TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **10**, No. 2 (2009), 191-202.

Modelo Bayesiano Hierárquico de Captura-Recaptura com Distribuição Poisson-Gama

M. PAULA[1], Instituto de Ciências Ambientais e Desenvolvimento Sustentável, Universidade Federal da Bahia - UFBA, 45055-090 Barreiras, BA, Brasil.

C.A.R. DINIZ[2], J.G. LEITE[3], Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, 13565-905 São Carlos, SP, Brasil.

Resumo. Neste artigo apresentamos um modelo bayesiano de captura-recaptura proposto por Castledine (1981) e um modelo bayesiano hierárquico com distribuição Poisson-Gama para o tamanho da população, considerando um conjunto de dados reais de captura-recaptura para uma população fechada. Apresentamos as estimativas *a posteriori* do parâmetro N, segundo os modelos bayesianos considerados bem como apresentamos algumas estimativas clássicas. Alguns aspectos sobre *prioris* não informativas para o modelo bayesiano hierárquico com distribuição Poisson-Gama são abordados e discutidos.

Palavras-chave : Poisson-Gama, captura-recaptura, população fechada.

1. Introdução

O processo de captura e recaptura, no caso da estimação do tamanho populacional, consiste em selecionar uma amostra de tamanho n_1 de uma população marcando-a e devolvendo-a à população. Após um certo período de tempo seleciona-se uma segunda amostra aleatória de tamanho n_2, conta-se o número de elementos marcados e marca-se os elementos não marcados, devolvendo-os à população. Após um certo período de tempo seleciona-se uma terceira amostra de tamanho n_3, conta-se o número de elementos marcados, marca-se os elementos não marcados, devolvendo-os à população, e assim por diante. Esse processo é realizado s vezes ($s \geq 2$).

O interesse em estimar tamanhos de populações surgiu em meados do século XVII. Historicamente, Laplace (1786) utilizou tal processo para estimar o tamanho da população da França. Em ecologia, o primeiro pesquisador a empregar este método foi o dinamarquês Carl G. J. Petersen (1896), que estudou o fluxo migratório de peixes no mar Báltico.

As técnicas de captura-recaptura podem ser usadas para populações fechadas ou abertas. Uma *população fechada* é aquela em que os efeitos de nascimento, mortalidade e migração não são considerados, isto é, supõem-se que seu tamanho não

[1]marcelop@ufba.br
[2]dcad@power.ufscar.br
[3]leite@ufscar.br

se altera durante o período de estudo (Comack, 1992). Uma *população aberta* é aquela que durante a realização do experimento se altera em tamanho e em composição por ocorrência de nascimentos, mortes e migrações. Com relação ao estudo de populações abertas, vários outros autores destacaram-se. Entre os mais citados estão Jolly (1965), Pollock (1991) e Schwarz e Arnason (1996). Os dados reais de captura-recaptura apresentados nesse artigo são considerados como oriundos de uma população fechada.

Neste trabalho fazemos o estudo sob o enfoque bayesiano e, devido ao fato da distribuição *a posteriori* conjunta ser expressa por uma expressão analítica complexa, é difícil a obtenção das distribuições *a posteriori* marginais dos parâmetros de inte-resse, necessárias para o cálculo de momentos *a posteriori*. Sendo assim, foram utilizados métodos Monte Carlo com cadeias de Markov para obtenção de amostras da distribuição *a posteriori* conjunta. As cadeias foram geradas através de algoritmos Gibbs Sampling e algoritmos Metropolis-Hastings, implementados utilizando-se o software R. A convergência das cadeias geradas foram diagnosticadas pelo critério do diagnóstico de Gelman-Rubin (1992) que é baseado na análise de variância, comparando-a intra e entre as cadeias geradas. Tal diagnóstico de convergência foi monitorada pelo pacote CODA - Convergence Diagnostics and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output.

2. Metodologia

Nesta seção apresentamos o modelo estatístico e determinamos a função de verossimilhança para o método de captura-recaptura com s estágios de marcação ($s \geq 2$) proposto por Castledine (1981). Denotemos por

N: tamanho desconhecido da população,

s: número de amostras selecionadas (épocas de captura), $s \geq 2$,

p_j: probabilidade de qualquer animal ser capturado na *j-ésima* amostra, $j = 1, 2, ..., s$ e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_s)$,

n_j: número de animais capturados na *j-ésima* amostra, $j = 1, 2, ..., s$,

m_j: número de animais marcados recapturados na *j-ésima* amostra, $j = 1, 2, ..., s$.

