Trends in Computational and Applied Mathematics

Trends in Computational and Applied Mathematics, **25**, (2024), e01592
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
Online version ISSN 2676-0029 www.scielo.br/tcam
ARTIGO ORIGINAL
doi: 10.5540/tcam.2024.025.e01592

Desigualdade Variacional da Equação Não-Linear Degenerada de Vibrações da Viga

H. S. FERREIRA[1*] e D. C. PEREIRA[2]

Recebido em 30 de maio de 2021 / Aceito em 22 de outubro de 2023

RESUMO. Estudamos neste artigo existência e unicidade de solução fraca global para a inequação variacional não linear degenerada

$$\left\|\begin{array}{l} K(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\|u\|^2)(-\Delta u) + u' \geq f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ u_{\lfloor_\Sigma} = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\lfloor_\Sigma = 0 \end{array}\right.$$

em que $K(x,t)$ é uma função definida em $Q = \Omega \times]0,T[$, $K(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in Q$, M uma função real contínua com propriedades específicas e f pertence a classe de funções $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. Usaremos o Método de Faedo-Galerkin, operador monótono e Compacidade para provar a existência e a unicidade de soluções fracas.

Palavras-chave: operador de penalização, desigualdade variacional, método de Galerkin.

1 INTRODUÇÃO

O estudo das desigualdades variacionais foi iniciado por Stampacchia [12], Lions-Stampacchia [8], Brezis [2] e também por Kinderlehrer-Stampacchia [6]. Em Lions [7], nós podemos encontrar o mesmo tipo de problema para um operador não linear do tipo hiperbólico, elíptico e parabólico mas em um caso não degenerado. A degeneração de equação hiperbólica não linear traz dificuldades no caso de domínio cilíndrico, pois a geometria do domínio afeta a exatidão do problema. A existência e unicidade de soluções fracas regulares local e global em domínios cilíndricos para outros modelos encontramos em vários trabalhos, por exemplo, [5], [9], [12], [8], [6], [3] e [4].

*Autor correspondente: Hercio da Silva Ferreira – E-mail: hercio@ufpa.br
[1]Instituto de Educação Matemática e Científica, IEMCI, Universidade Federal do Pará ,UFPA, Rua Augusto Corrêa, 01, 66075-110 Belém, PA, Brasil – E-mail: hercio@ufpa.br https://orcid.org/0000-0003-3417-0174
[2]Departamento de Matemática, Universidade do Estado do Pará, UEPA, Travessa Djalma Dutra, s/n, Telégrafo, 66050-540 Belém, PA, Brasil – E-mail: ducival@uepa.br https://orcid.org/0000-0003–4511-0185

O movimento transversal de viga extensível de comprimento L, com extremos presos a uma certa distância fixa pode ser modelado pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(\sigma + \int_0^L u_\xi^2(\xi,t)d\xi\right)\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{1.1}$$

que foi proposto por Woinowsky-Krieger [13], onde ρ é uma constante positiva, σ uma constante não necessariamente positiva e o termo não-linear representa a mudança na tensão da viga devido a sua extensibilidade.

A formulação abstrata de (1.1) é dada pela equação

$$u'' + \rho A^2 u + M(|A^{\frac{1}{2}} u|^2) A u = 0 \tag{1.2}$$

Onde A é um operador auto-adjunto não limitado de um espaço de Hilbert H e M uma função real.

Encontramos no capítulo 3 de Pereira [11] o estudo da existência e unicidade de solução do problema misto no cilindro finito $Q = \Omega \times]0,T[$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, para a equação

$$k(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)(-\Delta u) + u' = 0 \tag{1.3}$$

Onde $K(x,t)$ é uma função definida em Q, $K(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in Q$, M uma função contínua e outras propriedades, o qual é um problema relacionado com a equação (1.1).

O objetivo principal deste trabalho é estudar a existência e unicidade de soluções fracas globais para o problema (P), abaixo:

$$(P) \left\| \begin{array}{l} K(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\|u\|^2)(-\Delta u) + u' \geq f \text{ em Q} \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \\ u_{\lfloor_\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}_{\lfloor_\Sigma} = 0 \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Trata-se de uma desigualdade variacional baseada na equação (1.3), onde Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ regular. Para cada número real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega \times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$, $K(x,t) \geq 0$ é uma função definida em Q, M é uma função real com certas propriedades e $f \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

2 RESULTADOS E HIPÓTESES

Seja $N = \{v \in L^2(\Omega); v \geq 0 \text{ q.s em } \Omega\}$ o conjunto fechado e convexo de $L^2(\Omega)$ com $0 \in N$ o qual tem a seguinte propriedade:

Existe uma contração $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é, $|\rho(y_1) - \rho(y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, com $\rho(0) = 0$, tal que $(P_N v)(x) = \rho(v(x))$, $\forall\, v \in L^2(\Omega)$, onde P_N é o operador projeção de $L^2(\Omega)$ em N.

