

Controle Ótimo \mathcal{H}_∞ com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos usando LMI

R.A.T. MENDES¹, E. ASSUNÇÃO², M.C.M. TEIXEIRA³, Departamento de Engenharia Elétrica, UNESP, 15385-000 Ilha Solteira, SP, Brasil.

C.Q. ANDREA⁴, Departamento de Engenharia Elétrica, UFMS, 79074-460 Campo Grande, MS, Brasil.

Resumo. Neste estudo é proposta uma metodologia de alocação de zeros para solucionar o problema do rastreamento do sinal de referência em sistemas discretos considerando-se uma entrada de perturbação na planta. Em um primeiro momento é projetado um controlador discreto para minimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada exógena e o sinal de saída com o objetivo de reduzir o efeito da perturbação na saída do sistema. Posteriormente, minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o erro através da alocação de zeros do sistema discreto, constituindo desta maneira o rastreador de sinal de referência. A formulação do projeto é descrita na forma de Inequações Matriciais Lineares, pois estas permitem a descrição de problemas de otimização convexa. Por fim, é apresentado um exemplo numérico que demonstra a viabilidade da metodologia proposta. Na^+

Palavras-chave. Modificação dos Zeros, Sistemas de Controle Discretos, Rastreamento, LMIs.

1. Introdução

Pode-se encontrar apenas uma pequena quantidade de textos que abordam o assunto alocação de zeros em sistemas de controle discreto. Em [5] a alocação de pólos de malha fechada em sistemas discretos é alcançada a partir de uma técnica de projeto de controle que faz uso das taxas de amostragem para componentes de estado, entrada e saída. Ainda, em [15] a alocação de pólos discretos em sistemas de controle é realizada em uma região do plano Z especificada em projeto preservando a otimalidade do controlador \mathcal{H}_2 de realimentação. Dentre os poucos textos que abordam alocação de zeros em sistemas discretos tem-se [16], onde os zeros arbitrários são alocados para o projeto de controladores adaptativos discretos. Também, em [12] são alocados zeros na dinâmica de um compensador para se

¹renatoatm@aluno.feis.unesp.br.

²edvaldo@dee.feis.unesp.br

³marcelo@dee.feis.unesp.br

⁴cristiano@batlab.ufms.br

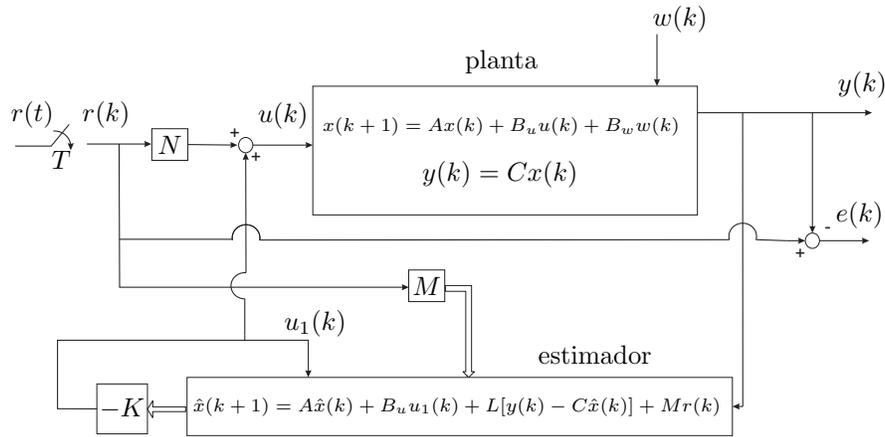


Figura 1: Sistema de controle ótimo discreto no tempo com posicionamento de pólos e zeros.

manter uma classe de dinâmicas não modeladas mediante o cancelamento de todas as harmônicas de um distúrbio periódico acima da frequência de Nyquist formando o projeto de controladores repetitivos discretos.

Em [3] é proposto um método analítico para a solução do problema do rastreamento e rejeição de distúrbios em sistemas discretos.

Em [1] é proposta uma metodologia de modificação de zeros para resolver o problema do rastreamento de sinal de controle em sistemas contínuos considerando-se ainda a existência de um sinal de entrada exógena de perturbação ou ruído na planta. A mesma metodologia é proposta em [2], porém faz uso de alocação de pólos e de uma formulação matemática mais simples.

