

## Coloração Total Absolutamente Equilibrada em uma Família de Grafos Regulares

ANGELO SANTOS SIQUEIRA<sup>1</sup>, ABEL RODOLFO GARCÍA LOZANO<sup>2</sup>,  
SERGIO RICARDO PEREIRA DE MATTOS<sup>3\*</sup> e JHOAB NEGREIROS<sup>3</sup>

Recebido em 10 de dezembro de 2018 / Aceito em 30 de setembro de 2020

**RESUMO.** Neste trabalho introduzimos os conceitos de coloração total absolutamente equilibrada e composição de grafos. Provamos que para  $n, k \in \mathbb{N}$ , se  $(k+1)|n$ , existe um grafo  $k$ -regular conexo com  $n$  vértices que admite uma coloração total absolutamente equilibrada com no máximo  $\Delta+2$  cores. Esse resultado mostra que existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que possibilita a construção de uma família de grafos regulares, denominados grafos harmônicos. Em seguida, mostramos que todo grafo harmônico de grau  $k$  pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau  $k$ . Finalizamos, provando que os grafos harmônicos não possuem vértice de corte, fato que implica que todo grafo desta família possui conectividade de vértices  $\kappa(G) \geq 2$ .

**Palavras-chave:** grafos harmônicos, composição de grafos, conectividade de vértices.

### 1 INTRODUÇÃO

Em 2011, Friedmann et al [3] mostraram que se um grafo  $G(V, E)$  possui uma coloração de vértices com folga de ordem  $\Delta$  com  $t$  cores, então essa coloração pode ser estendida para uma coloração total de  $G$  com no máximo  $t+1$  cores. Posteriormente, Lozano et al. [8] provaram que se um grafo regular admite uma coloração com folga de ordem  $\Delta$  com  $\Delta+1$  cores, então a coloração de vértices pode ser completada para uma coloração total equilibrada com no máximo  $\Delta+2$  cores. Em 2016, Lozano, Siqueira e Mattos [5] apresentaram uma heurística, baseada no conceito de famílias consistentes, para coloração total de grafos, que satisfaz a conjectura

---

\*Corresponding author: Sergio Ricardo Pereira de Mattos – E-mail: rickdemattos@unigranrio.edu.br

<sup>1</sup>Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática. Unigranrio, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional – E-mail: abel.garcia.lozano@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-7607-5928>

<sup>2</sup>Unigranrio, Curso de Matemática, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional – E-mail: rickdemattos@gmail.com <https://orcid.org/0000-0003-2156-4772>

<sup>3</sup>Unigranrio, Programa de Pós-Graduação em Humanidades, Culturas e Artes, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional – E-mail: asiqueira@unigranrio.edu.br <https://orcid.org/0000-0001-6713-4570>

<sup>4</sup>Unigranrio, Curso de Matemática, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional – E-mail: jhoabnegreiros@gmail.com <https://orcid.org/0000-0001-9628-6688>

de Vizing-Behzad. O objetivo geral do presente trabalho é apresentar duas formas distintas de se obter famílias de grafos regulares que admitem coloração total absolutamente equilibrada, e apresentar uma importante propriedade desta família de grafos.

Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente revisamos conceitos básicos de grafos e coloração, e apresentamos alguns resultados referentes à coloração de vértice com folga de ordem  $\Delta$  que garantem uma extensão natural para coloração total com no máximo  $\Delta + 2$  cores, que no caso dos grafos regulares é absolutamente equilibrada [3, 8]. Em seguida, mostramos como construir a família dos grafos harmônicos sem utilizar o conceito de produto funcional de grafos [10]. Finalizamos, apresentando um resultado relacionado ao invariante conectividade, mostrando que os grafos harmônicos possuem conectividade de vértices  $\kappa(G) \geq 2$ .

## 2 CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção, apresentamos definições básicas e terminologias da teoria dos grafos utilizadas no decorrer do trabalho, e que podem ser encontradas em [1, 2].

