

## Mecanismos de Criação de Atratores Estranhos no Segundo Sistema de Rössler

M. MESSIAS<sup>1</sup> C. NESPOLI<sup>2</sup> T.M. DALBELO<sup>3</sup> Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP, Cx.P. 467, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil.

**Resumo.** Neste trabalho fazemos uma análise das bifurcações locais que ocorrem nos pontos de equilíbrio do *Segundo Sistema de Rössler*, que é um sistema quadrático tridimensional de equações diferenciais ordinárias, dependendo de três parâmetros reais,  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Determinamos as superfícies no espaço de parâmetros, para as quais o sistema apresenta bifurcações de Hopf. Mostramos numericamente que para valores dos parâmetros próximos aos de bifurcação de Hopf o sistema possui atratores estranhos. Além disso, para  $a = 0$  o sistema possui uma família formada por infinitos *ciclos heteroclínicos singularmente degenerados*, que consistem de conjuntos invariantes formados por uma linha de equilíbrios, juntamente com uma órbita heteroclínica conectando dois destes equilíbrios. Mostramos numericamente que pequenas perturbações do sistema, tomando-se  $a > 0$  pequeno, levam à quebra destes ciclos degenerados e à criação de atratores estranhos.

**Palavras-chave.** Segundo sistema de Rössler, bifurcação de Hopf, criação de atrator estranho, caos, ciclo heteroclínico singularmente degenerado.

### 1. Introdução

O comportamento caótico em sistemas determinísticos de equações diferenciais ordinárias (EDOs) é um tema que vem despertando a atenção de pesquisadores de várias áreas do conhecimento, tanto devido ao interesse puramente matemático quanto a ocorrência destes sistemas na modelagem de fenômenos de áreas distintas, como física, química, biologia, medicina, meteorologia, economia e até mesmo ciências sociais (ver por exemplo [13] e as referências ali citadas). Do ponto de vista prático, sistemas caóticos acoplados, associados a técnicas de sincronização de soluções, vêm sendo utilizados em aplicações industriais e no setor de comunicação segura de dados [1, 8]. Desta forma, o entendimento dos mecanismos que levam à criação de atratores estranhos e ao conseqüente comportamento caótico das soluções destes sistemas é atualmente um tema de pesquisa de grande interesse.

---

<sup>1</sup>marcelo@fct.unesp.br; com apoio parcial do CNPq Edital Universal 478544/2007-3 e CAPES Pró-Equipamentos 01/2007.

<sup>2</sup>cnespoli@fct.unesp.br.

<sup>3</sup>thaisdalbelo@yahoo.com.br, bolsista PIBIC/CNPq.

Historicamente, o comportamento caótico de soluções de sistemas tridimensionais de EDOs foi descrito com certo detalhe, talvez pela primeira vez, pelo meteorologista E. N. Lorenz em 1963, que propôs o sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy, \quad (1.1)$$

relacionado ao estudo do movimento convectivo de fluidos na atmosfera terrestre e a questões relativas à previsão numérica do tempo [5]. Para os valores  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ , e  $b = 8/3$  as soluções de (1.1) tendem assintoticamente a um movimento limitado e aperiódico no espaço de fase, formando um *atrator estranho*, conhecido na literatura como *Atrator de Lorenz* (Figura 1), cuja forma lembra a figura de uma borboleta. Existem centenas de artigos relacionados ao estudo da dinâmica do sistema (1.1), dentre os quais podemos citar [12] e [14], que apresentam interessantes revisões sobre o assunto.

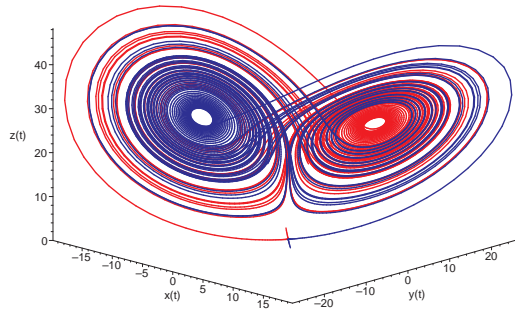


Figura 1: O atrator de Lorenz.