Neste trabalho, descreve-se a formulação da otimização do problema de rastreamento e rejeição de ruído na forma de Inequações Matriciais Lineares - LMIs (do Inglês, Linear Matrix Inequalities), representando uma formulação convexa do problema. Em [13] é possível verificar o uso desta ferramenta em sistemas discretos para o estudo de estabilidade, filtros e controladores. O equacionamento do método proposto é simples em comparação a outras técnicas de rastreamento tendo como principal resultado a solução ótima do problema com baixo custo computacional devido ao uso de algoritmos de programação linear de convergência polinomial para a solução das LMIs com o uso do software MATLAB.

2. Formulação da estrutura do rastreador de sinais

Considera-se o seguinte sistema discreto linear, invariante no tempo, estabilizável e observável descrito na forma de variáveis de estado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_u u(k) + B_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $x(k)$ é o vetor de estados, $y(k)$ é a saída, $u(k)$ é a entrada de controle e $w(k)$ uma entrada exógena (distúrbio).

Considera-se a estrutura ilustrada na Figura 1 para o problema de controle ótimo visando a rejeição do sinal de perturbação e rastreamento do sinal de controle em sistemas discretos. A variável T representa o período de amostragem adotado.

Primeiramente projeta-se um compensador \mathcal{H}_∞ através de um controlador discreto K , segundo a lei de controle $u(k) = -Kx(k)$. Tal controlador é formulado em termos de LMIs e minimiza a norma \mathcal{H}_∞ de $w(k)$ para $y(k)$ conforme é mostrado na Figura 2.

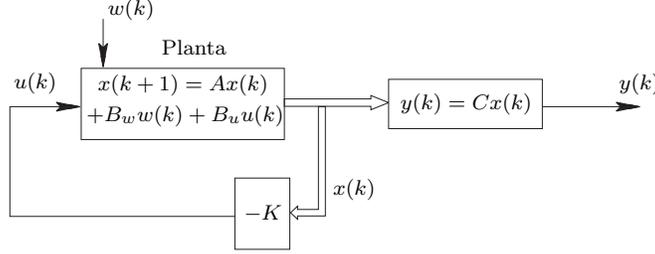


Figura 2: Sistema com realimentação de estados: K é um compensador \mathcal{H}_∞ .

Na etapa seguinte, projeta-se um estimador discreto de Kalman [7, 17] com o uso do software MATLAB [8] para reconstruir os estados e depois obtém-se o ganho N e o vetor M , indicados na Figura 1, através de um processo de otimização descrito na forma de LMIs. N e M modificam as posições dos zeros de $r(k)$ para $u(k)$ de forma a otimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre a saída $e(k)$ e a entrada de controle $r(k)$.

O diagrama de blocos da Figura 1 pode ser descrito através das variáveis de estado $x(k+1)$ e $\hat{x}(k+1)$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_u K \\ LC & A - B_u K - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u N \\ M \end{bmatrix} r(k) \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \\ e(k) &= r(k) - y(k) = r(k) - \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

O sistema (2.2) pode ser representado na forma compacta,

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A_m \bar{x}(k) + B_m r(k) + B_n w(k) \\ e(k) &= -C_m \bar{x}(k) + D_m r(k) \\ y(k) &= C_m \bar{x}(k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo,

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} A & -B_u K \\ LC & A - B_u K - LC \end{bmatrix}, D_m = 1, \quad (2.4)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} B_u N \\ M \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_m = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Aplicando-se a Transformada \mathcal{Z} no sistema (2.3), para $\bar{x}(0)=0$, e realizando-se algumas manipulações algébricas, pode-se determinar a relação entre a saída $Y(z)$ e as entradas $W(z)$ e $R(z)$, conforme descrito em (2.6):

$$Y(z) = C_m(zI - A_m)^{-1}B_m R(z) + C_m(zI - A_m)^{-1}B_n W(z). \quad (2.6)$$

Considerando-se na equação (2.6) o sinal $R(z)$ nulo, verifica-se que a norma \mathcal{H}_∞ pode ser minimizada devido ao projeto inicial do controlador K de $w(k)$ para $y(k)$, implicando na minimização do efeito da perturbação presente na planta ao desempenho da saída do sistema.