Um **grafo simples**  $G(V, E)$  é uma estrutura composta por um conjunto  $V$  de **vértices** e um conjunto  $E$  de **arestas**, tais que  $V$  é finito não vazio e  $E$  é formado por subconjuntos de dois elementos de  $V$ . Representamos, respectivamente, por  $|V|$  ou  $n$  e por  $|E|$  ou  $m$ , os números de vértices e arestas de um grafo. Dados  $u$  e  $v$ , vértices quaisquer de  $G(V, E)$  se existir a aresta  $\{u, v\}$ , escreveremos  $uv$ . Se  $\{u, v\} \in E(G)$ , então dizemos que a aresta é incidente a  $u$  e  $v$ , que  $u$  e  $v$  são adjacentes, e que  $u$  é vizinho de  $v$ . Para cada vértice  $v$ , o número de arestas incidentes em  $v$  é dito **grau do vértice** e é representado por  $d(v)$ . O conjunto de vizinhos de um vértice  $v$  de  $G$  é denotado por  $N_G(v)$  ou simplesmente  $N(v)$ . O número  $\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V\}$  é o grau máximo de  $G$ . Se todos os vértices de um grafo  $G$  tem o mesmo grau  $k$ , então  $G$  é **k-regular** ou simplesmente **regular**. Se um grafo  $G$  com  $n$  vértices é **(n-1)-regular**, então ele é denominado **grafo completo de ordem n** e denotado por  $K_n$ . Um **caminho** em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não nula  $S = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$  cujos os termos são alternativamente vértices e arestas, tais que os extremos de  $e_i$  são  $v_{i-1}$  e  $v_i$ , com  $i = 1 \dots k$ , e nenhum elemento de  $S$  se repete.

Dados dois grafos  $G(V, E)$  e  $G'(V', E')$ , dizemos que  $G'$  é subgrafo induzido de  $G$ , se  $V' \subset V$  e para todo par de vértices  $u, v \in V'$  tem-se que  $uv \in E'$ , se e somente se  $uv \in E$ . Um grafo  $G(V, E)$  é dito **conexo** se para todo par de vértices  $x, y \in V$ , existe um caminho que liga  $x$  e  $y$ , caso contrário, dizemos que  $G$  é **desconexo**. Se para cada par de vértices  $x, y \in V$ , existem pelo menos  $k$  caminhos disjuntos ligando  $x$  com  $y$ , então  $G(V, E)$  é dito **k-conexo**. Uma **componente conexa** de um grafo é qualquer subgrafo induzido conexo. Um vértice  $v$  em um grafo conexo é um **vértice de corte**, se ao removê-lo o grafo torna-se desconexo.

## 3 COLORAÇÃO EM GRAFOS

Nesta seção, apresentamos as definições de coloração de vértices, de arestas, coloração com folga, coloração total e introduzimos o conceito de coloração total absolutamente equilibrada, que servirão de suporte para o restante do trabalho. Estes conceitos, assim como propriedades

e resultados referentes a essas colorações, podem se encontrados com maior profundidade e detalhamento em [3, 9, 11, 12].

A **coloração** é um problema clássico em teoria dos grafos. Dado um grafo  $G(V, E)$ , e um conjunto  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , uma coloração de  $G$  com os elementos de  $C$  é uma aplicação  $c : A \subset (V \cup E) \rightarrow C$ , tal que dois elementos adjacentes ou incidentes de  $A$  possuem sempre imagens distintas. Se  $A = V$  é dita **coloração de vértices**, se  $A = E$  é dita **coloração de arestas** e se  $A = (V \cup E)$  é dita **coloração total**.

Uma coloração de  $G(V, E)$  com as cores de  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  é **equilibrada** se, para todo par de cores  $c_i$  e  $c_j$ , tal que  $i \neq j$ , tem-se  $|a(c_i) - a(c_j)| \leq 1$  com  $i, j = 1, \dots, k$  e  $a(c_i)$  e  $a(c_j)$  representam, respectivamente, os números de aparições das cores  $c_i$  e  $c_j$  na coloração.

**Definição 3.1.** Dado um grafo  $G(V, E)$ , um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e uma coloração  $c : S \subseteq (E \cup V) \rightarrow C$  de  $G$ . A coloração  $c$  é **absolutamente equilibrada** se, para todo par de cores tal que  $i \neq j$ , tem-se  $a(c_i) = a(c_j)$ .