Desde o trabalho de Lorenz, surgiram muitos outros sistemas determinísticos tridimensionais de EDOs, provenientes de considerações puramente matemáticas ou da modelagem de fenômenos naturais, cujas soluções têm um comportamento parecido com o do sistema de Lorenz, apresentando atratores estranhos do tipo borboleta. Tais sistemas são em geral chamados de *sistemas tipo Lorenz* (*Lorenz-like systems*). Um fato que podemos observar a respeito destes tipos de sistemas é que, além de não se saber, em geral, como são dinamicamente formados seus atratores estranhos e o porquê de sua aparência similar à do atrator de Lorenz, pouco se sabe ainda sobre a relação direta destes atratores com o fenômeno modelado pelo sistema. De fato, além da suposição óbvia que o atrator deve refletir de alguma forma a complexidade do fenômeno, como é o caso da previsão numérica do tempo, não é claro qual o real papel do comportamento caótico no fenômeno em si.

Torna-se importante então a continuidade da investigação sobre sistemas caóticos, tanto do ponto de vista analítico quanto numérico, na busca de uma melhor compreensão dos mecanismos dinâmicos que levam à criação de seus atratores estranhos e, simultaneamente, na tentativa de compreendermos, na medida do possível, o real papel da dinâmica caótica no fenômeno em si, no caso das aplicações.

Neste contexto, em 1979 Otto Rössler [11] propôs quatro protótipos para o comportamento caótico de sistemas contínuos, dados por sistemas de EDOs no  $\mathbb{R}^3$ , que emergem de um problema de perturbação singular de um sistema planar.

No trabalho citado, as equações são estudadas de forma superficial, apenas com a apresentação de algumas simulações numéricas e comentários gerais sobre sua dinâmica. O segundo dos sistemas propostos, que aqui chamaremos de *Segundo Sistema de Rössler*, é dado por

$$\dot{x} = x - xy - z, \quad \dot{y} = x^2 - ay, \quad \dot{z} = b(cx - z). \quad (1.2)$$

onde  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as variáveis de estado e  $a, b$  e  $c$  são parâmetros reais positivos.

Diferente do sistema clássico de Rössler [10], que foi extensivamente estudado, com muitas referências a respeito, que podem ser encontradas em buscas no *MathSciNet* ou *GoogleScholar*, até onde sabemos não existe na literatura uma análise matemática detalhada do sistema (1.2). Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar um estudo analítico, combinado com uma análise numérica, da dinâmica e das bifurcações das soluções do segundo sistema de Rössler, para determinadas regiões do espaço de parâmetros. Com isso, pretendemos dar uma contribuição ao entendimento dos mecanismos de criação de atratores estranhos deste sistema, cuja existência foi observada em [11].

## 2. Resultados Principais

Os principais resultados obtidos estão sintetizados no teorema abaixo.

**Teorema 2.1.** *As seguintes afirmações são válidas para o sistema (1.2):*

**a)** *Para todo  $a, b > 0$  e para  $c > 1$  o sistema (1.2) possui a origem  $P_0 = (0, 0, 0)$  como único ponto de equilíbrio. Supondo  $(b + 1)^2 < 4bc$ , tem-se que, para  $b \geq 1$ , a origem é localmente um ponto espiral assintoticamente estável; para  $b < 1$ , a origem se torna um ponto espiral instável e um pequeno ciclo-limite estável surge em sua vizinhança, proveniente de uma bifurcação de Hopf que ocorre para  $b=1$ ;*

**b)** *Para  $c = 1$  ocorre uma bifurcação do tipo Pitchfork na origem. Mais precisamente, para  $0 < c < 1$  a origem se torna um ponto de sela hiperbólico, e são criados dois novos pontos de equilíbrio,  $P_{1,2} = (\pm\sqrt{a(1-c)}, 1-c, \pm c\sqrt{a(1-c)})$ , que são localmente assintoticamente estáveis se a condição*

$$a > a(b, c) = -\frac{3c^2 - 2bc + b^2 - 2c}{3c - b - 2}$$

*for satisfeita. Para o valor crítico  $a = a(b, c)$ , devido à simetria das soluções, ocorrem bifurcações de Hopf simultâneas nos equilíbrios  $P_{1,2}$  originando, para  $a < a(b, c)$  mas próximo de  $a(b, c)$ , um pequeno ciclo-limite na vizinhança de cada um dos equilíbrios.*

**c)** *Para  $a = 0$  e  $b, c > 0$  quaisquer, o sistema possui uma linha de pontos de equilíbrio dada pelo eixo- $y$  e não há outros pontos de equilíbrio. Para  $y < 1 - c$  os equilíbrios  $(0, y, 0)$  são localmente pontos de sela normalmente hiperbólicos ao eixo- $y$ ; para  $y > 1 - c$  e  $b > c$ , tais equilíbrios são localmente assintoticamente estáveis (nós ou espirais atratoras); se  $y = 1 - c$  os equilíbrios são mais degenerados, possuindo dois autovalores nulos.*