Na Figura 1 observa-se a adição do termo $Mr(k)$ na estrutura do estimador, será mostrado na Seção 4 que o vetor M assim como o ganho N tem somente a função de alterar os zeros da função de transferência de $r(k)$ para $u(k)$ e não modificar os pólos estabelecidos no projeto inicial do estimador, pois a função de transferência de $W(z)$ para $Y(z)$ não é modificada por N ou M , vide equações (2.5) e (2.6). Os pólos do sistema não são modificados, pois A_m em (2.4) e (2.6) não dependem de M ou N . Com isso a convergência do estimador não é comprometida.

Para o projeto do rastreador ótimo, considera-se a relação entre o sinal de erro e o sinal de referência descrito em (2.7), com o sinal de perturbação $W(z)$ nulo

$$H_m(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = -C_m(zI - A_m)^{-1}B_m + D_m. \quad (2.7)$$

A partir desta relação, pode-se projetar um rastreador de sinais através da modificação de zeros minimizando a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema. O processo de modificação de zeros não interfere no projeto de rejeição de perturbação, pois segundo (2.6) a função de transferência de $W(z)$ para $Y(z)$ não depende de B_m . Em (2.7) utiliza-se a posição dos zeros, implícitos na especificação de N e M em B_m , para o processo de minimização do erro do rastreamento.

3. Projeto de um compensador \mathcal{H}_∞ discreto

O problema de otimização da norma \mathcal{H}_∞ de (A, B_w, B_u, C) ilustrado na Figura 2 consiste em tornar a influência da perturbação $w(k)$ na saída $y(k)$ do sistema a menor possível através do projeto de um controlador discreto K . Portanto, deseja-se minimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada $w(k)$ (perturbação) e a saída $y(k)$. Se as LMIs dadas em (3.1) forem factíveis o controlador K pode ser obtido a partir do seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs [14]:

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} Q & 0 & B_w & AQ - B_u W \\ 0 & I & D & CQ \\ B_w' & D' & \mu I & 0 \\ -W' B_u' + Q A' & Q C' & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \\ & Q > 0 \\ & \mu > 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo $Q = Q'$ e o controlador K é obtido pela expressão: $K = WQ^{-1}$, sendo Q e W soluções ótimas de (3.1).

Para maior aplicabilidade do método deve-se restringir a região de alocação dos pólos de malha fechada do sistema através do seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs [4]

$$\begin{bmatrix} -rQ & AQ + qQ - B_u W \\ -W' B_u' + Qq + QA' & -rQ \end{bmatrix} < 0. \quad (3.2)$$

Sendo r e $-q$ o raio e o centro do círculo de restrição de alocação de pólos respectivamente, como é mostrado na Figura 3: No caso do projeto do compensador \mathcal{H}_∞

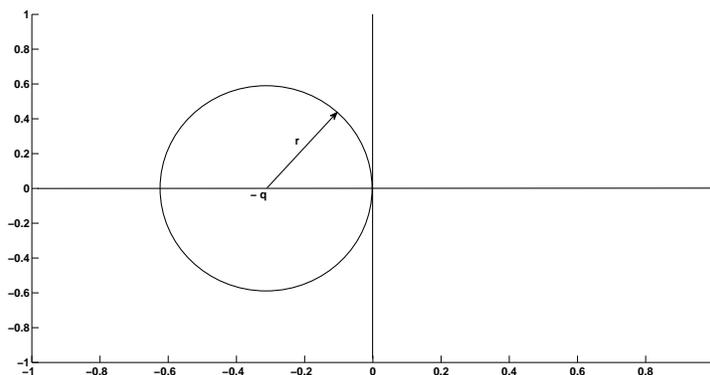


Figura 3: Região de restrição de pólos

de $w(k)$ para $y(k)$ é suposta a realimentação de todos os estados. A norma \mathcal{H}_∞ é otimizada, depois, na otimização da norma \mathcal{H}_∞ de $e(k)$ para $r(k)$ projeta-se um estimador (L) para permitir apenas a realimentação da saída.