Definição 2.1. *Definimos o operador de penalização* $\beta : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, *por* $\beta = I - P_N$, *isto é,* $\beta v = v - P_N v$, $\forall\, v \in L^2(\Omega)$, *ou ainda,* $(\beta v)(x) = v(x) - \rho(v(x))$

Proposição 2.1. *Afirmamos que β é monótono, ou seja, $(\beta u - \beta v, u - v) \geq 0$ e Lipschitziano, isto é, $|\beta(u) - \beta(v)| \leq \alpha|u - v|$.*

Proposição 2.2. *Sendo β lipschitziano, então β é contínuo e $\beta(S)$ é limitado para qualquer subconjunto limitado $S \subset L^2(\Omega)$. Além disso, consideraremos também que $\beta(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in N$, isto é,* $\ker \beta = N$

Proposição 2.3. *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E. Então:*

(I) $[x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')] \Longleftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall f \in E']$

(II) Se $x_n \to x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$

(III) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

(IV) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \to f$ fortemente em E'(isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ Demonstração: veja [2]

Proposição 2.4. *Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sucessão em E'.*

(I) $[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)] \Longleftrightarrow [\langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in E]$

(II) Se $f_n \to f$ forte, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$

(III) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$

(IV) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\|$ esta limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(V) Se Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$ e se $x_n \to x$ fortemente em E, então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$. Demonstração: veja [2]

Proposição 2.5. *Seja $N = \{v \in L^2(\Omega);\ v \geq 0$ q.s em $\Omega\}$ um convexo fechado do $L^2(\Omega)$. Portanto, se $w \in L^2(\Omega)$, então existe um único $P_N w \in N$ tal que*

i) $|w - P_N w| \leq |w - v|, \forall v \in N$.

A desigualdade i) é equivalente a

ii) $P_N w \in N$

$(w - P_N w, v - P_N w) \leq 0, \forall v \in N$, em que $P_N w$ é a projeção de w sobre N.

Demonstração: veja [2]

Proposição 2.6. *(Desigualdade de Gronwall): Se $g : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas tais que $g(t) \geq 0$; $h(t) \geq 0$ e $g(t) \leq C_0 + C \displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s) g(s) ds$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ com $C_0 \geq 0$ e $C > 0$, então $g(t) \leq C_0 e^{C \int_{t_0}^{t} h(s) ds}$.*

Assumiremos as seguintes hipóteses:

$\mathscr{H}_1)$ $K \in C^1(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ com $K(x, t) \geq 0$, $\forall$ $(x, t) \in \Omega \times]0, T[$ e $\forall$ $\gamma > 0$ tal que $K(x, 0) \geq \gamma > 0$

$\mathscr{H}_2$) $\left|\dfrac{\partial K}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}} \leq \alpha + C(\alpha)K, \forall \alpha > 0$

$\mathscr{H}_3$) $M \in C^1([0,\infty])$ com $M(\lambda) \geq -\sigma, \forall \lambda \geq 0; 0 < \sigma < \lambda_1$; sendo λ_1 o primeiro valor próprio de $\Delta^2 u - \lambda(-\Delta u) = 0$. [1]

$\mathscr{H}_4$) Seja $\beta : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ o operador de penalização definido por $\beta = I - P_N$, onde P_N é o operador projeção de $L^2(\Omega)$ em N, dado por $(P_N v)(x) = \rho(v(x)), \forall v \in L^2(\Omega)$.

3 RESULTADO PRINCIPAL

Teorema 3.1. *Nas hipóteses* $\mathscr{H}_1$ *a* $\mathscr{H}_4$*, se* $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega), u_1 \in H_0^2(\Omega) \cap N, f \ e f' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$*, então existe uma única função* $u : [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ *tal que:*

A1T) $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))$

A2T) $u' \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)); u'(t) \in N$ *q.t.p* $t \in (0,T)$

A3T) $u'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

A4T) $\displaystyle\int_0^T (k(x,t)u'', v-u')dt + \int_0^T (-\Delta u, -\Delta(v-u'))dt + \int_0^T M(\|u\|^2)(-\Delta u, v-u')dt + \int_0^T (u', v-u')dt \geq \int_0^T (f, v-u')dt \forall v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), v(t) \in N$ *q.t.p* $t \in (0,T)$

A5T) $u(0) = u_0$ *e* $u'(0) = u_1$

O teorema (3.1) será uma consequência do lema (3.1)

Lema 3.1. *Nas mesmas condições do teorema (3.1), para cada* $0 < \varepsilon < 1$ *e* $\delta > 0$ *existe uma função* $u_{\varepsilon\delta}$ *definida em* Q *tal que:*

A1L1) $u_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))$

A2L1) $u'_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$

A3L1) $u''_{\varepsilon\delta} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

A4L1) $(k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta} + \Delta^2 u_{\varepsilon\delta} + M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}) + u'_{\varepsilon\delta} + \dfrac{1}{\delta}\beta(u'_{\varepsilon\delta}) = f$ *em* $L^2(Q)$

A5L1) $u_{\varepsilon\delta}(0) = u_0$ *e* $u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_1$

[1] De acordo com Mikhlin [10] temos satisfeito que:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^2(\Omega)} \frac{|-\Delta u|^2}{|-\Delta^{1/2} u|^2} > 0 \tag{2.1}$$

3.1 Problema Aproximado Perturbado e Penalizado

Considere o problema pertubado penalizado

$(k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta} + \Delta^2 u_{\varepsilon\delta} + M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}) + u'_{\varepsilon\delta} + \dfrac{1}{\delta}\beta(u'_{\varepsilon\delta}) = f$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, fixados $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon \in (0,1)$ e $\delta > 0$.

Seja $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de $H_0^2(\Omega)$ formada pelas auto-funções de $-\Delta$, isto é, $-\Delta w_\nu = \lambda_\nu w_\nu, w_\nu \mid_\Gamma = \dfrac{\partial w_\nu}{\partial \eta} \mid_\Gamma = 0$ e$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... <$ divergindo para $+\infty$.