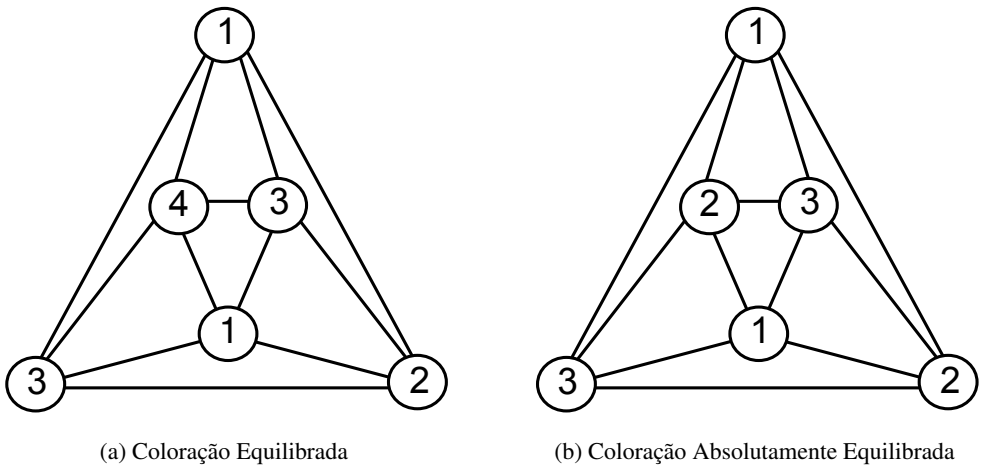


Figura 1

**Definição 3.2.** Seja um grafo  $G(V, E)$  e um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_p\}$  com  $p \in \mathbb{N}$ , seja ainda  $|c(N(v))|$  a cardinalidade do conjunto de cores da vizinhança de  $v$ , uma aplicação  $f : V \rightarrow C$  é uma **coloração de vértices com folga de ordem  $k$**  de  $G$  se para todo  $v \in V$ :

- se  $d(v) < k$ , então  $|c(N(v))| = d(v)$ ;
- se  $d(v) \geq k$ , então  $|c(N(v))| \geq k$ .

Observe que na coloração de vértices com folga de ordem  $k$ , os vértices com grau menor que a  $k$  devem ter todos os vizinhos coloridos com cores distintas; já os de grau igual ou maior do que  $k$

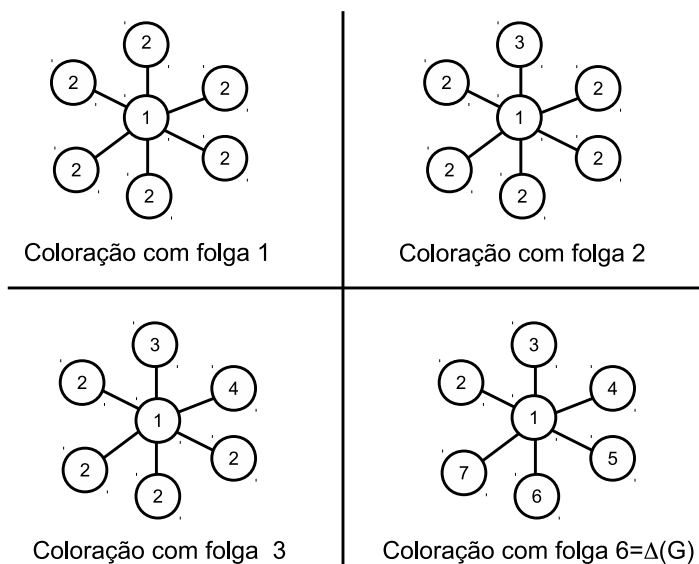


Figura 2: Coloração com folga de ordem 1, 2, 3 e  $6 = \Delta(G)$ , respectivamente.

devem utilizar pelo menos  $k$  cores na coloração de sua vizinhança. Para  $k = 1$ , temos a coloração usual de vértices e para  $k = \Delta$  temos a coloração 2-distante [9].

#### 4 RELAÇÃO ENTRE COLORAÇÃO COM FOLGA E COLORAÇÃO TOTAL ABSOLUTAMENTE EQUILIBRADA EM GRAFOS REGULARES

Nesta seção, apresentamos três teoremas que têm como objetivo mostrar que se um grafo regular pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, então existe uma extensão da coloração com no máximo  $\Delta + 2$  cores e essa extensão é absolutamente equilibrada. Esses resultados podem ser encontrados em [3, 8].

**Teorema 4.1.** [8] *Sejam  $G(V, E)$  um grafo regular e  $c : V \rightarrow C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$  uma coloração com folga de ordem  $\Delta$ . Então:*

- (a)  $\Delta + 1$  divide  $|V|$ ;
- (b) Cada cor  $i \in C$ , é usada exatamente  $\frac{|V|}{\Delta + 1}$  vezes.