4. Alocação de zeros em sistemas discretos

Considerando-se o sistema (A, B_u, C) , é possível projetar um sistema que modifique os zeros de $r(k)$ para $u(k)$ conforme mostrado na Figura 4. Neste projeto seleciona-se M e N de modo que os zeros de malha fechada sejam alocados em locais arbitrários escolhidos pelo projetista, sendo $M \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $N \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ [7]. O sinal $u_1(k)$ é a saída de controle do regulador.

O estimador de estados discreto utilizado no sistema de modificação de zeros é um estimador discreto de Kalman obtido a partir da função *kalm*d do software MATLAB [7, 10].

Considerando a Figura 4, se existir um zero de transmissão de $r(k)$ para $u(k)$, então necessariamente existe um zero de transmissão de $r(k)$ para $y(k)$, a menos que ocorra cancelamento de pólos e zeros. Com isso, a equação característica dos

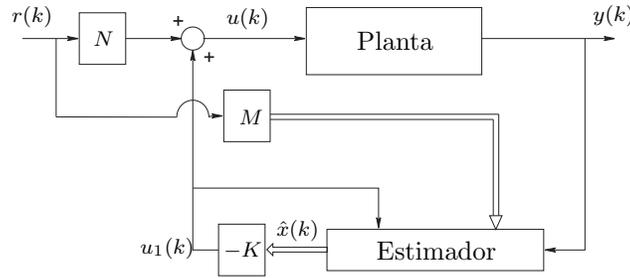


Figura 4: Sistema de alocação de zeros.

zeros de $r(k)$ para $u(k)$ pode ser descrita por (4.1)

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= (A - BK - LC)\hat{x}(k) + Ly(k) + Mr(k) \\ u(k) &= -K\hat{x}(k) + Nr(k)\end{aligned}$$

$$\det \left[zI - A + B_u K + LC - \frac{M}{N} K \right] = 0, \quad (4.1)$$

sendo que as soluções, $z = z_i$, são os zeros modificados de $r(k)$ para $u(k)$ [7].

Os parâmetros M e N permitem a modificação dos zeros de $r(k)$ para $u(k)$ e neste trabalho é tratado o caso SISO. Ainda, neste trabalho os zeros são modificados para otimizar a norma \mathcal{H}_∞ do erro de rastreamento.

5. Otimização da norma \mathcal{H}_∞ utilizando modificação de zeros discretos e filtros discretizados

A norma \mathcal{H}_∞ de um sistema dinâmico, linear, invariante no tempo e SISO é uma norma que quantifica o máximo valor da magnitude da resposta em frequência deste sistema. A norma \mathcal{H}_∞ do sistema discreto, dinâmico próprio $H(z)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A_z, B_z, C_z, D_z) :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_z x(k) + B_z u(k) \\ y(k) &= C_z x(k) + D_z u(k),\end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo $A_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_z \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_z \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_z \in \mathbb{R}^{p \times m}$ supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de

LMIs [14]:

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} Q & 0 & B_z & A_z Q \\ 0 & I & D_z & -C_z Q \\ B'_z & D'_z & \mu I & 0 \\ Q A'_z & -Q C'_z & 0 & Q \end{bmatrix} > 0$$

$$Q > 0$$

$$\mu > 0, \quad (5.2)$$

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \cdots \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 0 & I \cdots \\ N' B'_u & M' & B'_v & I \cdots \\ -Q_{12} A'_2 + Q_{11} A'_1 & Q_{12} A'_4 + Q_{11} A'_3 & Q_{13} A'_v - Q_{11} C' B'_v & -Q_{13} C'_v \cdots \\ -Q_{22} A'_2 + Q'_{12} A'_1 & Q_{22} A'_4 + Q'_{12} A'_3 & Q_{23} A'_v - Q'_{12} C' B'_v & -Q_{23} C'_v \cdots \\ -A'_2 Q'_{23} + Q'_{13} A'_1 & Q'_{23} A'_4 + Q'_{13} A'_3 & Q_{33} A'_v - Q_{13} C' B'_v & -Q_{33} C'_v \cdots \\ \cdots B_u N & A_1 Q_{11} - A_2 Q'_{12} & A_1 Q_{12} - A_2 Q_{22} & A_1 Q_{13} - A_2 Q_{23} \\ \cdots M & A_3 Q_{11} + A_4 Q'_{12} & A_3 Q_{12} + A_4 Q_{22} & A_3 Q_{13} + A_4 Q_{23} \\ \cdots B_v & -B_v C Q_{11} + A_v Q'_{13} & -B_v C Q_{12} + A_v Q'_{23} & -B_v C Q_{13} + A_v Q_{33} \\ \cdots I & -C_v Q'_{13} & -C_v Q'_{23} & -C_v Q_{33} \\ \cdots \mu I & 0 & 0 & 0 \\ \cdots 0 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ \cdots 0 & Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ \cdots 0 & Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} > 0$$