Observamos que as superfícies

$$H_1 = \{(a, b, c) \mid b = 1, a > 0 \text{ e } c > 1\} \text{ e } H_2 = \{(a, b, c) \mid c < 1 \text{ e } a = a(b, c)\}$$

mencionadas nas partes (a) e (b) do Teorema 2.1 determinam os lugares geométricos, no espaço de parâmetros, para os quais ocorrem bifurcações de Hopf na origem e nos equilíbrios  $P_{1,2}$  do sistema (1.2), respectivamente. Tais superfícies são chamadas *superfícies de Hopf*.

Embora estejamos considerando apenas valores positivos para os parâmetros do sistema (1.2), é interessante estudarmos o caso limite  $a = 0$  mencionado na parte (c) do Teorema 2.1, pois para esse valor o sistema apresenta certos tipos de ciclos degenerados, que foram descritos apenas recentemente na literatura [2, 4, 7] e são chamados *ciclos heteroclínicos singularmente degenerados* [2]. Tais ciclos são conjuntos invariantes que consistem da união de uma linha de equilíbrios com uma órbita heteroclínica conectando dois destes equilíbrios. Na interessante introdução e seção de motivação de [2] os autores sugerem que, devido à sua degeneracidade, tais ciclos tem um grande potencial de produzir a rica variedade de fenômenos dinâmicos apresentada, por exemplo, pelo sistema de Lorenz (conforme [2], p. 527). Embora os autores daquele artigo não abordem tal fato, deixando sua verificação para uma “Parte 2” de seu trabalho (que até o momento não encontramos publicada), tal suspeita tem se confirmado, tanto para o sistema de Lorenz quanto para outros, conforme mostrado em [4, 7] e também neste trabalho, para o sistema (1.2). Além disso, em [2] os autores provam analiticamente a existência de apenas um ciclo heteroclínico singularmente degenerado para o sistema de Lorenz (1.1), considerando os parâmetros  $b = 0$ ,  $\sigma$  limitado e  $r$  muito grande (de fato,  $r \rightarrow \infty$ ). Entretanto, o que se observa em [4, 7] é que tais ciclos aparecem em famílias com infinitos elementos, o que também ocorre no segundo sistema de Rössler, e que uma pequena perturbação desta estrutura degenerada leva de fato à formação de um atrator estranho.

Com base nos resultados analíticos sobre as bifurcações locais de (1.2), desenvolvemos um estudo numérico do sistema, cujos principais resultados estão sintetizados a seguir.

**Resultado Numérico 1.** *Para valores dos parâmetros próximos do valor crítico  $a = a(b, c)$ , no qual ocorrem bifurcações de Hopf nos equilíbrios  $P_{1,2}$ , o sistema (1.2) apresenta um atrator estranho, conforme mostrado na Figura 7.*

**Resultado Numérico 2.** *Para  $a = 0$  e para  $b > c$ , o sistema (1.2) possui infinitos ciclos heteroclínicos singularmente degenerados, conforme mostrado na Figura 6, que são formados pelo eixo- $y$  e pela conexão das variedades invariantes instáveis dos pontos de sela normalmente hiperbólicos ao eixo- $y$  com os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, descritos na parte (c) do Teorema 2.1. Além disso, para  $a > 0$  pequeno e  $0 < c < 1$  tais ciclos deixam de existir e é criado um atrator estranho para o sistema (Figura 8).*

No restante deste trabalho damos uma prova do Teorema 2.1 e apresentamos as simulações numéricas que levam ao enunciado dos Resultados Numéricos 1 e 2. Para tanto, na Seção 2 fazemos uma análise linear do sistema (1.2) em torno dos pontos de equilíbrio, com o que provamos o Teorema 2.1. Na Seção 3 apresentamos

os resultados do estudo numérico. Finalizamos com a Seção 4, na qual fazemos algumas considerações gerais sobre o estudo do sistema (1.2), inclusive com perspectivas futuras de estudo.

### 3. Análise Linear

Utilizando notação vetorial, o sistema (1.2) pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \zeta) = (x - xy - z, x^2 - ay, b(cx - z)), \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\zeta = (a, b, c) \in [0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ . Utilizaremos esta notação nos cálculos a seguir.

