

## Modelagem para o Problema de Roteamento de Veículos Fretados

R. S. OLIVEIRA<sup>1</sup>, C. T. L. S. GHIDINI<sup>2</sup>, C. TOREZZAN<sup>3</sup> e W. A. OLIVEIRA<sup>4\*</sup>

Recebido em 14 de junho de 2022 / Aceito em 29 de julho de 2022

**RESUMO.** O fretamento de veículos para realizar o transporte de funcionários em substituição ao transporte público é uma realidade para diversas empresas. Os benefícios obtidos com essa opção alcançam o conforto dos funcionários e o controle da entrada e saída desses nos diversos turnos de trabalho, o que ajuda no cotidiano de produção da empresa. Assim, planejar adequadamente as rotas para esses veículos também é importante. Neste contexto, este artigo estuda o problema de roteamento de veículos modelado por meio de fluxo de produtos em arcos para propor uma nova modelagem matemática que adiciona um certo controle na quantidade de passageiros entre veículos, no sentido de que cada veículo usado transporta aproximadamente a mesma quantidade de passageiros. Um estudo de caso referente ao transporte fretado de trabalhadores de uma indústria do ramo alimentício na cidade de Itumbiara-GO foi conduzido como forma de validar a viabilidade prática do modelo proposto. Uma série de experimentos computacionais e ajustes de parâmetros foram realizados com o objetivo de investigar o impacto prático de planejar rotas equilibradas em termos da quantidade de passageiros, número de visitas e da distância total percorrida. Estatística descritiva e testes de hipóteses validaram as soluções do modelo matemático proposto para uma parte significativa dos experimentos computacionais.

**Palavras-chave:** Transporte fretado, problema de roteamento de veículos, modelagem de fluxo em arcos.

### 1 INTRODUÇÃO

O crescimento populacional e a concentração das atividades econômicas em torno das cidades têm resultado em diversos desafios no âmbito do transporte urbano. Diariamente, milhares de pessoas utilizam transporte coletivo público ou privado para realizar as mais variadas atividades,

---

\*Autor correspondente: Washington Alves de Oliveira – E-mail: waoliv@unicamp.br

<sup>1</sup>Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, R. Sérgio Buarque de Holanda, 651, 13083-859, Campinas, SP, Brasil e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Campus Itumbiara, Av. Furnas, 55, 75524-245, Itumbiara, GO, Brasil – E-mail: r179370@dac.unicamp.br <https://orcid.org/0000-0002-1670-7735>

<sup>2</sup>Faculdade de Ciências Aplicadas, Universidade Estadual de Campinas, R. Pedro Zaccaria, 1300, 13484-350, Limeira, SP, Brasil – E-mail: cghidini@unicamp.br <http://orcid.org/0000-0002-5018-8932>

<sup>3</sup>Faculdade de Ciências Aplicadas, Universidade Estadual de Campinas, R. Pedro Zaccaria, 1300, 13484-350, Limeira, SP, Brasil – E-mail: torezzan@unicamp.br <https://orcid.org/0000-0001-9538-9538>

<sup>4</sup>Faculdade de Ciências Aplicadas, Universidade Estadual de Campinas, R. Pedro Zaccaria, 1300, 13484-350, Limeira, SP, Brasil – E-mail: waoliv@unicamp.br <http://orcid.org/0000-0002-7100-870X>

umentando a demanda e a cobrança por qualidade no oferecimento desses serviços. No Brasil, o transporte por meio do fretamento de veículos privados surge como uma solução alternativa para suprir a demanda e oferecer qualidade, sobretudo em conglomerados urbanos com muitas indústrias, universidades ou turismo. Esses cenários demandam necessidades específicas de transporte, como horários rígidos de entrada e saída de pessoas, além de exigências por conforto e segurança que muitas vezes não são completamente compatíveis com sistema de transporte público [1].

Em função da natureza dinâmica do transporte por fretamento de veículos, existe uma necessidade frequente de replanejar as rotas, tipicamente para incluir ou excluir pontos de embarque e desembarque ou alterar o tipo e as características dos veículos. Na prática das empresas, grande parte desse planejamento é realizado manualmente, o que pode levar a soluções empíricas sub-ótimas, impactando na qualidade do serviço oferecido e incluindo custos desnecessários que, invariavelmente, acabam sendo repassados aos usuários ou contratantes. Nesse contexto, este artigo contribui com a proposição de um modelo de otimização para o problema de roteamento de veículos fretados, que busca equilibrar a quantidade de passageiros entre os veículos permitindo desenhar uma sequência não sobrecarregada de coleta de passageiros por veículo, além de reduzir a distância total percorrida. O modelo proposto também pode ser utilizado como uma ferramenta prática para o planejamento e dimensionamento da frota e a escolha dos pontos de parada.