M_j: é o número de elementos marcados na população anterior a *j-ésima* amostra, $j = 1, 2, ..., s$.

Vamos supor que as seguintes condições sejam verificadas:

1. a população é fechada;

2. não há animais marcados na população no início do processo, isto é, $m_1 = 0$;

3. os animais comportam-se independentemente uns dos outros;

4. as marcas não afetam a capturabilidade do animal;

5. os animais não perdem suas marcas durante o processo;

6. as épocas de amostragem são independentes.

Neste caso, a função de verossimilhança (ver por exemplo Zacharias (2000) e Paula (2006)) é tal que

$$L(N,\mathbf{p} \mid D) = P(n_1,m_1;n_2,m_2;...;n_s,m_s \mid \mathbf{p},N) \propto \binom{N}{r} \prod_{j=1}^{s} p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j}, \tag{2.1}$$

onde $N \geq r$, $D = (n_1,m_1;n_2,m_2;...;n_s,m_s)$ representa os dados e

$$r = \sum_{j=1}^{s} n_j - \sum_{j=1}^{s} m_j, \tag{2.2}$$

corresponde ao número de animais distintos capturados ao longo do processo e $0 < p_j < 1$, $j = 1,2,...,s$.

2.1. Alguns estimadores clássicos

Nesta seção vamos considerar dois estimadores clássicos: o estimador de máxima-verossimilhança e o estimador de Schnabel, afim de fazer uma comparação com os estimadores bayesianos que serão tratados posteriormente.

2.1.1. Estimador de máxima-verossimilhança

Apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança de N e $\mathbf{p}$, denotados por $\widehat{N}$ e $\widehat{\mathbf{p}}$ respectivamente. Tomando o logaritmo de $L(N,\mathbf{p} \mid D)$, dado em (2.1), temos

$$\begin{aligned} \ln L(N,\mathbf{p}) &= \ln\left[\binom{N}{r} \prod_{j=1}^{s} p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j}\right] \\ &= \ln\binom{N}{r} + \ln\left[\prod_{j=1}^{s} p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j}\right] \\ &= \ln\binom{N}{r} + \sum_{j=1}^{s} \left[n_j \ln p_j + (N-n_j)\ln(1-p_j)\right], \end{aligned}$$

onde $N \geqslant r$, $0 < p_j < 1$, $j = 1,2,...,s$. Logo,

$$\frac{\partial \ln L(N,\mathbf{p})}{\partial p_j} = \frac{n_j}{p_j} - \frac{N-n_j}{1-p_j} = 0 \Longrightarrow \frac{n_j}{p_j} = \frac{N-n_j}{1-p_j} \Longrightarrow \widehat{p}_j = \frac{n_j}{\widehat{N}},\ j = 1,2,...,s.$$

Por outro lado, como $\widehat{N}$ é aproximadamente igual a solução da equação $L(N,\mathbf{p}) = L(N-1,\mathbf{p})$, $N \geqslant r+1$, temos

$$\begin{aligned}\binom{N}{r}\prod_{j=1}^{s} p_j^{n_j}(1-p_j)^{N-n_j} &= \binom{N-1}{r}\prod_{j=1}^{s} p_j^{n_j}(1-p_j)^{N-n_j-1}, N \geqslant r+1\\ &\Longrightarrow \left(\frac{N}{N-r}\right)\prod_{j=1}^{s}(1-p_j) = 1, N \geqslant r+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \frac{N-r}{N} = \prod_{j=1}^{s}(1-p_j), N \geqslant r+1\\ &\Longrightarrow 1-\frac{r}{N} = \prod_{j=1}^{s}(1-p_j), N \geqslant r+1.\end{aligned}$$