**Teorema 4.2.** [3] *Sejam  $G(V, E)$  um grafo com grau máximo  $\Delta$  e  $c : V \rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ , uma coloração com folga de ordem  $\Delta$  de  $G$ . Então, existe uma coloração total de  $G$  com no máximo  $k + 1$  cores.*

**Teorema 4.3.** [8] *Sejam  $G(V, E)$  um grafo regular e  $c : V \rightarrow C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$  uma coloração com folga de ordem  $\Delta$ . Então, existe uma coloração total absolutamente equilibrada de  $G$  com no máximo  $\Delta + 2$  cores.*

## 5 GRAFOS HARMÔNICOS

Em 2013, Lozano et al. [4] introduziram o conceito de produto funcional de grafos e de grafos  $k$ -suporte para auxiliar na construção dos grafos harmônicos. Mais tarde, Lozano et al. [6] mostraram que o produto funcional permite gerar infinitos grafos harmônicos, a partir de qualquer grafo regular. Nesta seção, apresentamos uma forma de se obter os grafos harmônicos sem utilizar o produto funcional de grafos [10], mostramos que existe uma relação entre a regularidade e número de vértices do grafo que possibilita a construção dos grafos harmônicos. Em seguida, provamos que todo grafo harmônico de grau  $k$  pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau  $k$ . Finalizamos, provando que os grafos harmônicos não possuem vértices de corte.

**Definição 5.3.** [8] *Um grafo  $G(V, E)$  regular é dito **harmônico**, se admite uma coloração de vértices com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores.*

**Teorema 5.4.** [10] *Sejam  $n$  e  $k \in \mathbb{N}$ , se  $(k + 1) | n$ , então existe um grafo conexo harmônico  $k$ -regular com  $n$  vértices.*

**Proof.** Sejam  $n, k$  e  $t \in \mathbb{N}$  tais que  $n = t \cdot (k + 1)$ , se  $t = 1$ , então o grafo  $K_n$  é o grafo procurado. Caso contrário, vamos construir o grafo  $G(V, E)$  como se segue:

Seja  $V = \{v_{10}, \dots, v_{1k}, v_{20}, \dots, v_{2k}, \dots, v_{t0}, \dots, v_{tk}\}$ . Definimos o conjunto  $E$  de arestas da seguinte forma:

Dois vértices  $v_{ij}$  e  $v_{i'j'}$ , com  $i, i' \in \{1, 2, \dots, t\}$  e  $j, j' \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ , são adjacentes quando:

- Para  $i = i'$ , se  $j = 0$ , então  $j' \neq 1$ ;
- Para  $i' = i + 1 \pmod{t}$ , se  $j = 0$ , então  $j' = 1$ .

A cada vértice  $v_{ij}$ , damos a cor  $j$  do conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ . O resultado é uma coloração com folga  $\Delta(G)$  que utiliza  $\Delta + 1$  cores. Logo, o grafo  $G$  é harmônico. □

As figuras 3, 4, 5 e 6 ilustram a prova do Teorema 5.4. Para exemplificar, adotamos  $n = 15$ ,  $k = 4$  e  $t = 3$ .

Observe que todo grafo harmônico, por definição, satisfaz o Teorema 4.1. Nesse sentido, o resultado oferece uma condição necessária para existência dessa família de grafos regulares. Na sequência, introduzimos o conceito de **grafo composto** e apresentamos um resultado que mostra que todo grafo harmônico de grau  $k$  pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau  $k$ .

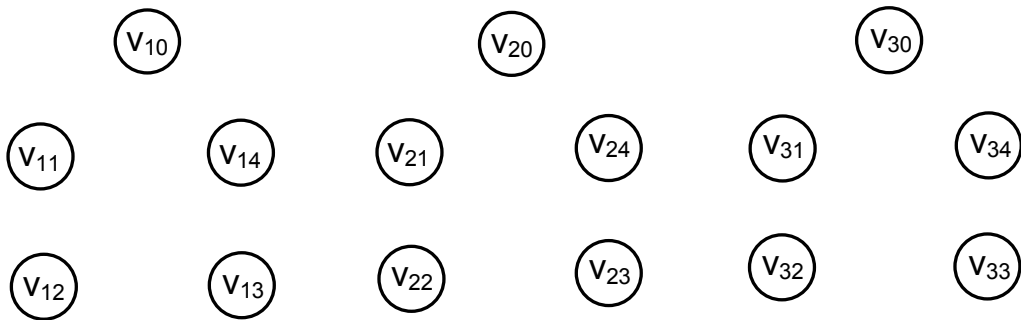


Figura 3: Conjunto de Vértices  $V = \{v_{10}, \dots, v_{14}, v_{20}, \dots, v_{24}, \dots, v_{30}, \dots, v_{34}\}$ .