A configuração de rotas para veículos em uma rede de transportes pertence a uma classe ampla de problemas identificados como problemas de roteamento de veículos (PRVs). Dantzig e Ramser [6] foram os primeiros a modelar um PRV no contexto de despacho de caminhões. Em seguida, Clarke e Wright [5] descreveram vários conceitos envolvendo PRVs como um problema de otimização linear e, desde então, inúmeras variações de modelos matemáticos e métodos de resolução têm sido apresentados. Referências abrangentes sobre essa classe de problemas são descritas em [17, 23].

O modelo matemático proposto e estudado neste artigo é caracterizado pela presença da modelagem de fluxo de produtos nos arcos em problemas de roteamento de veículos, o que permite incluir a proposta de equilíbrio no fluxo de passageiros entre rotas. A formulação é derivada de vários modelos clássicos e outros recentes da literatura. Gavish e Graves [10, 11], Finke [8] e Langevin et al. [16] estudaram alguns caminhos para modelar o fluxo de multiprodutos em arcos para problemas de roteamento de veículos, incluindo formulações para o problema do caixeiro viajante. Baldacci et al. [3] usaram a abordagem de Finke [8] para adicionar o fluxo de dois produtos em arcos na modelagem do problema de roteamento de veículos capacitado. Recentemente, Hà et al. [12] expandiram a proposta de Baldacci et al. [3] para modelar o problema de rotas de cobertura multiveículos, enquanto Hà et al. [13] introduziram um modelo de fluxo em arcos para o problema de roteamento de veículos generalizado. Note que os modelos citados possuem características bem específicas em suas formulações, porém são baseados em modelos de fluxo em redes.

Ter algum tipo de equilíbrio entre rotas tem sido proposto na literatura. Oliveira et al. [21] construíram rotas de cobertura equilibradas para viaturas policiais com o objetivo de distribuir as

visitas (contato com a população) igualmente entre as viaturas para promover a sensação de segurança na atividade de patrulhamento preventivo. Oliveira et al. [20] e Ota [22] estudaram modelos e métodos de resolução para o problema de rotas de cobertura multiveículos, em que a diferença entre o número de visitas entre rotas é limitada. O modelo introduzido neste artigo pode ser visto como uma combinação dos modelos propostos em [3, 13, 22].

Um estudo de caso foi conduzido como forma de validar a viabilidade prática do modelo proposto neste artigo, tendo como motivação inicial uma parceria entre a Câmara Municipal de Itumbiara-GO, o Ministério Público e o Instituto Federal Goiás de Educação Ciência e Tecnologia (IFG) - Campus Itumbiara. Segundo estimativa do censo (IBGE [14, 15]), o município de Itumbiara possui cerca de 106 mil habitantes e índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) igual a 0,752. Seu Produto Interno Bruto (PIB) é o sexto maior do Estado de Goiás e posiciona-se em 219º no Brasil, sendo que cerca de 30% da economia local é derivada da indústria, configurando um importante papel no desenvolvimento regional. O projeto *Solução Cidadãs* (MPGO [19]) reuniu os poderes Executivo, Legislativo e Judiciário além das instituições de Ensino Superior em torno de temáticas de relevância social. Cada instituição ficou encarregada de um tema e o projeto desenvolvido por estudantes do IFG buscava soluções para melhorar o transporte público de ônibus do município. Naquela circunstância, o transporte era realizado por uma determinada empresa privada, que executava também o transporte de ônibus fretados para indústrias da região e apresentou o problema que deu origem a este estudo. A localização afastada dos distritos industriais traz demandas por transporte de passageiros com características específicas. Por exemplo, a segurança e a satisfação dos funcionários são demandas que podem ser alcançadas por meio de rotas otimizadas. Assim, várias indústrias optam pela terceirização do transporte dos seus funcionários na tentativa de suprir deficiências do transporte público convencional.