Assim, a estimativa de máxima verossimilhança de $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_s)$ é $\widehat{\mathbf{p}} = (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, ..., \widehat{p}_s)$ onde

$$\widehat{p}_j = \frac{n_j}{\widehat{N}}, \; j = 1, 2, ..., s.$$

E a estimativa de máxima verossimilhança de N, $\widehat{N}$, é aproximadamente a solução da equação

$$1-\frac{r}{N} = \prod_{j=1}^{s}(1-p_j), \; N \geqslant r+1. \tag{2.3}$$

2.1.2. Estimador de Schnabel

O método de Petersen, usado para o caso de 2 épocas de captura, foi estendido por Schnabel (1938) para uma série de s amostras ($s \geq 2$) cujos tamanhos são dados pelo vetor $(n_1, n_2, ..., n_s)$. Neste caso, a estimativa de N é dada por

$$\widehat{N} = \frac{\sum_{j=2}^{s} n_j M_j}{\sum_{j=2}^{s} m_j}, \tag{2.4}$$

onde

n_j: é o tamanho da *j-ésima* amostra, $j = 1, 2, ..., s$.

m_j: é o número de elementos marcados na *j-ésima* amostra, $j = 1, 2, ..., s$.

M_j: é o número de elementos marcados na população anterior a *j-ésima* amostra, $j = 1, 2, ..., s$.

Para $s = 2$, o estimador dado em (2.4) se resume no estimador de Petersen.

2.2. Modelo bayesiano com priori de Poisson para N

Nesta seção a inferência sobre N será tratada sob o enfoque bayesiano, ou seja, será utilizado o conhecimento *a priori* tanto do tamanho populacional N, como do vetor de probabilidades $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_s)$ de captura dos animais. Métodos bayesianos podem ser preferíveis uma vez que informações prévias do pesquisador são incorporadas ao modelo. Supomos que as probabilidades de captura sejam, *a priori*, independentes e identicamente distribuídas com p_j, $j = 1, 2, ..., s$, tendo distribuição $Beta\,(\alpha, \beta)$ com α e β conhecidos $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$, isto é

$$\pi\left(\mathbf{p}\right) = \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} p_j^{\alpha-1}(1-p_j)^{\beta-1}, \tag{2.5}$$

e que N tem distribuição *a priori* de Poisson truncada em zero com parâmetro λ conhecido, $\lambda > 0$, ou seja

$$\pi\left(N\right) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^N}{N!(1-e^{-\lambda})},\ N = 1, 2, ... \tag{2.6}$$

Então, a partir da distribuição *a priori* dada em (2.5) e (2.6) e da função de verossimilhança dada em (2.1) temos que a distribuição *a posteriori* conjunta de $\mathbf{p}$ e N é tal que

$$\pi\left(\mathbf{p}, N \mid D\right) \propto \frac{\lambda^N}{(N-r)!} \prod_{j=1}^{s} p_j^{n_j+\alpha-1} \left(1-p_j\right)^{N-n_j+\beta-1},\ 0 < p_j < 1, \tag{2.7}$$

$j = 1, ..., s$, $N \geq r$.

2.3. Modelo hierárquico com estrutura "Poisson-Gama"

Para a distribuição *a priori* do tamanho populacional N com uma estrutura hierárquica é usual o tipo "*Poisson-Gama*"(George e Robert, 1992). Para o primeiro estágio assumimos que, dado λ, N tem uma distribuição *a priori* de Poisson λ, truncada em zero dada por

$$\pi\left(N\right) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^N}{N!(1-e^{-\lambda})}, N = 1, 2, ... \tag{2.8}$$

Para o segundo estágio assumimos que λ tenha distribuição Gama com hiperparâmetros a e b conhecidos, $a > 0$ e $b > 0$, dada por

$$\pi\left(\lambda\right) = \frac{b^a}{\Gamma\left(a\right)} \lambda^{a-1} \exp\left\{-\lambda b\right\},\ \lambda > 0, \tag{2.9}$$

Na prática, quando não temos idéia sobre o valor de λ tomamos valores pequenos para os hiperparâmetros (por exemplo $a = b = 0,0001$) tornando a distribuição Gama não informativa. Então da distribuição *a priori* dada em (2.5), da função de verossimilhança dada em (2.1) e da distribuição *a priori* dada em (2.8) e (2.9) temos que a distribuição *a posteriori* conjunta de $\mathbf{p}$, N e λ é tal que

$$\pi\left(\mathbf{p},N,\lambda\mid D\right)\propto\frac{\lambda^{N+a-1}e^{-\lambda(1+b)}}{\left(1-e^{-\lambda}\right)\left(N-r\right)!}\prod_{j=1}^{s}p_j^{n_j+\alpha-1}\left(1-p_j\right)^{N-n_j+\beta-1}. \tag{2.10}$$