A seguir usaremos o método de Faedo Galerkin para obter soluções $u_{\varepsilon\delta}$ do problema pertubado penalizado.

Considere $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço gerado pelas m primeiras funções $(w_\nu)_{\nu\in N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere a função:

$u_{\varepsilon\delta m}(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon\delta m j}(t) w_j(x) \in V_m$ tal que

$$(PA) \left\| \begin{array}{l} ((k+\varepsilon)u'''_{\varepsilon\delta m}(t), w_j) + (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}, -\Delta w_j) + M(|u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}, w_j) + \\ (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w_j) + \dfrac{1}{\delta}(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), w_j) = (f, w_j), \forall w_j \in V_m \\ u_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ em } H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \\ u'_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ em } H_0^2(\Omega) \cap N \text{ onde } N = \{v \in L^2(\Omega); v \geq 0 \text{ q.s em } \Omega\} \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Pelo Teorema de Carathéodory o sistema (3.1) tem solução local em $[0,t_m)$, $0 < t_m < T$. As estimativas a priori nos permitirão extender a solução aproximada $u_{\varepsilon\delta m}(t)$ para o intervalo $[0,T]$.

3.2 Estimativas à priori

3.2.1 Estimativa I

Fazendo $w_j = u'_{\varepsilon\delta m}(t)$ em (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} &((K+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + \\ &M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + (u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + \\ &\frac{1}{\delta}(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = (f(t), u'_{\varepsilon\delta m}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Usando propriedades da função M, a monoticidade do β, a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$, a observação (2.1) e as hipóteses $(\mathscr{H}_1)$ a $(\mathscr{H}_4)$ em (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} &(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon |u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right) |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \\ &(1-\alpha)\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C_0 + C(\alpha)\int_0^t (k, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)) ds \end{aligned}$$

sendo $0 < \alpha < 1$ e C_0 constante positiva independente de ε, δ, m e t.

E pela desigualdade de Gronwall (2.6):

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right)|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C, \tag{3.3}$$

sendo C constante positiva independente de ε, δ, m e t.

Portanto, concluimos que as seguintes sequências são limitadas:

Est1–a) $(K^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

Est1–b) $(\sqrt{\varepsilon}u'_{\varepsilon\delta m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

Est1–c) $(u_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$

Est1–d) $(u'_{\varepsilon\delta m}(t))$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Est1–e) $(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$ é limitado em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

3.2.2 Estimativa II

Fazendo $w = -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)$ em (3.1), usando a 1ª Identidade de Green, equivalências de normas, desigualdade de Cauchy-Schwartz, desigualdade elementar e as hipóteses $(\mathscr{H}_1)$ a $(\mathscr{H}_4)$, obtém-se

$$\begin{aligned}&(ku''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon(u''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &+ M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + (u'_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) +\\ &\frac{1}{\delta}(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = (f, -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))\end{aligned} \tag{3.4}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned}&(ku''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((ku''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &(u''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = \varepsilon((u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &(u'_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &(f, -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((f, u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\end{aligned}$$

Fazendo-se as devidas substituições em (3.4), obtemos:

$$\begin{aligned}&((ku''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon((u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\\ &+ M(\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) +\\ &\frac{1}{\delta}((\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = ((f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))\end{aligned} \tag{3.5}$$

Lema 3.2. *Se g:* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função Lipschitziana e não decrescente com* $g(0) = 0$*, então* $(g(u), -\Delta u) \geq 0, \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. **Proof.** Ver [2] e [1] □

Portanto, pelo lema (3.2) acima, $(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) \geq 0$. Segue de (3.5) que:

$$\begin{aligned}
&((Ku''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon((u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))) \\
&+ M(\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) \leq ((f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que:

$\left|\left(\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right)\right|_{\mathbb{R}} \leq \left(\left(\left|\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right) \leq ((\alpha + C(\alpha)K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) =$
$\alpha\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + C(\alpha)((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)))$

Portanto, integrando (3.6) de 0 a t, obtemos:

$$\begin{aligned}
&((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds \leq \\
&\int_0^t \|f(s)\|^2 ds + C(\alpha)\int_0^t ((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)))ds + \\
&2\int_0^t |M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}} \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\| \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\| ds + |((K(0), u^2_{1m}))|_{\mathbb{R}} + \varepsilon\|u_{1m}\|^2 + \\
&\|\Delta u_{0m}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Como já verificamos, $(u_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$. Logo, $\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2$ é limitada. Portanto, pela continuidade da M, podemos tomar

$$C_1 = \max_{0<\lambda<\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2} |M(\lambda)|_{\mathbb{R}}.$$

Podemos então escrever:

$$2\int_0^t |M(\|u_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2)|_{\mathbb{R}} \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\| \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\| ds \leq 2\int_0^t C_1 \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\| \|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\| ds.$$

Além disso, usando a desigualdade elementar, temos

$$\frac{2C_1\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\|}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}\|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\| \leq \frac{C_1^2\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2}{\alpha} + \alpha\|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2.$$

Substituindo estes resultados em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned}
&((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds \leq \\
&\int_0^t \|f(s)\|^2 ds + C(\alpha)\int_0^t ((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)))ds + \int_0^t \frac{C_1^2}{\alpha}\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds + \\
&\int_0^t \alpha\|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds + |((K(0), u^2_{1m}))|_{\mathbb{R}} + \varepsilon\|u_{1m}\|^2 + \|\Delta u_{0m}\|^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Note que (3.1) garante que $\|\Delta u_{0m}\|$ e $\|u_{1m}\|$ são limitadas e, além disso, observando ($\mathscr{H}_1$), temos que

$$|((K(0),u_{1m}^2))|_{\mathbb{R}} \leq \|K(0)\|\|u_{1m}^2\| \leq$$
$$\left(\sup_{x\in\Omega} ess\|K(0)\|\right)\|u_{1m}^2\| \longrightarrow \left(\sup_{x\in\Omega} ess\|K(0)\|\right)\|u_1\|^2.$$