$$\mu > 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} > 0. \quad (5.3)$$

A matriz de transferência do sistema é dada por $H(z) = C_z(zI - A_z)^{-1} B_z + D_z$.

O problema de otimização de $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$ descrito em (2.7) consiste em minimizar a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ do sistema H_m a partir da determinação dos valores de M e N (presentes em B_m , que modificam os zeros), isto é, alocar os zeros de forma que a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ seja minimizada, formando um rastreador de sinais.

Para a aplicação do projeto do rastreador discreto é necessária a inclusão de um filtro discreto, o qual possibilita também especificar a faixa de frequência na qual ocorrerá o rastreamento do sinal de referência.

Para o projeto do rastreador deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir:

$$\min \quad \|H_m(z)V(z)\|_\infty \quad (5.4)$$

sendo $V(z) = (A_v, B_v, C_v, D_v)$ um sistema dinâmico projetado para especificar o peso na frequência de saída e considera-se $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$ uma re-

alização do sistema linear invariante no tempo e estável indicado em (2.7). Na Figura 5 é ilustrada a estrutura de inclusão de peso na frequência:

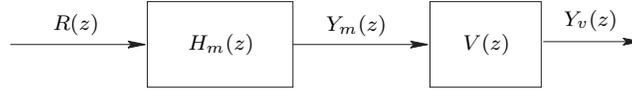


Figura 5: Estrutura de sistemas de controle com peso na frequência.

Com isso, uma possível realização em espaço de estado de $\check{H}_f = H_m(z)V(z)$ é

$$\left[\begin{array}{c|c} \check{A}_f & \check{B}_f \\ \hline \check{C}_f & \check{D}_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_m & 0 & B_m \\ -B_v C_m & A_v & B_v D_m \\ \hline 0 & C_v & 0 \end{array} \right]. \quad (5.5)$$

Para o projeto do rastreador com peso na frequência, substituí-se \check{A}_f , \check{B}_f , \check{C}_f e \check{D}_f de (5.5) na equação (5.2). Isto resulta no problema de otimização descrito em (5.3), que é equacionado na forma de LMIs. Deste processo determina-se o ganho N e o vetor M , e estes parâmetros minimizam a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ (rastreador de sinais).

A matriz Q é particionada da seguinte forma $Q_{ij} = Q'_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$.

O vetor N e o ganho M são as soluções ótimas de (5.3) que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre o erro e a referência considerando o peso na frequência.

Os filtros utilizados no projeto do rastreador são usados para viabilizar o projeto e ajustar os parâmetros M e N para uma determinada faixa de frequência. A obtenção dos valores de M e N a partir da solução do problema descrito na forma de LMIs leva agora em consideração a dinâmica do filtro para restringir o problema a uma determinada faixa de frequência. Porém na simulação ou implementação do sistema de rastreamento esses filtros são descartados.

6. Exemplo

Neste exemplo considera-se um sistema discreto linear invariante no tempo de terceira ordem na sua forma discretizada [6] e projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura. Utiliza-se um período de amostragem de 0,01 segundos. Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= [2 \quad 8 \quad 6] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

sendo $x(k)$ o vetor de estados, $u(k)$ o sinal de controle e $w(k)$ é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de baixa frequência (até $0,1 \text{ rad/s}$), então é proposto o filtro $J(z)$

$$J(z) = \frac{\text{num}(z)}{\text{den}(z)},$$

sendo

$$\begin{aligned} \text{num}(z) &= 0,4499z + 0,4498 \\ \text{den}(z) &= z^2 - 1,9994z + 0,9994. \end{aligned}$$