Da distribuição *a posteriori* conjunta (2.10) temos as seguintes distribuições condicionais necessárias para o algorítmo Gibbs Sampling:

A distribuição condicional de $N-r$ dados λ , $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_s)$ e os dados é dada por

$$N-r\mid\mathbf{p},\lambda,D\sim Poisson\left(\lambda\prod_{j=1}^{s}\left(1-p_j\right)\right).$$

A distribuição condicional de $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_s)$ dados λ , N e os dados é dada por

$$\pi\left(\mathbf{p}\mid N,\lambda,D\right)\propto\prod_{j=1}^{s}p_j^{n_j+\alpha-1}\left(1-p_j\right)^{N-n_j+\beta-1},\ j=1,2,...,s.$$

A distribuição condicional de λ dados $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_s)$, N e os dados é dada por

$$\lambda\mid N,\mathbf{p},D\propto\frac{\lambda^{N+a-1}e^{-\lambda(1+b)}}{\left(1-e^{-\lambda}\right)}.$$

Neste estudo foi considerado uma distribuição *a priori* não informativa de Jeffreys $\pi\left(N\right)\propto N^{-1}$, para o tamanho populacional N (ver Smith (1991), George and Robert (1992) e Basu e Ebrahimi (2001)) e um produto de *prioris* não informativas $Beta(0,5;0,5)$ para o vetor de probabilidades $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_s)$.

A *priori* não informativa de Jeffreys para o parâmetro p, $0<p<1$, é proporcional a uma $Beta(0,5;0,5)$ (ver Novick and Hall (1965)). Box e Tiao (1973) discutiram as idéias de Jeffreys (1961), sobre a distribuição *a priori* para representar o estado de ausência de informação ou ignorância a respeito do comportamento probabilístico dos parâmetros. O estudo abrangeu os casos uniparamétricos e multiparamétricos.

A crítica mais freqüente à análise Bayesiana é que diferentes *prioris* conduzem a diferentes respostas. Contudo, com o interesse de encontrar "objetividade" pode-se usar *prioris* não-informativas. Se houver uma amostra pequena de dados, é necessário fazer sérias considerações para a informação *a priori*. Quando a amostra é grande, intervalos de confiança clássicos e intervalo de credibilidade Bayesiano serão quase idênticos numericamente. Para mais informações sobre *prioris* não informativas ver Novick and Hall (1965), Jeffreys (1961), Box e Tiao (1973) e Yang et. al (1994, 1995, 1996).

3. Resultados e Discussão

Foi feito um estudo para estimar o número de peixes (Sunfish) no Lago Gordy, Indiana (USA), em $s=14$ épocas de capturas (Gerking, 1953) onde podemos notar um grande número de ocasiões de amostragem e um pequeno número de unidades de captura observadas em cada ocasião amostral.

Os dados referentes a tal experimento foram abordados por vários autores, entre eles, Ricker (1958, 1975) ilustrando métodos clássicos para estudos de captura-recaptura e por Castledine (1981), Smith (1988) e Wang (2002) para ilustrar métodos bayesianos. As mortes decorrentes do processo de amostragem foram desconsideradas, caracterizando assim uma população fechada. A Tabela 1 mostra os dados reais de captura-recaptura (Castledine, 1981).

Tabela 1: Dados reais de captura-recaptura.

Peixes (Sunfish) capturados no Lago Gordy, Indiana (USA).														
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_j	10	27	17	7	1	5	6	15	9	18	16	5	7	19
m_j	0	0	0	0	0	0	2	1	5	5	4	2	2	3
M_j	0	10	37	54	61	62	67	71	85	89	102	114	117	122

Temos então a estatística $r = \sum_{j=1}^{14} n_j - \sum_{j=1}^{14} m_j = 138$. A tabela 2 mostra as estimativas clássicas de máxima-verossimilhança e de Schnabel para este conjunto de dados, segundo as expressões (2.3) e (2.4) respectivamente.

Tabela 2: Estimativas clássicas.