Portanto, $|((K(0),u_{1m}^2))|_{\mathbb{R}}$ é limitado. Note também que $\|f(t)\|^2$ é limitado, pois $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Dessa maneira, podemos reescrever (3.8):

$$((K,u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 ds \leq C_2 +$$
$$C_3\int_0^t \left[((K,u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2\right] ds, \text{com } 0<\alpha<\frac{1}{2} \tag{3.9}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (2.6):

$$((K,u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 ds \leq C_4 \tag{3.10}$$

Onde C_4 é constante positiva independente de ε, δ, m e t. Concluimos então que:

Est2–a) $(k^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

Est2–b) $(\sqrt{\varepsilon}u'_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

Est2–c) $(u'_{\varepsilon\delta m}(t))$ é limitado em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

Est2–d) $(u_{\varepsilon\delta m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))$

3.2.3 Estimativa III

Derivando a equação aproximada em PA (3.1) em relação a t, fazendo $w = u''_{\varepsilon\delta m}(t)$ e aplicando a 1ª identidade de Green, obtemos

$$(Ku'''_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + (\varepsilon u'''_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + \left(\frac{\partial K}{\partial t}u''_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)\right) +$$
$$(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)) +$$
$$2(u_{\varepsilon\delta m}(t),-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))M'(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)) +$$
$$(u''_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + \frac{1}{\delta}([\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))]',(u'_{\varepsilon\delta m}(t))') = (f'(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t)) \tag{3.11}$$

Levando-se em consideração a monoticidade do β, podemos reescrever (3.11):

$$\frac{d}{dt}\left[(K,u''_{\varepsilon\delta)m}(t) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2\right] + 2|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 \leq 2\left|(f'(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t))\right|_{\mathbb{R}} +$$
$$\left|\left(\frac{\partial K}{\partial t},u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right|_{\mathbb{R}} + 2\;|M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}|(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}} +$$
$$4\;|(u_{\varepsilon\delta m}(t),-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}}|M'(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}|(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t),u''_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}} \tag{3.12}$$

Além disso, por $(\mathscr{H}_2)$,

$$\left|\left(\frac{\partial k}{\partial t}, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right|_{\mathbb{R}} \leq \alpha|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + C(\alpha)(k, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t))$$

Portanto aplicando este resultado, a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a desigualdade elementar e integrando de 0 a t (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}
&(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + 2\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 ds \leq \\
&\int_0^t |f'(s)|^2 ds + \int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds + \alpha \int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds + C(\alpha)\int_0^t (K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(s)) ds + \\
&2C_1 \int_0^t |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(s)||u''_{\varepsilon\delta m}(s)| ds + 4C_5 \int_0^t |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(s)||u_{\varepsilon\delta m}(s)||\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)||u''_{\varepsilon\delta m}(s)| ds + \\
&|K(0)||u''_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 + \Delta u_{1m}(t)|^2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Considerando-se que: $|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|, |k(0)||u''_{\varepsilon\delta m}(0)|, |u_{\varepsilon\delta m}(t)|, |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|$ e $|\Delta u_{1m}|$ são limitadas, podemos reescrever (3.13):

$$\begin{aligned}
&(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq \\
&C_6 + C_7 \int_0^t [(k, u''^2_{\varepsilon\delta m}(s)) + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2] ds
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (2.6) neste último resultado, obtemos $(k, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C_8$, em que C_8 é constante positiva independente de ε, δ, m e t. Podemos, então, afirmar que:

Est3–a) $(k^{1/2}u''_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

Est3–b) $(\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

Est3–c) $(u'_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$

Est3–d) $(u''_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Est3–e) $(ku''_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

3.3 Passagem ao Limite

Das estimativas anteriores, (Est2–d), (Est3–c), (Est3–d) e (Est1–e)

$(u_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))$

$(u'_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$

$(u''_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

$(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}))$ é limitado em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Podemos então extrair uma subsequência de $(u_{\varepsilon\delta m})$, a qual denotaremos por $(u_{\varepsilon\delta\nu})$, tal que

L1) $u_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))$

L2) $u'_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$

L3) $u''_{\varepsilon\delta\nu} \rightharpoonup u''_{\varepsilon\delta}$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

L4) $\Delta u_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

L5) $\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} \sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

L6) $ku''_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} ku''_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

L7) $\beta(u'_{\varepsilon\delta\nu}) \rightharpoonup \beta(u'_{\varepsilon\delta})$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Convergência da função M:

Lema da Compacidade de Aubin-Lions: Sejam $1 < p_0, p_1 < \infty$ e B_0, B, B_1 espaços de Banach sendo que B_0 e B_1 são reflexivos tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ ($\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta). Para $0 < T < \infty$, consideremos o espaço

$W = \{w;\ w \in L^{p_0}(0,T;B_0)\ e\ w' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$, com a norma

$\|w\|_W = \|w\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|w\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$. Então:

(I) W é um espaço de Banach

(II) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0,T;B)$

Dem.: Ver [7]