**Observação 1.** *O sistema (1.2) apresenta uma simetria com relação ao eixo- $y$ . De fato, o sistema é invariante pela mudança de coordenadas  $(x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$ . Assim, se  $(x(t), y(t), z(t))$  é uma solução de (1.2), então  $(-x(t), y(t), -z(t))$  também é uma solução.*

#### 3.1. Bifurcações na origem

Para  $c > 1$ , a origem  $P_0 = (0, 0, 0)$  é o único ponto de equilíbrio do sistema (1.2), quaisquer que sejam os valores de  $a$  e  $b$ . O polinômio característico da matriz jacobiana associada à função  $f$  dada em (3.1), calculada no ponto  $P_0$ , tem como autovalores

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_{2,3} = \frac{(-b+1) \pm \sqrt{(b+1)^2 - 4bc}}{2}. \quad (3.2)$$

Assim, se  $b > 1$  a origem é localmente assintoticamente estável, sendo um nó atrator no caso  $(b+1)^2 - 4bc > 0$  e um ponto espiral estável se  $(b+1)^2 - 4bc < 0$ .

Consideremos o caso  $(b+1)^2 - 4bc < 0$ . Para  $b = 1$  a matriz jacobiana da função  $f$  dada em (3.1) calculada na origem tem um par de autovalores complexos imaginários puros, dados por

$$\lambda_{2,3} = \pm i \frac{\sqrt{4bc - (b+1)^2}}{2}.$$

Além disso, das expressões em (3.2), segue que a derivada dos autovalores com relação ao parâmetro  $b$ ,  $\frac{d}{db} Re(\lambda_{2,3}) = -\frac{1}{2} \neq 0$ , o que dá a condição de transversalidade do teorema de bifurcação de Hopf. Logo, ocorre uma bifurcação de Hopf na origem quando o parâmetro  $b$  passa pelo valor crítico  $b = 1$ . Mais precisamente, para  $b > 1$  a origem é um ponto espiral assintoticamente estável; se  $b = 1$ , a origem é um atrator fraco; e para  $b < 1$  mas próximo de 1, existe um ciclo-limite englobando a origem, proveniente da bifurcação de Hopf [3]. Para completar os cálculos relativos a essa bifurcação, deveríamos determinar os coeficientes de Lyapunov associados à bifurcação, que nos dão informações sobre a unicidade e sobre a estabilidade do ciclo-limite (conforme descrito em [3]). Porém, devido à limitação de espaço e ao objetivo central do trabalho, que é o de descrever os mecanismos de formação de atratores

estranhos, a estabilidade do ciclo será aqui verificada apenas numericamente. Assim, nas Figuras 2 e 3 é ilustrada a bifurcação de Hopf na origem, sendo que o ciclo-limite que surge é estável, para os valores dos parâmetros considerados.

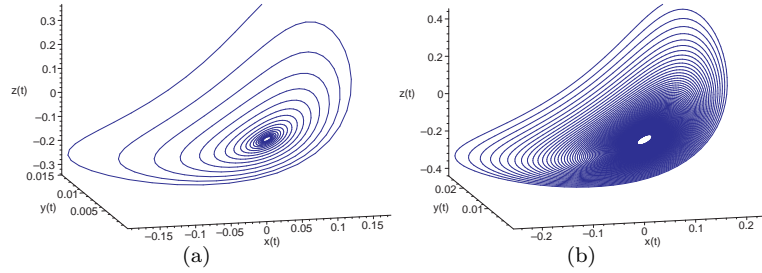


Figura 2: Plano de fase do sistema (1.2) próximo da origem e com valores dos parâmetros  $a = 2, c = 3$  e: **(a)**  $b = 1.1$  para o qual a origem é uma espiral estável; **(b)**  $b = 1.01$ , próximo do valor crítico  $b = 1$  para o qual ocorre a bifurcação de Hopf - a origem se torna um *atrator fraco*.

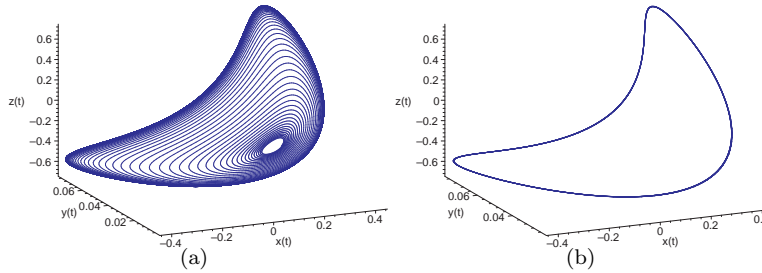


Figura 3: Plano de fase do sistema (1.2) próximo da origem e com valores dos parâmetros  $a = 2, c = 3$  e  $b = 0.9$ : **(a)** a origem se torna uma espiral instável e um pequeno ciclo-limite surge em sua vizinhança; **(b)** destaque do ciclo-limite mostrado na figura **(a)**.