Estimativa de máxima-verossimilhança	$\widehat{N} = 449$
Estimativa de Schnabel	$\widehat{N} = 451$

3.1. Modelo bayesiano com *priori* de Jeffreys para o tamanho populacional

Como os tamanhos das amostras obtidas foram significativamente diferentes, assumimos que as probabilidades de captura são diferentes para cada uma das $s = 14$ épocas de captura. Foram geradas duas cadeias paralelas de 50000 iterações cada descartando as primeiras 10000 e considerando um salto de tamanho 10, gerando assim uma amostra final de tamanho 4000 da distribuição *a posteriori* conjunta de N e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{14})$. A Tabela 3 mostra a estimativa *a posteriori* do parâmetro N.

Tabela 3: Estimativa de N.

Parâmetro	$E\,(N \mid D)$	Int. Cred. (95%)
N	378	$(287; 506)$

3.2. Modelo bayesiano com *priori* informativa de Poisson para o tamanho populacional

Nesta seção foi considerado uma distribuição *a priori* informativa de Poisson truncada em zero para o tamanho populacional N e um produto de *prioris* não informativas $Beta(0,5;0,5)$ para o vetor de probabilidades $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{14})$. Afim de verificar o comportamento das estimativas *a posteriori* do tamanho populacional, foi atribuído diferentes valores para o hiperparâmetro λ. Foram geradas duas cadeias paralelas de 50000 iterações cada descartando as primeiras 10000 e considerando um salto de tamanho 10, gerando assim uma amostra final de tamanho 4000 da distribuição *a posteriori* conjunta de N e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{14})$. A Tabela 4 mostra as estimativas dos parâmetros.

Tabela 4: Estimativas de N para diferentes valores de λ.

	$E(N\|D)$	Int. Cred. (95%)		$E(N\|D)$	Int. Cred. (95%)
$\lambda = 0,1$	138	$(138; 139)$	$\lambda = 250$	264	$(238; 292)$
$\lambda = 1$	138	$(138; 140)$	$\lambda = 275$	283	$(255; 314)$
$\lambda = 25$	145	$(140; 151)$	$\lambda = 300$	304	$(274; 334)$
$\lambda = 50$	153	$(146; 162)$	$\lambda = 325$	325	$(293; 359)$
$\lambda = 75$	162	$(152; 173)$	$\lambda = 350$	347	$(313; 382)$
$\lambda = 100$	173	$(160; 186)$	$\lambda = 375$	369	$(333; 407)$
$\lambda = 125$	184	$(169; 201)$	$\lambda = 400$	391	$(354; 429)$
$\lambda = 150$	197	$(180; 216)$	$\lambda = 425$	414	$(374; 454)$
$\lambda = 175$	212	$(193; 233)$	$\lambda = 450$	437	$(397; 477)$
$\lambda = 200$	229	$(209; 251)$	$\lambda = 475$	460	$(419; 504)$
$\lambda = 225$	246	$(223; 271)$	$\lambda = 500$	484	$(442; 528)$

Podemos observar pela tabela 4 que a informação *a priori* do hiperparâmetro λ predomina a informação dos dados sobre o parâmetro N quando a estatística r, definida em (2.2), é pequena. No entanto, a medida que vamos aumentando o valor do hiperparâmetro λ da distribuição *a priori* da Poisson as estimativas *a posteriori* do parâmetro N se aproximam de λ (média da *priori* Poisson), e as amplitudes dos intervalos de credibilidade também aumentam. Este fato mostra que quando usamos uma distribuição *a priori* informativa de Poisson para o tamanho populacional, devemos ter uma boa idéia do parâmetro λ, caso contrário as estimativas *a posteriori* dos parâmetros do modelo serão significativamente comprometidas.

3.3. Modelo bayesiano hierárquico com estrutura Poisson-gama para o tamanho populacional

Fizemos um estudo considerando um modelo bayesiano hierárquico e atribuímos uma distribuição *a priori* de Poisson de parâmetro λ para o tamanho populacional N. Para λ atribuímos uma distribuição *a priori* $Gama(a, b)$ onde atribuímos diferentes valores para os hiperparâmetros (a, b) de tal forma que a variância *a priori* fosse consideravelmente pequena (informativa: $Var(\lambda) = 10^{-4}$) até consideravelmente grande (não-informativa: $Var(\lambda) = 10^{10}$). Fixada a esperança *a priori* de lambda, nossa análise se prendeu aos valores da variância *a priori* de lambda e seus efeitos nas estimativas *a posteriori* de N. Para o vetor de probabilidades de captura $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{14})$ atribuímos uma distribuição *a priori* não informativa Beta com parâmetros $\alpha = 0,5$ e $\beta = 0,5$, ou seja, usamos a *priori* de Jeffreys.