Se fizermos $B_0 = H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, $B = H_0^1(\Omega)$, $B_1 = L^2(\Omega)$ e $W(0,T) = \{w; w \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))\ e\ w' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$ com a norma

$\|w\|_{W(0,T)} = \|w\|_{L^2(0,T;H_0^2\cap H^3(\Omega))} + \|w'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$

concluimos que,

i) $W(0,T) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

ii) $(u_{\varepsilon\delta\nu})$ é limitada em $W(0,T)$

pois

- $u_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))$
- $u'_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$

De i) e ii), concluimos que existe uma subsequência de $(u_{\varepsilon\delta\nu}\ )$, que continuaremos denotando por $(u_{\varepsilon\delta\nu}\ )$, tal que

iii) $u_{\varepsilon\delta\nu} \longrightarrow u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

iv) $u'_{\varepsilon\delta\nu} \longrightarrow u'_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

De (iii) e (iv) e da continuidade da função M, $M(\|u_{\varepsilon\delta\nu}\|^2) \longrightarrow M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)$

De $\Delta u_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\Delta u_{\varepsilon\delta\nu} \rightharpoonup \Delta u_{\varepsilon\delta}$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Portanto, podemos concluir também que

$$M(\|u_{\varepsilon\delta\nu}\|^2)\Delta u_{\varepsilon\delta\nu} \rightharpoonup M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)\Delta u_{\varepsilon\delta} \; em \; L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.14}$$

Isto conclui a convergência da função M.

Multiplicando a equação aproximada em (3.1) por $\theta \in \mathscr{D}(0,T)$, fixando m_0 e integrando de 0 a T, obtemos, para $\nu \geq m_0$: $\int_0^T ((k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta\nu}(t),w)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\varepsilon\delta\nu}(t),-\Delta w)\theta(t)dt +$
$\int_0^T M(\|u_{\varepsilon\delta\nu}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta\nu}(t),w)\theta(t)dt + \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta\nu}(t),w)\theta(t)dt +$
$\frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta\nu}(t)),w)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),w)\theta(t)dt, \forall\, w \in V_m$ e $\forall\, \theta \in \mathscr{D}(0,T)$

Tomando o limite com $\nu \longrightarrow \infty$ e observando as convergências (L_1) a (L_7) e a convergência da função M, obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^T ((k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t),-\Delta w)\theta(t)dt +\\ &\int_0^T M(\|u_{\varepsilon\delta}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta(t)dt + \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta(t)dt +\\ &\frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t)),w)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),w)\theta(t)dt, \forall w \in V_m e \forall \theta \in \mathscr{D}(0,T)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Lembrando que $z(x,t) = w(x)\theta(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, podemos reescrever (3.15):

$\int_0^T ((k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta}(t) + \Delta^2 u_{\varepsilon\delta}(t) + M(\|u_{\varepsilon\delta}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t)) + u'_{\varepsilon\delta}(t) + \frac{1}{\delta}\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t)),z)dt =$
$\int_0^T (f(t),z)dt, \forall z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Segue daí que:

$$(k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta} + \Delta^2 u_{\varepsilon\delta} + M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}) + u'_{\varepsilon\delta} + \frac{1}{\delta}\beta(u'_{\varepsilon\delta}) = f \; em \; L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.16}$$

Concluimos de (3.16) que $\Delta^2 u_{\varepsilon\delta} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, isto é , $\Delta^2 u_{\varepsilon\delta}(t) \in L^2(\Omega)$, ou ainda, $u_{\varepsilon\delta}(t) \in H^4(\Omega)$ e desde que $u_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))$, então

$$u_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \tag{3.17}$$

3.4 Condições Iniciais

Da convergência (L2), obtemos $u'_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, podemos afirmar que:

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\delta\nu}(t),z)dt \longrightarrow \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t),z)dt, \forall\, z \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.18}$$

Fazendo $z(x,t) = w(x)\theta(t)$, com $w \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, em (3.17), obtemos: $\int_0^T (u'_{\varepsilon\delta\nu}(t),w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta(t)dt$. Integrando por partes:

$$-(u_{0\nu},w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta\nu}(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(u_{\varepsilon\delta}(0),w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt \tag{3.19}$$

Da convergência (L1), obtemos $u_{\varepsilon\delta\nu} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, podemos afirmar que

$$\int_0^T (u_{\varepsilon\delta\nu}(t),z)dt \longrightarrow \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),z)dt, \forall\, z \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.20}$$

Assim, observando que $z(x,t) = w(x)\theta'(t) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, podemos reescrever (3.20):

$$\int_0^T (u_{\varepsilon\delta\nu}(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt, \forall w \in L^2(\Omega) \tag{3.21}$$

Sabemos também que,

$u_{\varepsilon\delta\nu}(0) = u_{0\nu} \longrightarrow u_0$ em $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \Longrightarrow u_{0\nu} \longrightarrow u_0$ em $L^2(\Omega) \Longrightarrow u_{0\nu} \rightharpoonup u_0$ em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$(u_{0\nu},w) \longrightarrow (u_0,w) \forall\, w \in L^2(\Omega) \tag{3.22}$$

Portanto, de (3.21) e de (3.22), podemos escrever:

$$-(u_{0m},w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta m}(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(u_0,w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt \tag{3.23}$$

Além disso, da unicidade dos limites, de (3.19) e (3.23), concluimos que:
$(u_{\varepsilon\delta}(0),w) = (u_0,w)$, e portanto, $u_{\varepsilon\delta}(0) = u_0$. Da mesma forma podemos concluir que $u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_1$

Isto conclui a demonstração do Lema (3.1).