Com isso, fica provada a parte **(a)** do Teorema 2.1.

Para o valor crítico  $c = 1$ , segue das expressões dos autovalores em (3.2) que a origem se torna um equilíbrio não-hiperbólico, pois passa a ter autovalores  $\lambda_1 = -a$ ,  $\lambda_2 = -2b + 2$  e  $\lambda_3 = 0$ .

Para  $0 < c < 1$ , a origem se torna um ponto de sela hiperbólico, pois  $0 < c < 1$  implica em que  $(b + 1)^2 - 4bc > (b + 1)^2 - 4b = (1 - b)^2 > 0$ , donde segue que os autovalores (3.2) são reais, sendo dois negativos e um positivo. Além disso, surgem dois novos pontos de equilíbrio simétricos, dados por

$$P_{1,2} = \left( \pm \sqrt{a(1-c)}, 1-c, \pm c \sqrt{a(1-c)} \right).$$

Em resumo, ocorre uma bifurcação do tipo Pitchfork na origem, quando o parâmetro  $c$  passa pelo valor crítico  $c = 1$ , ficando assim provada a primeira afirmação na parte (b) do Teorema 2.1.

### 3.2. Bifurcações nos equilíbrios $P_1$ e $P_2$

Estudemos agora a estabilidade dos equilíbrios  $P_{1,2}$ . Devido à simetria do sistema (ver Observação 1), basta estudarmos o equilíbrio  $P_1$ , pois as contas para  $P_2$  são exatamente as mesmas.

A matriz jacobiana da função  $f$  dada em (3.1) calculada no equilíbrio  $P_1$  fornece o seguinte polinômio característico

$$\lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + (ab - 3ac + 2a)\lambda + 2ab(1 - c). \quad (3.3)$$

Então, do critério de estabilidade de Routh–Hurwitz (ver [9], p. 58), segue que  $P_1$  é assintoticamente estável se as seguintes condições forem satisfeitas:  $a + b > c$ ,  $2ab(1 - c) > 0$ , e

$$a > a(b, c) = -\frac{3c^2 - 2bc + b^2 - 2c}{3c - b - 2}.$$

Além disso, se  $a = a(b, c)$ , então os autovalores são imaginários puros, que é uma das condições para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf no ponto  $P_1$ . As simulações numéricas desenvolvidas mostram que, para  $a < a(b, c)$ , o ponto  $P_1$  se torna uma espiral instável e surge um pequeno ciclo-limite em sua vizinhança (ver Figuras 4 e 5). O mesmo ocorre com o ponto  $P_2$ , por simetria. Novamente aqui, para o cálculo preciso do número e tipo de estabilidade dos ciclos-limites que surgem com a bifurcação de Hopf deve-se calcular os coeficientes de Lyapunov associados (conforme [3]), o que não será feito devido à limitação de páginas e ao objetivo central do trabalho. Apresentamos apenas alguns resultados numéricos, para valores particulares dos parâmetros, que corroboram a ocorrência da bifurcação de Hopf, mencionada na segunda afirmação da parte (b) do Teorema 2.1.

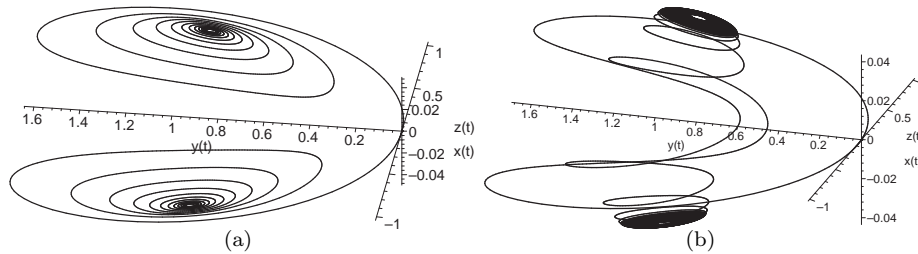


Figura 4: Plano de fase do sistema (1.2) próximo dos equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$ , com valores dos parâmetros  $b = 0.08$ ,  $c = 0.125$  e: **(a)**  $a = a(b, c) + 0.05 = 0.1771114370$ , próximo ao valor de bifurcação de Hopf, para o qual  $P_1$  e  $P_2$  são espirais estáveis; **(b)**  $a = a(b, c) + 0.005 = .1321114370$ , mais próximo do valor crítico, os equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$  se tornam *atratores fracos*.