Foram geradas duas cadeias paralelas de 50000 iterações cada descartando as primeiras 10000 e considerando um salto de tamanho 10, construindo assim uma amostra final de tamanho 4000 da distribuição *a posteriori* conjunta de N, λ e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{14})$. A Tabela 5 mostra as estimativas *a posteriori* dos parâmetros N e λ.

Tabela 5: Estimativas de N e λ considerando diferentes valores para a e b.

Hiperparâmetros da *priori* de λ		Esperança *a priori* de λ	Variância *a priori* de λ	Parâmetro N		Parâmetro λ	
a	b	a/b	a/b^2	$E(N\|D)$	Int.Cred. (95%)	$E(\lambda\|D)$	Int.Cred. (95%)
10^4	10^4	1	10^{-4}	138	(138; 140)	1,01	(0,99; 1,03)
10^3	10^3	1	10^{-3}	138	(138; 140)	1,1	(1,1; 1,2)
10^2	10^2	1	10^{-2}	139	(138; 141)	2,4	(2,1; 2,7)
10^1	10^1	1	10^{-1}	142	(139; 146)	14	(12; 16)
1	1	1	1	166	(154; 179)	83	(70; 98)
10^{-1}	10^{-1}	1	10	244	(208; 288)	223	(178; 272)
10^{-2}	10^{-2}	1	10^2	314	(249; 406)	311	(236; 412)
10^{-3}	10^{-3}	1	10^3	378	(283; 516)	378	(275; 523)
10^{-4}	10^{-4}	1	10^4	382	(287; 516)	382	(278; 529)
10^{-5}	10^{-5}	1	10^5	383	(285; 525)	383	(278; 532)
10^{-6}	10^{-6}	1	10^6	383	(287; 522)	384	(279; 534)
10^{-7}	10^{-7}	1	10^7	383	(287; 522)	384	(279; 534)
10^{-8}	10^{-8}	1	10^8	383	(287; 522)	384	(279; 534)
10^{-9}	10^{-9}	1	10^9	383	(287; 522)	384	(279; 534)
10^{-10}	10^{-10}	1	10^{10}	383	(287; 522)	384	(279; 534)

Podemos observar pela Tabela 5 que a medida que aumentamos a variância *a* *priori* do parâmetro λ tornando a distribuição não-informativa, as estimativas *a posteriori* tanto de N quanto de λ se aproximam e se estabilizam em valores bem próximos aos valores obtidos onde utilizamos *a priori* de Jeffreys para N, dado pela tabela 3. Além disso podemos notar que a partir de uma variância acima de 10^4 as estimativas de N e λ bem como seus respectivos intervalos de credibilidade possuem praticamente o mesmo valor.

4. Conclusões

Os estudos de simulação mostraram que quando utilizamos um modelo bayesiano hierárquico onde atribuímos uma distribuição Poisson de parâmetro λ para o tamanho populacional N e para λ atribuímos uma *priori* $Gama\,(a, b)$ não informativa, as estimativas *a posteriori* não apresentam diferenças com relação ao modelo onde usamos Jeffreys $\pi\,(N) \propto N^{-1}$. Além disso, *a priori* gama não-informativa para λ forneceu uma estimativa mais próxima das estimativas clássicas de máxima-verossimilhança e de Schnabel.

Quando usamos uma distribuição *a priori* informativa de Poisson para o tamanho populacional, devemos ter uma boa idéia do parâmetro λ, caso contrário as estimativas *a posteriori* dos parâmetros do modelo serão significativamente comprometidas.

Nesse sentido, uma alternativa para estes casos é adotar tal estrutura hierárquica numa situação onde não temos informação *a priori* disponível a respeito do tamanho populacional.

Abstract. In this paper we present a bayesian model considered by Castledine (1981) and the hierarchical bayesian model with Poisson-Gama distribution for the population size with respect to parameter N *posteriori* using real data of a closed population capture-recaptures. We present the *posteriori* estimates and classical estimates for the parameter N. Some aspect about non informative *prioris* for the hierarchical bayesian model with Poisson-Gama distribution are considered.