3.5 Demonstração do Teorema 3.1

3.5.1 Existência de Soluções

Com base nas proposições (2.3) e (2.4), nas convergências de (L1) a (L7) e em (3.17), obtemos

$$\|u_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))} \leq \liminf \|u_{\varepsilon\delta\nu}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))} \leq C_9 \tag{3.24}$$

$$\|u'_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} \leq \liminf \|u'_{\varepsilon\delta\nu}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)} \leq C_{10} \tag{3.25}$$

$$\|u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|u''_{\varepsilon\delta\nu}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{11} \tag{3.26}$$

$$\|\Delta u_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\Delta u_{\varepsilon\delta\nu}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{12} \tag{3.27}$$

$$\|\Delta^2 u_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\Delta^2 u_{\varepsilon\delta\nu}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{13} \tag{3.28}$$

$$\|\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta\nu}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{14} \tag{3.29}$$

$$\|Ku''_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|ku''_{\varepsilon\delta\nu}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{15} \tag{3.30}$$

$$\|\beta(u'_{\varepsilon\delta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\beta(u'_{\varepsilon\delta\nu})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{16} \tag{3.31}$$

Em que C_i são constantes positivas independentes de ε, δ, ν e t para $i \in \{9, ..., 16\}$

De (3.24) a (3.31), podemos afirmar que existe uma subsequência de $(u_{\varepsilon\delta})$ que continuaremos denotando por $(u_{\varepsilon\delta})$, tal que

$$u_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_\delta \ em\ L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \tag{3.32}$$

$$u'_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_\delta \ em\ L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{3.33}$$

$$u''_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u''_\delta \ em\ L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.34}$$

$$\Delta u_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta u_\delta \ em\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.35}$$

$$\Delta^2 u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \Delta^2 u_\delta \ em\ L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.36}$$

$$\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} \sqrt{\varepsilon}u''_\delta \ em\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.37}$$

$$Ku''_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} ku''_\delta \ em\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.38}$$

$$\beta(u'_{\varepsilon\delta}) \rightharpoonup \beta(u'_\delta) \ em\ L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.39}$$

Novamente, usando o Lema da Compacidade de Aubin-Lions, encontramos uma convergência forte para $(u_{\varepsilon\delta})$, isto é,

$$u_{\varepsilon\delta} \longrightarrow u_\delta \ emL^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.40}$$

Decorre de (3.32) a (3.39) e de (3.40) que tomando o limite $\varepsilon \longrightarrow 0$ na equação (A4L1) do Lema (3.1), obtemos

$$(ku''_\delta, z) + (-\Delta u_\delta, -\Delta z) + M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, z) + (u'_\delta, z) + \frac{1}{\delta}\beta(u'_\delta, z) = (f, z),$$
$$\forall\, z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.41}$$

Repetindo o processo usado de (3.24) a (3.40), podemos afirmar que existe uma subsequência de (u_δ), que continuaremos denotando por (u_δ), tal que

$$u_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} u \ emL^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \tag{3.42}$$

$$u'_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} u' \ emL^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{3.43}$$

$$u''_\delta \rightharpoonup u'' \ emL^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.44}$$

$$\Delta u_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta u \ emL^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.45}$$

$$\Delta^2 u_\delta \rightharpoonup \Delta^2 u \ emL^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.46}$$

$$\sqrt{\varepsilon}u''_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} \sqrt{\varepsilon}u'' \; em L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.47}$$

$$ku''_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} ku'' \; em L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.48}$$

$$\beta(u'_\delta) \rightharpoonup \beta(u') \; em L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.49}$$

Portanto, concluimos de (3.42), (3.43) e (3.44) que (A1T), (A2T) e (A3T) do Teorema (3.1) são satisfeitos. Resta-nos mostrar que u é solução da desigualdade (A4T) e que $u'(t) \in N$ q.t.p $t \in (0,T)$.

1º) u é solução da desigualdade (A4T) do Teorema (3.1). De fato,

Na equação (3.41), fazendo $z = v - u'_\delta,\; v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $v(t) \in N$ q.t.p $t \in [0,T]$ e integrando de 0 a T, obtemos:

$$\int_0^T (ku''_\delta, v-u'_\delta)dt + \int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta(v-u'_\delta))dt + \int_0^T M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, v-u'_\delta)dt +$$
$$\int_0^T (u'_\delta, v-u'_\delta)dt + \int_0^T \frac{1}{\delta}(\beta(u'_\delta), v-u'_\delta)dt = \int_0^T (f, v-u'_\delta)dt \forall z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.50}$$

Note que $(\beta(u'_\delta), v-u'_\delta) = (\beta(u'_\delta)-\beta(v), v-u'_\delta) \le 0$, pois $v(t) \in N$ e β é monótono. Logo, podemos reescrever a equação (3.50) acima:

$$\int_0^T (ku''_\delta, v-u'_\delta)dt + \int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta(v-u'_\delta))dt + \int_0^T M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, v-u'_\delta)dt +$$
$$\int_0^T (u'_\delta, v-u'_\delta)dt \ge \int_0^T (f, v-u'_\delta)dt. \tag{3.51}$$

Agora, fazendo a passagem do limite quando $\delta \longrightarrow 0$ em (3.51) e considerando a estimativa I, a continuidade de M e o Lema da compacidade de Aubin-Lions, concluimos que (3.51) converge para (A4T):

$$\int_0^T (k(x,t)u'', v-u')dt + \int_0^T (-\Delta u, -\Delta(v-u'))dt + \int_0^T M(\|u\|^2)(-\Delta u, v-u')dt + \int_0^T (u', v-u')dt \ge$$
$$\int_0^T (f, v-u')dt \forall v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), v(t) \in N \text{ q.t.p } t \in (0,T)$$

Isto mostra que u é solução da desigualdade (A4T) do Teorema (3.1).