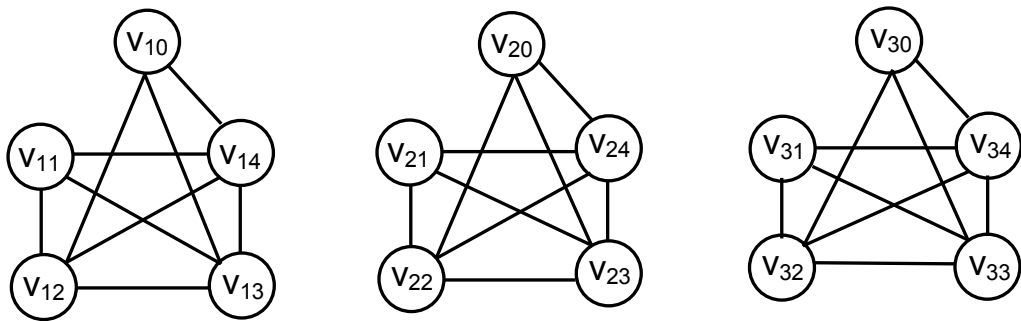


Figura 4: Conjunto de arestas de  $G(V, E)$ , de acordo com a primeira condição.

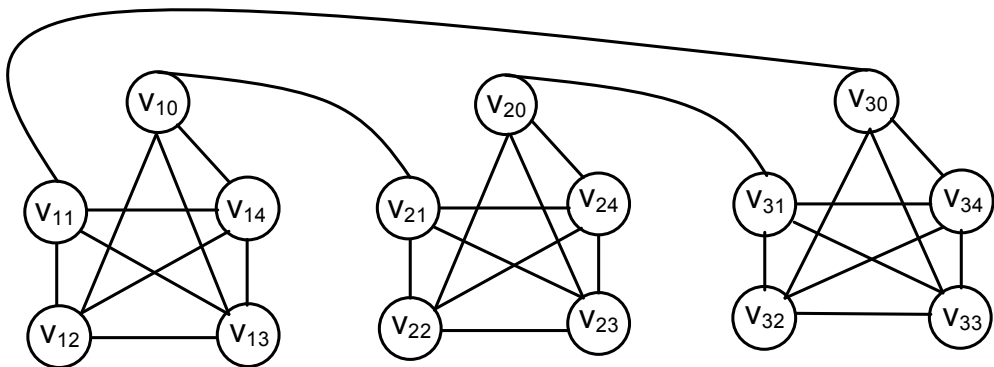


Figura 5: Conjunto de arestas de  $G(V, E)$ , de acordo com a primeira e a segunda condições.

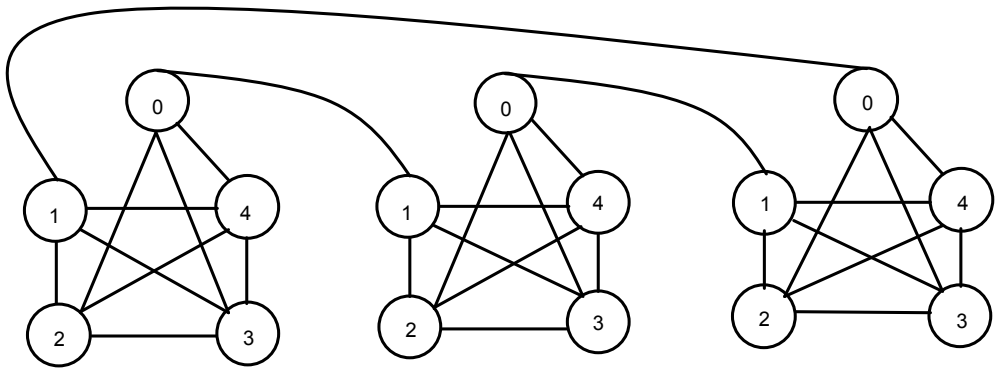


Figura 6: Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores.