### 3.3. Existência de ciclos heteroclínicos degenerados

Para  $a = 0$  o segundo sistema de Rössler se reduz a

$$\dot{x} = x - xy - z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = b(cx - z). \quad (3.4)$$

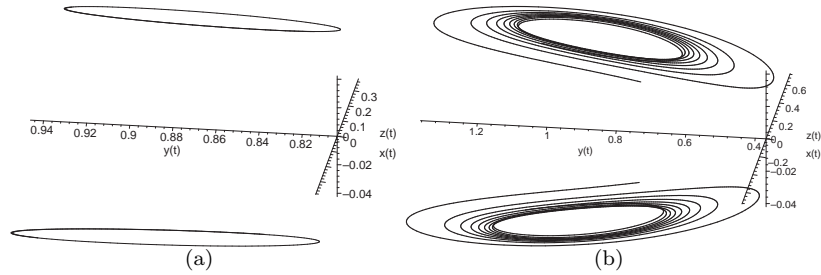


Figura 5: Plano de fase do sistema (1.2) próximo dos equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$ , com valores dos parâmetros  $b = 0.08, c = 0.125$  e  $a = a(b, c) - 0.001 = 0.1261114370$ : (a) surgem dois ciclos-limites em torno dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ ; (b) as simulações numéricas indicam que tais ciclos são instáveis .

que tem uma linha de pontos de equilíbrio (não-hiperbólicos) no eixo- $y$ , isto é, da forma  $(0, y, 0)$ . A matriz jacobiana associada à função  $f$  dada em (3.1), calculada nestes pontos, fornece os autovalores

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{(1 - y - b) \pm \sqrt{(1 - y - b)^2 - 4b(y - 1 + c)}}{2}. \quad (3.5)$$

Um cálculo simples dos autovetores associados a esses autovalores mostra que os equilíbrios  $(0, y, 0)$  são selas normalmente hiperbólicas ao eixo- $y$  se  $y < 1 - c$ . Se  $y = 1 - c$  tais equilíbrios são degenerados, possuindo dois autovalores nulos. Para  $y > 1 - c$ , os equilíbrios são também normalmente hiperbólicos ao eixo- $y$ , sendo assintoticamente estáveis se  $c < b$  e instáveis se  $c > b$ .

Com base nos cálculos efetuados, observamos que é interessante considerarmos  $0 < c < 1$ , pois neste caso o sistema (1.2) pode apresentar os equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$ , além da origem. Além disso, se  $b > 1 > c$ , temos que os equilíbrios  $(0, y, 0)$  são selas normalmente hiperbólicas ao eixo- $y$  se  $y < 1 - c$  e normalmente assintoticamente estáveis se  $y > 1 - c$ . Nestas condições detectamos, numericamente, que existe uma família com infinitos ciclos heteroclínicos singularmente degenerados, consistindo do eixo- $y$  e da conexão das variedades instáveis destas selas com os equilíbrios assintoticamente estáveis (ver Figura 6). Podemos dizer que estes ciclos são topologicamente equivalentes aqueles descritos na literatura [2, 4, 7], que são da forma *sela-foco*. Observamos que os mesmos tipos de ciclos ocorrem para outros valores dos parâmetros  $b$  e  $c$ , ou seja, este é um caso típico, para  $a = 0$ .

## 4. Simulações Numéricas

As simulações numéricas desenvolvidas indicam que o segundo sistema de Rössler apresenta um atrator estranho para valores dos parâmetros próximos aos valores críticos das bifurcações de Hopf que ocorrem nos equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$  (ver Figura 7), ou seja, próximos da superfície  $H_2$ , obtida do Teorema 2.1, parte (b).