2º) $u'(t) \in N$ q.t.p $t \in (0,T)$. De fato, da estimativa I, sabemos que:

$$0 \le \frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t))dt \le C \tag{3.52}$$

Da proposição (2.5) e da definição (2.1), $|\beta(w)|^2 \le (\beta(w), w)$.

Portanto, fazendo $w = u'_{\varepsilon\delta m}(t)$ e integrando de 0 a T, obtemos por (3.52): $\int_0^T |\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))|^2 dt \leq \int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t))dt \leq \delta C$

Tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, $\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_0^T |\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))|^2 dt \leq \delta C$

Pelo Lema da compacidade de Aubin - Lions,

$$u'_{\varepsilon\delta m} \longrightarrow u'_{\varepsilon\delta} \; em \; L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.53}$$

Pela continuidade do β, $\int_0^t |\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))|^2 dt \longrightarrow \int_0^t |\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t))|^2 dt$,para $m \longrightarrow \infty$

Portanto,

$$\int_0^t |\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t))|^2 dt \leq \delta C \tag{3.54}$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ em (3.54) e seguindo o mesmo raciocínio para a sequência $(u_{\varepsilon\delta})$ obtemos

$$0 \leq \int_0^t |\beta(u'_{\delta}(t))|^2 dt \leq \delta C \tag{3.55}$$

Agora, tomando o limite quando $\delta \longrightarrow 0$ em (3.55), obtemos

$$\int_0^T |\beta(u'_{\delta}(t))|^2 dt \longrightarrow 0, quando \; \delta \longrightarrow 0 \tag{3.56}$$

Segue que

$$\beta(u'_{\delta}(t)) \longrightarrow 0 \; em \; L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.57}$$

Pela continuidade da β, temos

$$\beta(u'_{\delta}(t)) \longrightarrow \beta(u'(t)) \; em \; L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.58}$$

Por (3.57) e (3.58) e pela unicidade dos limites, $\beta(u'(t)) = 0$. O que implica dizer que $u'(t) \in N$ q.t.p $t \in (0,T)$

3.5.2 Unicidade da solução

Sejam u_1 e u_2 soluções de (A4T) no teorema (3.1). Logo podemos escrever

$$\begin{aligned}&\int_0^T (k(x,t)u''_1, v-u'_1)dt + \int_0^T (-\Delta u_1, -\Delta(v-u'_1))dt + \\ &\int_0^T M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_1, v-u'_1)dt + \int_0^T (u'_1, v-u'_1)dt \geq \int_0^T (f, v-u'_1)dt\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^T (k(x,t)u''_2, v-u'_2)dt + \int_0^T (-\Delta u_2, -\Delta(v-u'_2))dt + \\ &\int_0^T M(\|u_2\|^2)(-\Delta u_2, v-u'_2)dt + \int_0^T (u'_2, v-u'_2)dt \geq \int_0^T (f, v-u'_2)dt\end{aligned} \tag{3.60}$$

$\forall v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), v(t) \in N$ q.t.p $t \in (0,T)$

Fazendo $v = u_2'$ na desigualdade (3.59), e $v = u_1'$ na desigualdade (3.60) e somando os resultados, sendo t um ponto arbitrário de $(0,T)$,teremos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t (k(x,t)(u_1''-u_2''),u_2'-u_1')ds + \int_0^t (-\Delta(u_1-u_2),-\Delta(u_2'-u_1'))dt+\\&\int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_1,u_2'-u_1')ds - \int_0^t M(\|u_2\|^2)(-\Delta u_2,u_2'-u_1')ds+\\&\int_0^t (u_1'-u_2',u_2'-u_1')dt \geq 0\end{aligned} \tag{3.61}$$

Fazendo $u_2 - u_1 = w$, somando e subtraindo $\int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_2,w')ds$ em (3.61), obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t (K(x,t)w'',w')ds + \int_0^t (\Delta w,\Delta w')ds + \int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta w,w')ds+\\&+\int_0^t (w',w')ds \leq \int_0^t [M(\|u_1\|^2)-M(\|u_2\|^2)](-\Delta u_2,w')ds\end{aligned} \tag{3.62}$$

Segue de (3.62) que:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{d}{ds}[(K,w'^2)+|\Delta w|^2+M(|u_1|^2)\ |w|^2]ds + 2\int_0^t |w'|^2 ds \leq\\&2\int_0^t \left|M(|u_1|^2)-M(|u_2|^2)\right|_{\mathbb{R}} |\Delta u_2|\ |w'|ds+\\&2\int_0^t |u_1|\ |u_1'|\ |M(|u_1|^2)|_{\mathbb{R}}|w|^2 ds + \int_0^t \alpha|w'|^2 ds + C(\alpha)\int_0^t (K,w'^2)ds\end{aligned} \tag{3.63}$$

Sabemos que $|u(t)|$, $|u'(t)|$ e $|\Delta u(t)|$ são limitadas. Sabemos também pela hipótese $(\mathscr{H}_3)$ que a função M é continuamente diferenciável em $[0,\infty)$. Isto nos permite aplicar o Teorema do Valor Médio:

$$\left|M(|u_1|^2)-M(|u_2|^2)\right|_{\mathbb{R}} |\Delta u_2|\ |w'| \leq \frac{1}{2}|w'|^2 + \frac{C_9}{2}\ |\Delta w|^2 \tag{3.64}$$