Para essa aplicação, diversos experimentos computacionais e ajustes de parâmetros, divididos em dois cenários de testes, foram realizados com o objetivo de investigar o impacto prático de planejar rotas equilibradas em termos da quantidade de passageiros, número de visitas e da distância total percorrida. Os dados práticos utilizados referem-se ao transporte fretado de trabalhadores de uma indústria do ramo alimentício na cidade de Itumbiara-GO, que emprega aproximadamente mil funcionários divididos em duas equipes. A equipe operacional trabalha em três turnos, enquanto que a equipe administrativa trabalha em dois turnos. Este estudo foca no primeiro turno da equipe operacional. Este turno conta com 176 funcionários distribuídos em 6 linhas de ônibus distintas. A linha de ônibus mais longa, que visita pontos em duas cidades vizinhas a Itumbiara-GO, precisa iniciar o seu percurso às 5:30h de tal forma a permitir que todos os passageiros nessa linha desembarquem antes das 7:00h na indústria, que é o início do primeiro turno da equipe operacional. A realização do transporte é feita por meio de uma frota homogênea constituída por ônibus convencional. No entanto, quando ocorre algum problema com um veículo da frota, a empresa também possui micro-ônibus e vans que podem ser utilizados para substituição. Todos os dados da solução empírica, usada pela empresa e comparada no estudo de caso, foram coletados *in loco*, incluindo a localização geográfica (latitude e longitude) de todos os pontos de embarque de passageiros, o tempo gasto em cada parada e as distâncias e tempos de cada rota.

Os resultados obtidos para o estudo de caso são detalhados na Seção 3 e mostram, por exemplo, que é possível reduzir em até 33% o número de veículos da frota em relação à solução adotada pela empresa com significativa redução da distância total percorrida pelos veículos.

As principais contribuições deste artigo são resumidas como segue: i) o desenvolvimento de uma formulação de fluxo de produtos em arcos para propor um modelo de otimização para o problema de roteamento de veículos fretados. Diferentemente da literatura, a inclusão adequada de novas equações e a adaptação das equações de fluxo em modelos de roteamento possibilita controlar a diferença da quantidade de passageiros entre rotas, permitindo desenhar rotas equilibradas no sentido de obter uma sequência não sobrecarregada de coleta de passageiros por veículo; ii) a resolução de um problema prático do transporte de passageiros por veículos fretados na cidade de Itumbiara-GO; iii) a descrição e discussão de uma série de testes computacionais comparando rotas típicas de um modelo de roteamento com rotas equilibradas no planejamento de transporte fretado.

O restante do artigo é organizado da seguinte forma. A Seção 2 descreve a notação utilizada e as formulações matemáticas que modelam a nossa proposta de planejamento de rotas para veículos fretados. A Seção 3 apresenta uma série de experimentos computacionais para validar a nossa proposta, seguida de uma ampla discussão dos resultados obtidos. Finalmente, as conclusões do trabalho e as possibilidades de trabalhos futuro são descritas na Seção 4.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Esta seção fornece a notação usada e apresenta a formulação proposta neste artigo para modelar o planejamento de rotas para veículos fretados. Preliminarmente, duas formulações do problema de roteamento de veículos capacitado (PRVC) são discutidas como suporte para o entendimento da nossa proposta.

### 2.1 Descrição e formulações para o PRVC

O primeiro PRVC considerado neste artigo foi descrito por Baldacci et al. [3] e envolve um grafo não direcionado  $G = (V, A)$ , para o qual  $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$  é o conjunto de vértices e  $A$  é o conjunto de arestas. O vértice 0 corresponde ao depósito e o restante do conjunto de vértices  $V' = V \setminus \{0\}$  é formado por  $n-1$  clientes. Um custo  $c_{ij}$  não negativo está associado a cada aresta  $\{i, j\} \in A$ . Na sequência, cada vértice  $i \in V'$  indica em ambos os casos um cliente e a sua localização. Cada cliente  $i \in V'$  solicita unidades de demanda  $d_i$  por produtos que devem ser fornecidas pelo depósito 0 (escolhemos  $d_0 = 0$ ). Uma frota de  $m$  veículos idênticos, cada um com capacidade  $C$ , encontra-se no depósito e deve ser usada para suprir a demanda dos clientes por produtos. Se  $F$  é um subconjunto de  $A$ , então  $F$  induz o subgrafo  $G(F) = (V(F), F)$ , onde  $V(F)$  é o conjunto de vértices incidentes a pelo menos uma aresta de  $F$ . Uma rota é definida como um subconjunto não vazio de arestas  $R \subset A$  para o qual o subgrafo induzido  $G(R)$  é um ciclo simples contendo o depósito 0, tal que a demanda total dos clientes em  $V(R) \setminus \{0\}$  não ultrapasse a capacidade do veículo. Cada rota representa uma viagem de um veículo que deixa

o depósito, entrega as demandas por produtos dos clientes  $V(R) \setminus \{0\}$  e retorna ao depósito. O custo de uma rota corresponde a soma dos custos das arestas formando a rota. O objetivo do PRVC é desenhar  $m$  rotas, uma rota para cada veículo da frota, de tal maneira que cada cliente é visitado exatamente uma vez e a soma total dos custos das rotas seja minimizada.