Além disso, em concordância com o que foi recentemente observado em [2, 4, 7], o sistema apresenta também um atrator estranho que é criado com a destruição dos



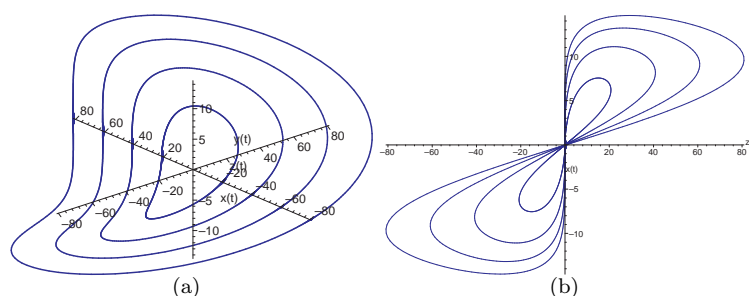


Figura 6: **(a)** Ciclos heteroclínicos singularmente degenerados, conectando os pontos de sela com os pontos assintoticamente estáveis do sistema (1.2), com valores dos parâmetros  $a = 0$ ,  $b = 15$  e  $c = 0.5$ ; **(b)** Projeção da figura (a) no plano  $xz$ : cada *pétala* corresponde a um ciclo.

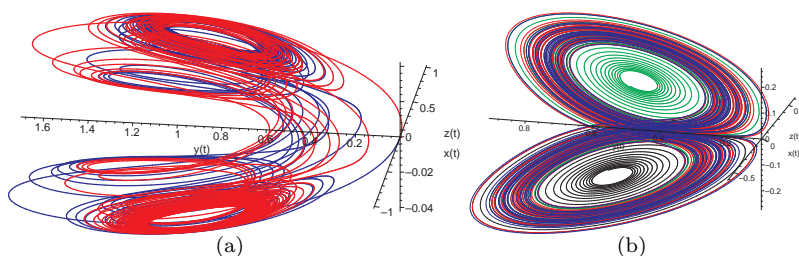


Figura 7: Atratores estranhos do sistema (1.2) que ocorrem para valores dos parâmetros próximos aos valores de bifurcação de Hopf nos equilíbrios  $P_{1,2}$ : **(a)**  $a = a(b, c) - 0.001 = 0.1261114370$ ,  $b = 0.08$  e  $c = 0.125$ ; **(b)**  $a = a(b, c) - 0.05 = 0.1166666667$ ,  $b = 1$  e  $c = 0.5$ .

ciclos heteroclínicos singularmente degenerados (ver Figura 8), quando tomamos  $a > 0$  pequeno,  $0 < c < 1 < b$ . Até onde sabemos, a família de ciclos degenerados e a existência do atrator próximo a estes ciclos, para o segundo sistema de Rössler, ainda não haviam sido descritos na literatura.

## 5. Considerações Finais

Foram estudadas as bifurcações locais que ocorrem com os equilíbrios do segundo sistema de Rössler (1.2). Em particular, foram determinadas as superfícies, no espaço de parâmetros, para as quais o sistema apresenta bifurcações do tipo Hopf. Detectamos numericamente que, para valores dos parâmetros próximos da superfície de Hopf, relativa aos equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$ , o sistema apresenta atratores estranhos. Detectamos também que, para  $a = 0$ , o sistema possui uma linha de pontos de equilíbrio, dada pelo eixo  $-y$ , e uma órbitas heteroclínicas conectando dois a dois destes equilíbrios, formando ciclos heteroclínicos singularmente degenerados. Uma pequena perturbação destes ciclos, tomando-se  $a > 0$  pequeno, leva a existência de atratores estranhos para o sistema, em consonância com o que é observado em [2, 4, 7] para outros sistemas quadráticos no  $\mathbb{R}^3$ .

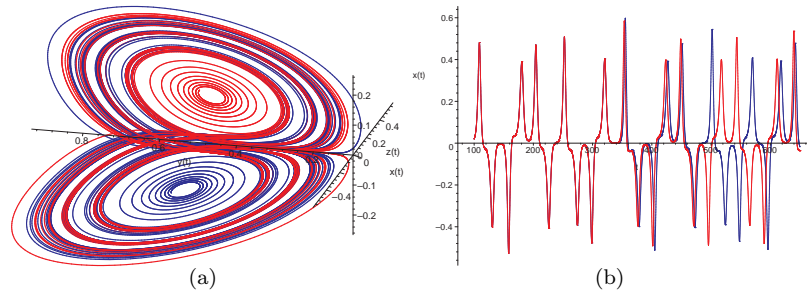


Figura 8: **(a)** Atrator estranho do sistema (1.2) que é criado a partir da perturbação da família de ciclos heteroclínicos singularmente degenerados que existe para  $a = 0$ , quando se considera  $a > 0$  pequeno. Valores dos parâmetros:  $a = 0.078, b = 3$  e  $c = 0.5$ . **(b)** Duas soluções do sistema (1.2) que iniciam muito próximas, com condições iniciais  $(5.01, 5, 5)$  e  $(5, 5, 5)$ , apresentam divergência exponencial, confirmando a caoticidade do atrator mostrado na figura (a).