O controlador K discreto que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ de $w(k)$ para $y(k)$ do sistema descrito em (6.1) baseado na estrutura da Figura 2 com o uso da equação (3.1) e (3.2) com centro em $0,2$ e raio de $0,6$ no plano Z como região de restrição de pólos, tal como o estimador L discreto de Kalman projetados para este sistema discreto são

$$\begin{aligned} K &= [0,0018 \quad 0,1779 \quad 8,1997] \times 10^5 \\ L &= \begin{bmatrix} 0,5290 \\ 0,0075 \\ 0,0001 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Na seqüência é projetado o rastreador para baixas frequências de até $0,1 \text{ rad/s}$) minimizando-se a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ usando o projeto de rastreamento com modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito em (5.3)

A norma \mathcal{H}_∞ de $w(k)$ para $y(k)$ obtida no projeto foi $0,0510$, o que implica em uma grande atenuação do sinal de perturbação. A Figura 6 ilustra a resposta em frequência da função transferência $Y(z)/W(z)$.

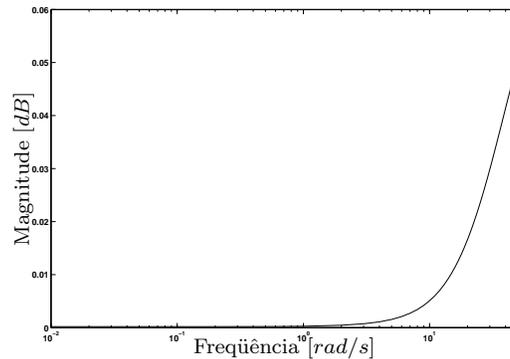


Figura 6: Resposta em frequência de $Y(z)/W(z)$.

Na modificação de zeros discretos minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ para sinais de baixa frequência (até $0,1 \text{ rad/s}$), sendo $e(k)$ o erro entre a saída e

a entrada, afim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma \mathcal{H}_∞ do sistema é 3,26; enquanto que o maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto foi $2,1103 \times 10^{-5}$. Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 7 ilustra a resposta em frequência de $E(z)/R(z)$ descrito em (2.7) e pode-se verificar que a norma \mathcal{H}_∞ do projeto na faixa de frequência de operação especificada atende às características para um sistema rastreador de sinal. A Figura 7 não ilustra o valor da norma \mathcal{H}_∞ devido ao teorema de amostragem de Shannon [9]. O teorema de amostragem de Shannon afirma existirem erros no sinal amostrado para sinais de frequência com valor maior do que a metade do valor da frequência de amostragem. Neste exemplo a frequência de amostragem é de 100 rad/s , portanto só são amostrados sinais de frequência de até 50 rad/s e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 0,8268 \\ -0,0008 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } N = 72,5157. \quad (6.3)$$

Na simulação considera-se um sinal de entrada $r(k) = \text{sen}(0,1kT)$ e um sinal de

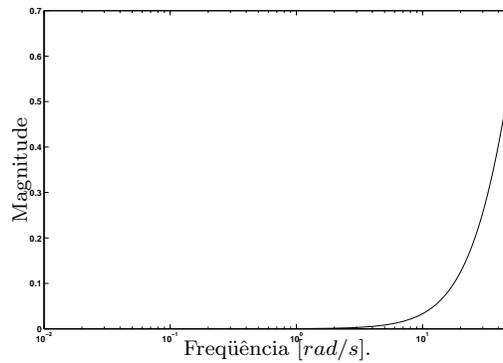


Figura 7: Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ descrita em (2.7).

perturbação $w(k)$ que apresenta amplitudes aleatórias e para a simulação considera-se que a máxima amplitude deste sinal é 0,5. Usando os valores de K , L , M e N obtidos em 6.2 e 6.3, tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 8.

No exemplo citado acima foi abordado um rastreador para sinais de baixa frequência, mas a metodologia proposta neste trabalho permite executar projetos para sistemas rastreadores em qualquer outra faixa de frequência, utilizando-se um filtro passa-faixa no projeto, ou rastreadores para sinais de alta frequência, utilizando-se um filtro passa-alta no projeto.