Uma formulação matemática para o PRVC, denominada aqui de formulação de fluxo de veículos de dois índices, que permite rotas com um único cliente foi originalmente proposta por Laporte et al. [18] como segue. Considere a variável inteira  $x_{ij}$  que assume valor  $\{0, 1\}$  para cada aresta  $\{i, j\} \in A \setminus \{\{0, j\} \mid j \in V'\}$  e valor  $\{0, 1, 2\}$  para cada aresta  $\{0, j\} \in A, j \in V'$ . Sejam  $\mathcal{L} = \{S \mid S \subseteq V', |S| \geq 2\}$  uma família de subconjuntos, tal que  $r(S)$  é a quantidade mínima de veículos de capacidade  $C$  necessária para satisfazer a demanda dos clientes em  $S \in \mathcal{L}$ , e  $\bar{S} = V \setminus S$ . Então, a versão de fluxo de veículos para o PRVC é formulado a partir do seguinte modelo de programação linear inteira.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\{i,j\} \in A} c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j \in V, i < j} x_{ij} + \sum_{j \in V, i > j} x_{ji} = 2, \quad i \in V', \tag{2.2}$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} + \sum_{i \in \bar{S}} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq 2r(S), \quad i < j, \quad S \in \mathcal{L}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j \in V'} x_{0j} = 2m, \tag{2.4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \{i, j\} \in A \setminus \{\{0, j\} : j \in V'\}, \tag{2.5}$$

$$x_{0j} \in \{0, 1, 2\}, \quad \{0, j\} \in A, \quad j \in V'. \tag{2.6}$$

O custo total das rotas é minimizado em (2.1). Duas arestas estão ativas no vértice  $i$  se ele é visitado de acordo com (2.2). As restrições de capacidade dos veículos aparecem em (2.3), que também são restrições de eliminação de subrotas. Nelas, para qualquer subconjunto  $S$  que não inclui o depósito,  $r(S)$  veículos entram e deixam os clientes de  $S$ . A quantidade de restrições em (2.3) é exponencial, portanto computacionalmente inviável. De acordo com (2.4),  $m$  veículos deixam e retornam ao depósito, enquanto o domínio das variáveis de decisão é dado em (2.5) e (2.6).

Utilizar formulações que envolvem o fluxo de produtos nas arestas também é um caminho usado na literatura para modelar o PRVC. Essas formulações combinam restrições de designação para modelar as rotas de veículo e de fluxo de multiprodutos para modelar o movimento de mercadorias. Uma das primeiras formulações desse tipo foi proposta por Garvin et al. [9] na modelagem de um problema de entregas cujo produto neste caso era petróleo. O modelo geral pode ser chamado de formulação de fluxo de multiprodutos que introduz explicitamente orientação de arco, que aqui é visto como um segundo caso preliminar da nossa proposta.

Seguindo a formulação para o problema do caixeiro viajante de Finke [8], Baldacci et al. [3] introduziram o seguinte modelo de programação inteira para o PRVC simétrico a partir de uma abordagem de fluxo de rede de dois produtos que elimina a quantidade exponencial de restrições

de subrotas presente no modelo (2.1)–(2.6). Seja  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{A})$  um grafo estendido de  $G$  ao adicionar o vértice  $n$  (cópia do depósito 0), onde  $\bar{V} = V \cup \{n\}$ ,  $V' = \bar{V} \setminus \{0, n\}$ ,  $\bar{A} = A \cup \{\{i, n\}, i \in V'\}$  e  $c_{in} = c_{0i}$ ,  $i \in V'$ . Além disso, considere  $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$  como a demanda total do subconjunto de vértices  $S \subseteq V'$ . No grafo  $\bar{G}$ , uma rota  $R = (i_1, i_2, \dots, i_{|R|})$  é um caminho simples que vai de  $i_1 = 0$  até  $i_{|R|} = n$ . Para uma dada rota  $R$ ,  $\bar{V}(R)$  e  $\bar{A}(R)$  representam os conjuntos de vértices e de arestas de  $\bar{G}$  percorridos pela rota, respectivamente.  $V'(R) = \bar{V}(R) \setminus \{0, n\}$  corresponde ao conjunto de clientes.