Além disso,

$$|u_1|\ |u_1'|\ \left|M(|u_1|^2)\right|_{\mathbb{R}}\ |w|^2 \leq C_{10}\ |w|^2 \leq \frac{C_{11}}{2}\ |\Delta w|^2 \tag{3.65}$$

Agora, aplicando (3.64) e (3.65) em (3.63), obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{d}{ds}[(K,w'^2)+|\Delta w|^2+M(\|u_1\|^2)\|w\|^2]ds + 2\int_0^t |w'|^2 ds \leq\\&\int_0^t (\alpha|w'|^2+C_{12}|\Delta w|^2)ds + \int_0^t C_{13}|\Delta w|^2 ds + \int_0^t |w'|^2 ds+\\&C(\alpha)\int_0^t (K,w'^2)ds\end{aligned} \tag{3.66}$$

Note que $w(0) = w'(0) = 0$. Logo, aplicando em (3.66), obtemos:

$$(k, w'^2) + |\Delta w|^2 + M(\|u_1\|^2)\|w\| + (1-\alpha)\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t [C(\alpha)(k, w'^2) + C_{14}|\Delta w|^2] ds \tag{3.67}$$

com $0 < \alpha < 1$ e C_i constantes positivas.

Pela hipótese (H_3) e observação (2.1), $M(\|u_1\|^2)\|w\|^2 \geq -\sigma|\nabla w|^2 \geq -\dfrac{\sigma}{\lambda_1}|\Delta w|^2$.

Aplicando este resultado em (3.67), obtemos:

$$(K, w'^2) + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right)|\Delta w|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t [C(\alpha)(K, w'^2) + C_{15}|\Delta w|^2] ds,$$

com $0 < 1 - \dfrac{\sigma}{\lambda_1} < 1$ e $0 < 1 - \alpha < 1$

Podemos, então, reescrever essa última desigualdade:

$$(K, w'^2) + |\Delta w|^2 < C_{16}(K, w'^2) + |\Delta w|^2 + C_{17}\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t C_{18}[(K, w'^2) + |\Delta w|^2] ds \tag{3.68}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.68), obtemos $(K, w'^2) + |\Delta w|^2 \leq 0$

Isto implica dizer que $|\Delta w(t)|^2 = \|w(t)\|^2_{H_0^2(\Omega)} = 0$, e portanto, $w(t) = 0$ q.s. em $[0, T]$.

Desde que w é contínua em $[0, T]$, $w(t) = 0$, $\forall\, t \in [0, T]$, isto é, $u_1 = u_2$.

Isto demonstra a unicidade de solução.

ABSTRACT. In this article, we study the existence and uniqueness of a global weak solution for the degenerate nonlinear variational inequality

$$\left\|\begin{array}{l} K(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\|u\|^2)(-\Delta u) + u' \geq f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ u\lfloor_\Sigma = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\lfloor_\Sigma = 0 \end{array}\right.$$

where $K(x,t)$ is a function defined on $Q = \Omega \times]0, T[$, $K(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in Q$, M a continuous real function with specific properties and f belongs to the class of functions $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$. We will use the Faedo-Galerkin method, monotone operator and Compactness to prove the existence and uniqueness of weak solutions.

Keywords: penalty operator, variational inequality, Galerkin method.

REFERÊNCIAS

[1] V.J.V. Becerra. "Solução Local Para um Problema não Linear Unilateral". Ph.D. thesis, Dissertaçao de Mestrado. UFRJ (1987).

[2] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1992 (1987).

[3] Y. Ebihara. Modified variational inequalities to semilinear wave equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **7**(8) (1983), 821–826.

[4] Y. Ebihara, M.M. Miranda & L. Medeiros. On a variational inequality for a nonlinear operator of hyperbolic type. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **16**(2) (1985), 41–55.

[5] J. Ferreira. On a variational inequality for a hyperbolic-parabolic equation with a lipschitzian nonlinearity. *Proyecciones (Antofagasta, On line)*, **16**(2) (1997), 125–139.

[6] D. Kinderlehrer & G. Stampacchia. "An introduction to variational inequalities and their applications". SIAM (2000).

[7] J.L. Lions. "Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires". Dunod (1969).

[8] J.L. Lions & G. Stampacchia. Variational inequalities. *Communications on pure and applied mathematics*, **20**(3) (1967), 493–519.

[9] L. Medeiros & M.M. Miranda. Local solutions for a nonlinear unilateral problem. *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquées*, **31**(5) (1986), 371–382.

[10] S. Mikhlin. Variational methods in mathematical physics (Gosudarstv. Izdat. Tekhn.-Teor. Lit., Moscow). *English transl: Pergamon Press, Oxford*, (1964).

[11] D. Pereira. "Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico das Soluçoes da Equação Não-Linear da Viga". Ph.D. thesis, Doctoral Thesis. IM-UFRJ (1987).

[12] G. Stampacchia. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences*, **258**(18) (1964), 4413.

[13] S. Woinowsky-Krieger. The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics*, (1950).

How to cite

H.S. Ferreira & D.C. Pereira. Desigualdade Variacional da Equação Não-Linear Degenerada de Vibrações da Viga. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, **25**(2024), e01592. doi: 10.5540/tcam.2024.025.e01592.