Referências

[1] S. Basu, N. Ebrahimi, Bayesian capture-recapture methods for error detection and estimation of population size heterogeneity and dependence, *Biometrika*, **88** (2001), 269–279.

[2] G.E.P. Box, G.C. Tiao, "Bayesian Inference in Statistical Analysis", Addison-Wesley Series in Behavioral Science, John Wiley & Sons, New York, 1973.

[3] B.A. Castledine, Bayesian analysis of multiple-recapture sampling for a closed population, *Biometrika*, **68** (1981), 197–210.

[4] D.G. Comack, Internal estimation for mark-recapture studies of closed populations, *Biometrics*, **48** (1992), 567–76.

[5] A. Gelman, D. Rubin, Inference from iterative simulation using multiple sequences, *Statistical Science*, **7** (1992), 457–511.

[6] E.I. George, C.P. Robert, Capture-recapture estimation via Gibbs sampling. *Biometrika.* **79**, No. 4 (1992), 677–83.

[7] S.D. Gerking, Vital Statistics of the fish population of Gordy Lake, Indiana, *Transactions of the American Fisheries Society*, **82** (1953), 48–67.

[8] R. Ihaka, R. Gentleman, R: A language for data analysis and graphics, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **5**, No. 3 (1996), 299–314.

[9] H. Jeffreys, "Theory of Probability", Oxford University Press, 3rd edition, 1961.

[10] G.M. Jolly, Explicit estimates from capture-recapture data with both death and immigration - stochastic model, *Biometrika*, **52** (1965), 225–47.

[11] P.S. Laplace, Sur les naissances, les mariages et les morts, in "Histoire de L ´Académie Royale des Sciences", Paris, pp. 693, (1786).

[12] W.R. Novick, W.J. Hall, A Bayesian indifference procedure, *Journal American Statistical Association*, **60** (1965), 1104–1117.

[13] M. Paula, "Um enfoque Bayesiano do modelo de captura-recaptura na presença de covariáveis", Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2006.

[14] C.G.J. Petersen, The yearly immigration of young plaice into Limfjord from the German sea, etc, Rept., *Danish Biol. Stn.*, **6** (1896), 1–48.

[15] K.H. Pollock, Modeling capture-recapture, and removal statistics for estimation of demographic parameters for fish and wildlife populations: Pas, present, and future, *Journal American Statistical Association*, **86** (1991), 225–38.

[16] W.E. Ricker, Handbook of Computations for Biological Statistics of Fish populations, *Bull. Fish. Bd. Canada*, **119** (1958), 300p.

[17] W.E. Ricker, "Computation and Interpretation of Biological Statistics of Fish Population", Ottawa: Dept. of the Environment, Fisheries and Marine Service, 382p, 1975.

[18] Z.E. Schnabel, The estimation of the total fish population of a lake, *Am. Math. Monthly,* **45** (1938), 348–52.

[19] C.J. Schwarz, A.N. Arnason, A general methodology for the analysis of capture-recapture experiments in open populations, *Biometrics*, **52** (1996), 860–73.

[20] P.J. Smith, Bayesian methods for multiple capture-recapture surveys, *Biometrics*, **44** (1988), 1177–1189.

[21] P.J. Smith, Bayesian analysis for a multiple capture-recapture model, *Biometrika*, **78** (1991), 399–408.

[22] X. Wang, "Bayesian Analysis of Capture-recapture Models", Ph.D. Dissertation, University of Missouri, Columbia. 2002.

[23] R. Yang, J.O. Berger, Estimation of a covariance matrix using the reference prior, *Annal. Statist.*, **22**, No. 3 (1994), 1195–1211.

[24] R. Yang, M.H. Chen, Bayesian analysis for random coefficient regression models using noninformative priors, *Journal Multivariate Analysis*, **55**, No. 2 (1995), 283–311.

[25] R. Yang, D. Pyne, "Bayesian analysis with mixed model in unbalanced case", Ph.D. Dissertation, Purdue University, 1996.

[26] H. P. Zacharias, "Aplicação do algoritmo Gibbs sampling no processo de captura-recaptura", Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2000.