Com base no estudo numérico realizado, podemos extrair pelo menos dois fenômenos associados à formação de atratores estranhos do sistema (1.2). O primeiro é a sequência de bifurcações apresentada no Teorema 2.1, que é comumente verificada na literatura em geral [6, 12] para sistemas do tipo Lorenz. O segundo é a existência de tais atratores em uma vizinhança dos ciclos heteroclínicos singularmente degenerados, que é um objeto de estudo descrito apenas recentemente na literatura e, portanto, acreditamos que sua descrição tem certa relevância, tanto teórica quanto do ponto de vista de aplicações.

Observamos finalmente que muito ainda pode ser estudado sobre este segundo e também sobre os outros três protótipos de sistemas contínuos caóticos descritos por Rössler em [11]. Em especial, a prova analítica da existência dos ciclos heteroclínicos singularmente degenerados e também uma explicação mais aprofundada de como surgem os atratores estranhos em sua vizinhança são desafios interessantes, pois constituem objetos de estudo muito recentes na literatura. Pretendemos abordar estas questões em trabalhos futuros.

**Abstract** In this paper we present a local bifurcation analysis at the equilibrium points of the Rössler second system, which is a family of ordinary differential equations defined in  $\mathbb{R}^3$  and depending on three parameters,  $a, b$  and  $c$ . We give an analytical description of the surfaces in the parameter space for which small periodic orbits bifurcate from the equilibria of the system via Hopf bifurcations. Also, we perform numerical simulations which suggest that the Hopf bifurcation leads to chaotic dynamics of the system. Moreover, for  $a = 0$  the system has a continuum of *singularly degenerate heteroclinic cycles*, which consists of invariant sets formed by a line of equilibria together with a heteroclinic orbit connecting two of these equilibria. We verify numerically that small perturbations of the system around these cycles, by considering  $a > 0$  small, destroy all the cycles and lead to the creation of strange attractors.

**Key-words.** Rössler second system, Hopf bifurcation, strange attractor creation, chaos, singularly degenerate heteroclinic cycle.

## Referências

- [1] Jiin-Po Yeh, Kun-Lin Wu, A simple method to synchronize chaotic systems and its application to secure communications, *Mathematical and Computer Modelling* **47** (2008), 894-902.
- [2] H. Kokubu, R. Roussarie, Existence of a singularly degenerate heteroclinic cycle in the Lorenz system and its dynamical consequences: Part I, *J. Dyn. Diff. Equat.* **16** (2004), 513-557.
- [3] Y.A. Kuznetsov, “Elements of Applied Bifurcation Theory”, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [4] J. Llibre, M. Messias, P.R. da Silva, On the global dynamics of the Rabinovich system, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 275210-31.
- [5] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963), 130-141.
- [6] L.F. Mello, M. Messias, D.C. Braga, Bifurcation analysis of a new Lorenz-like chaotic system, *Chaos, Solitons and Fractals* **37** (2008), 1244-1255.
- [7] M. Messias, “Dynamic at Infinity and Existence of Singularly Degenerate Heteroclinic Cycles in the Lorenz System”, Relatório Técnico - DMEC-FCT-UNESP **01** (2008), 1-25.
- [8] K. Murali, M. Lakshmanan, Secure communication using a compound signal from generalized synchronizable chaotic systems, *Physics Letters A* **241**, No. 6 (1998), 303-310.
- [9] L.S. Pontryagin, “Ordinary Differential Equations”, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, 1962.
- [10] O.E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters*, **57A**, No. 5 (1976), 397-398.
- [11] O.E. Rössler, Continuous chaos – four prototype equations, em “Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines”, *Ann. New York Acad. Sci.*, **316** (1979), 376-392.
- [12] C. Sparrow, “The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors”, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [13] S.H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering”, Addison Wesley Publishing Company Inc., Cambridge, USA, 1994.
- [14] M. Viana, What’s new on Lorenz strange attractors?, *Math. Intelligencer*, **22**, No. 3 (2000), 6-19.