadamente a singularidade identificando o elemento que apresentou o maior erro no domínio discretizado. O erro global apresentou uma leve evolução devido à contribuição do erro temporal, no entanto, o erro relativo permaneceu constante. Estas caraterísticas apresentadas pelo estimador de erro direcionam a estratégia de refinamento adaptativo sobre a malha de elementos finitos.

4. Conclusão

É obtido a solução numérica do modelo matemático que descreve a distribuição das cargas hidráulicas de um aqüífero confinado. A solução aproximada para a curva de rebaixamento em regime transiente convergiu para a solução em regime permanente. O gradiente hidráulico proveniente do pós-processamento da implementação JAVA, além de descrever o campo de velocidades, estabeleceu um estimador de erro *a posteriori* baseado nas técnicas de recuperação do gradiente. As simulações demonstraram que este estimador de erro foi capaz de capturar a singularidade do domínio discretizado. Assim, é adequado para conduzir uma estratégia de refinamento adaptativo para a equação do fluxo subterrâneo.

Abstract The determination of the flow in aquifers is essential for manage of groundwater and the evaluation of the contaminant transport. This work presents a solution for the equation of flow in confined aquifers with the implementation of the method of finite elements in language Java. The solution consists in the approach of the equation of Poisson valid in irregular domain, with medium heterogeneous and anisotropic. In this work was implemented an error estimator in agreement with the technique proposed for Zienkiewicz and Zhu. This error estimator, based on the post-processing of the hydraulic gradient, it was able of to identify the patch that contains the singularity. The distribution of hydraulic head was compared with analytical solutions of the literature. The model of flow yielded a good agreement of the flow in transient regime. The solution for the potentiometric curve converged for the solution in permanent regime.

Referências

[1] J.E. Akin, "Finite Element Analysis with Error Estimation", Butterworth-Heinemann Elsevier Ltd, 2005.

[2] J. Bear, "Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport", Haifa, Israel, 2001.

[3] CETESB, "Relatório de Qualidade de Águas Subterrâneas do estado de São Paulo, Secretaria do Estado do Meio Ambiente", Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, 2004.

[4] R.W. Cleary, "Águas Subterrâneas", ed ABRH, Porto Alegre RS, 2007.

[5] A. Nagórka, N. Sczygiol, Implementation Aspects of a Recovery-Based Error Estimator in Finite Element Analysis, *Parallel Processing and Applied Mathematics*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 3019/2004, pp 722-729, Springer Berlin, 2004.

[6] D.M. Hawken , P. Townsend, M.F. Webster, A comparison of gradient recovery methods in finite element calculations, *Communications in Applied Numerical Methods*, **7** (1991), 195-204.

[7] B.O. Heimsund, X.C. Tai, J. Wang, Superconvergence for the gradient of finite element approximations by L2-projections, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, No. 4 (2002), 1263–1280.

[8] T.C. Lee, "Applied Mathematics in Hydrogeology", CRC Press, 1999.

[9] SUTRA, "A Model for Saturated-Unsaturated Variable-density Groundwater Flow with Solute or Energy Transport", *Water-Resources Investigations Report* **02**–4231, 2003.

[10] O.C. Zienkiewicz, The background of error estimation and adaptivity in finite element computations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **195** (2006), 207–213.