**Definição 5.4.** *Dados dois grafos harmônicos  $k$ -regulares  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$ , duas colorações com folga  $c_1 : V_1 \rightarrow C = \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$  e  $c_2 : V_2 \rightarrow C = \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$  e dois subconjuntos de arestas  $S_1 = \{u_1v_1, \dots, u_kv_k\} \subset E_1$  e  $S_2 = \{x_1y_1, \dots, x_ky_k\} \subset E_2$ , tais que  $c_1(u_i) = c_2(x_i)$  e  $c_1(v_i) = c_2(y_i)$ . O grafo  $G(V, E)$ , tal que  $V = (V_1 \cup V_2)$  e  $ab \in E$  se, somente se, uma das seguintes afirmações for verdadeira:*

1.  $ab \in E_1$  e  $ab \notin E_2$  ou  $ab \in E_2$  e  $ab \notin E_1$ ;
2.  $a = u_i$  e  $b = y_i$  ou  $a = x_i$  e  $b = v_i$  para algum  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

*é chamado grafo composto por  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$ .*

**Teorema 5.5.** *Para todo grafo harmônico  $G(V, E)$  não completo, existem dois grafos harmônicos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  (não necessariamente conexos), tais que  $G$  é composto por  $G_1$  e  $G_2$ .*

**Proof.** Seja  $c : V \rightarrow C = \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$  uma coloração de  $G$  com folga  $\Delta$ . Sejam  $V_1 = \{v_0, v_1, \dots, v_\Delta\}$  um subconjunto de vértices, tal que  $c(v_i) \neq c(v_j)$  para todo  $i, j \in C = \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $c(v_i) = i$ ;  $i = \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$ . Seja  $G_1(V_1, E_1)$  o grafo induzido por  $V_1$  e seja  $G_2(V_2, E_2)$  o grafo induzido por  $V - V_1$ . Escolhemos um par de vértices  $v_i, v_j \in V_1$ , tal que  $v_iv_j \notin E_1$ . Como o grafo  $G(V, E)$  é harmônico, existe um emparelhamento que satura os vértices com as cores  $i, j \in C$  e existem vértices  $x, y \in E_2$ , tais que  $c(x) = j$ ,  $c(y) = i$  e  $v_ix \in E$ ,  $v_jy \in E$ . Agora incorporamos uma aresta em  $E_1$  e outra em  $E_2$  da seguinte forma:  $E_1 \rightarrow E_1 \cup \{v_iv_j\}$  e  $E_2 \rightarrow E_2 \cup \{xy\}$ . Repetimos esse processo até que  $G_1$  seja um grafo completo. Logo, por construção  $G_1$  e  $G_2$  são os grafos procurados.  $\square$

Do Teorema 5.5 se obtém, de forma imediata, o seguinte colorário.

**Corolário 5.5.1.** *Todo grafo harmônico de grau  $k$  pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau  $k$ .*

Vale destacar que os grafos harmônicos apresentam propriedades relacionadas ao invariante conectividade que favorecem sua aplicação em sistemas computacionais multiagentes [7]. O próximo Teorema prova que os grafos harmônicos não possuem vértices de corte, tem como consequência que todo grafo harmônico possui conectividade de vértices  $\kappa(G) \geq 2$ .

**Teorema 5.6.** *Os grafos harmônicos não possuem vértices de corte.*

**Proof.** Sejam  $G(V, E)$  um grafo harmônico e  $c : V \rightarrow C = \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$  uma coloração com folga  $\Delta$  dos vértices de  $G$ . Suponhamos por absurdo que  $G$  possui um vértice de corte  $u \in V$  e sem perder a generalidade suponhamos que o vértice  $u$  foi colorido com a cor 0. Seja  $G'(V', E')$  uma das componentes conexas obtidas ao se retirar  $u$  do grafo  $G$ . Observe que as cores de  $C - \{0\} = \{1, 2, \dots, \Delta\}$  são usadas o mesmo número de vezes em  $G'$ , pois em uma coloração com folga  $\Delta$  todos os vértices adjacentes são coloridos com cores distintas, logo dadas duas cores arbitrárias  $i \in C - \{0\}$  e  $j \in C - \{0\}$  todo vértice de  $V'$  com a cor  $i$  possui um e somente um vizinho com a cor  $j$ . Denotemos por  $V'_i$  o conjunto de vértices de  $G'$  coloridos com a cor  $i \in C$ , seja  $q = |V'_i|$ ,  $i \in C - \{0\}$  se  $|V'_0| = q$ , então todos os vértices de  $V'$  coloridos com cor diferente de 0 têm um vizinho em  $V'_0$ , logo nenhum deles pode ser vizinho de  $u$ , o que é um absurdo. Se  $|V'_0| < q$ , então existem pelo menos  $\Delta$  vértices de  $G'$  com cor diferente de 0 que não possuem vizinho em  $V'_0$ . Mas o número de vizinhos de  $u$  em  $G'$  é menor que  $\Delta$ , logo existem vértices de  $V'$  com cor diferente de 0 que não tem vizinho com a cor 0, o que é um absurdo.  $\square$