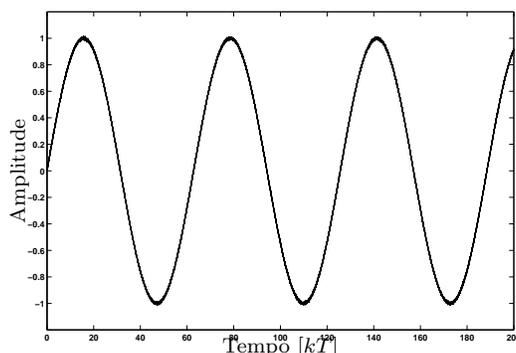


Figura 8: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

Abstract. The tracking system problem in discrete time systems, with the presence of a disturbance signal in the plant, is solved using a zero variation methodology proposed in this work. A discrete state feedback controller is designed in order to minimize the \mathcal{H}_∞ -norm between the exogen input and the output signal, such that the effect of the disturbance is attenuated. After, a discrete state estimator is designed and the modification of the zeros is used to minimize the \mathcal{H}_∞ -norm from the reference input signal to the error signal. The error is taking as the difference between the reference and the output signal, and so it is a tracking problem. The design is formulated in Linear Matrix Inequalities (LMI) framework, such that the optimal solution of stated control problem is obtained. A numerical example is illustrated to show the proposed methodology viability.

Referências

- [1] C.Q. Andrea, E. Assunção, M.C.M. Teixeira, Controle ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com modificação de zeros para o problema do rastreamento usando LMI, *Revista Controle e Automação*, **14**, No. 4 (2004).
- [2] E. Assunção, C.Q. Andrea, M.C.M. Teixeira, \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ -optimal control for the tracking problem with zero variation, *IET Control Theory Applications* **1**, No. 3 (2007), 682-688.
- [3] Chen, M. Ben, Z. Lin, K. Liu, Robust and perfect tracking of discrete-time systems, *Automatica*, **36**, No. 2 (2002), 293-299.
- [4] M. Chiali, P. Gahinet, \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-41** (1996), 358-367.
- [5] M. De la Sen, Pole-placement in discrete systems by using simple and multirate sample, *Journal of the Franklin Institute*, **333**, No. 5 (1996), 721-746.
- [6] R.C. Dorf, R.H. Bishop, "Sistemas de Controle Modernos", LTC Editora, 8ed., Rio de Janeiro, Brasil, 2001.

- [7] G.F. Franklin, J.D. Powell, M. L. Workman, "Digital Control of Dynamic Systems", Addison Wesley 2 ed., USA, 1990.
- [8] P. Gahinet, A. Nemirovsk, A.J. Laub, M. Chiali, "LMI Control Toolbox User's Guide", The Mathworks Inc., Natick, MA, 1995.
- [9] R. Isermann, "Digital Control Systems - Fundamentals, Deterministic Control", Springer Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 1989.
- [10] R.E.A. Kalman, New approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of ASME - Journal of basic Engineering*, **82** (1960), 35-45.
- [11] R.A.T. Mendes, "Controle Ótimo \mathcal{H}_∞ com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos usando LMI", Dissertação de Mestrado, UNESP, Ilha Solteira, SP, 2007.
- [12] W. C. Messner, C.J. Kempf, Zero placement for designing discrete time repetitive controllers, *Control Engineering Practice*, **4**, No. 4 (1996), 563-569.
- [13] M.C. Oliveira, "Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares", Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, SP, 1999.
- [14] R.M. Palhares, R.H.C. Takahashi, P.L.D. Peres, \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 guaranteed costs computation for uncertain linear systems, *International Journal of System Science*, **28**, No. 2 (1997), 183-188.
- [15] A. Saberi, P. Sanutti, A.A. Stoorvogel, \mathcal{H}_2 optimal controllers with measurement feedback for discrete-time systems: flexibility in closed-loop pole placement, *Automatica*, **33**, No. 3 (1997), 289-304.
- [16] M. M'Saad, R. Ortega, I.D. Landau, Adaptive controllers for discrete-time systems with arbitrary zeros, *Automatica*, **21**, No. 4 (1985), 413-423.
- [17] C.F. Van Loan, Computing integrals involving matrix exponential, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **23** (1970), 395-404.