Desse resultado se obtém o seguinte colorário.

**Corolário 5.6.2.** *Sejam  $u, v \in V$  dois vértices quaisquer de  $G(V, E)$ , se  $G$  é um grafo harmônico, então existe um ciclo em  $G$  que contém  $u$  e  $v$ .*

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, introduzimos os conceitos de coloração total absolutamente equilibrada e composição de grafos. Mostramos que existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que possibilita a construção de uma família de grafos regulares, denominada grafos harmônicos. Provamos que todo grafo harmônico de grau  $k$  pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau  $k$ . Por fim, mostramos que os grafos harmônicos não possuem vértice de corte e obtemos como consequência desse resultado o fato de que todo grafo harmônico possui conectividade de vértices  $\kappa(G) \geq 2$ .

**ABSTRACT.** In this work we introduce the concepts of absolute equitable total coloring and graph composition. We prove that for  $n, k \in \mathbb{N}$ , if  $(k + 1) | n$ , there is a connected  $k$ -regular graph with  $n$  vertices that admits a absolute equitable total coloring, with at most  $\Delta + 2$  colors. This result shows that there is a relationship between regularity and the number of vertices of the graph that makes it possible to build a family of regular graphs, called harmonic graphs. Then, we show that every harmonic graph of degree  $k$  can be obtained as successive composition of complete graphs of degree  $k$ . We conclude by proving that



the harmonic graphs do not have a cut vertex, that implies that every graph of this family has vertex connectivity  $\kappa(G) \geq 2$ .

**Keywords:** harmonic graphs, graph composition, vertex connectivity.

## REFERÊNCIAS

- [1] J. Bondy & U. Murty. “Graph Theory with Applications”. North-Holland, New York (1976).
- [2] R. Diestel. “Graph Theory”. Springer-Verlag, New York (1997).
- [3] C. V. P. Friedmann, A. R. G. Lozano, L. Markenzon & C. F. E. M. Waga. Total coloring of Block-cactus graphs. *The journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, **78** (2011) 273–283.
- [4] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, S. Jurkiewicz & C.V.P. Friedmann. Produto Funcional de Grafos. *TEMA*, **14** (2013), 221–232.
- [5] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira & S. R. P. Mattos. Famílias Consistentes e a Coloração Total de Grafos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 5 (2017). DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0230.
- [6] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, S. R. P. Mattos & S. Jurkiewicz. Produto funcional de grafos: um modelo para conexão de sistemas multiagentes. *TEMA*, **17** (2016), 341–352.
- [7] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira & S. R. P. Mattos. Functional Product of Graphs and Multiagent Systems. *Global Journal of Science Frontier Research: Mathematics and Decision Sciences*, **17** (2017), 15–28.
- [8] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, C. V. P. Friedmann & S. Jurkiewicz. Relationship between equitable total coloring and range coloring in some regular graphs. *Pesquisa Operacional*, **28** (2016), 161–171.
- [9] A. R. G. Lozano, C. V. P. Friedmann, C. F. E. M. Waga & L. Markenzon. Coloração de Vértices com Folga. *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (XLI SBPO)*, Porto Seguro, Bahia, Brasil (2009).
- [10] S. R. P. Mattos. “Produto Funcional de Grafos: Propriedades e Aplicações”. Tese de Doutorado. COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, (2017).
- [11] A. S. Siqueira. “Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares”. Tese de Doutorado. COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ (2011).
- [12] H. Yap. “Total colourings of graphs”. Springer, Berlin (1996).