Considere ainda a variável binária  $x_{ij}$  de fluxo de veículos que está ativa se a aresta  $\{i, j\} \in \bar{A}$  está na solução, e a adição de duas variáveis de fluxo de produtos  $f_{ij}$  e  $f_{ji}$  sobre uma aresta  $\{i, j\} \in \bar{A}$  de uma solução viável do PRVC por meio da qual o veículo transporta uma carga selecionada dentre  $C$  unidades. Se este veículo viaja de  $i$  para  $j$ , então o fluxo  $f_{ij}$  representa a carga atual e  $f_{ji}$  representa o espaço vazio atual no veículo, significando que  $f_{ji} = C - f_{ij}$ . Note que as variáveis de fluxo  $f_{ij}$ ,  $i, j \in \bar{V}$ ,  $i \neq j$ , definem dois caminhos para uma rota na solução viável. O caminho que parte do vértice 0 para o vértice  $n$  é dado pelas variáveis de fluxo representando a carga no veículo, enquanto o segundo caminho que parte do vértice  $n$  para o vértice 0 é dado pelas variáveis de fluxo representando o espaço vazio no veículo. A formulação matemática de Baldacci et al. [3] é então como segue.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\{i,j\} \in \bar{A}} c_{ij} x_{ij} \tag{2.7}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j \in \bar{V}} (f_{ji} - f_{ij}) = 2d_i, \quad i \in V', \tag{2.8}$$

$$\sum_{j \in V'} f_{0j} = d(V'), \tag{2.9}$$

$$\sum_{j \in V'} f_{j0} = mC - d(V'), \tag{2.10}$$

$$\sum_{j \in V'} f_{nj} = mC, \tag{2.11}$$

$$f_{ij} + f_{ji} = Cx_{ij}, \quad \{i, j\} \in \bar{A}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{j \in \bar{V}, i < j} x_{ij} + \sum_{j \in \bar{V}, i > j} x_{ji} = 2, \quad i \in V', \tag{2.13}$$

$$f_{ij} \geq 0, f_{ji} \geq 0, \quad \{i, j\} \in \bar{A}, \tag{2.14}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \{i, j\} \in \bar{A}. \tag{2.15}$$

O padrão do fluxo viável de produtos que partem dos vértices 0 e  $n$  e atravessam os vértices dos clientes  $V'$  é modelado pelas Restrições (2.8)–(2.11) e (2.14). O fluxo de saída do vértice fonte 0 deve ser igual a demanda total dos clientes de acordo com (2.9), enquanto que o fluxo de saída do vértice fonte  $n$  deve corresponder a capacidade total da frota de veículos de acordo com (2.11). Em (2.8), para cada cliente  $i \in V'$ , o fluxo de entrada menos o fluxo de saída é igual ao dobro da demanda. O fluxo de entrada no vértice 0 equivale a capacidade residual da frota de veículos em (2.10). Se existe fluxo de produtos entre dois clientes, então (2.12) ativa a aresta incidente ne-

les na solução factível, enquanto em (2.13) cada cliente contém duas arestas incidentes. Baldacci et al. [3] demonstraram que o conjunto de soluções para (2.8)–(2.15) corresponde ao conjunto de soluções para o PRVC.

## 2.2 Roteamento de veículos fretados considerando equilíbrio no fluxo de passageiros

O modelo proposto nesse artigo utiliza as características de fluxo de dois produtos do modelo (2.7)–(2.15) para representar as particularidades do estudo de caso. Esse tipo de formulação de fluxo de produtos nas arestas apresenta desvantagens quando se pretende adicionar novas restrições, como restrições para janela de tempo, frota não homogênea, entre outras [3], incluindo a impossibilidade de comparar rotas devido a falta de um terceiro índice para as rotas nas variáveis. Parte dessa dificuldade é superada nesse artigo, onde comparamos a quantidade de passageiros entre rotas distintas.

O fluxo de produtos é substituído pelo fluxo de passageiros nos veículos, ou seja, o fluxo de produtos ou cargas no modelo anterior equivale ao fluxo de passageiros no interior do veículo (cada passageiro equivale a uma unidade de produto). A demanda em cada vértice é a quantidade de passageiros que aguardam o fretado em cada ponto de coleta. Nossa proposta também pode ser considerada uma extensão do modelo (2.7)–(2.15), uma vez que um certo controle na quantidade de passageiros entre veículos é adicionado ao modelo, no sentido de que cada veículo usado transporta aproximadamente a mesma quantidade de passageiros. Cada vértice ou cliente no modelo (2.7)–(2.15) equivale a um ponto de coleta de passageiros (ponto de ônibus).

O parâmetro que define a capacidade do veículo é substituído por duas novas variáveis para limitar o número de passageiros por rota.  $Q$  e  $q$  são as variáveis que representam as quantidades máxima e mínima de passageiros em cada veículo, respectivamente. A frota homogênea de veículos tem tamanho  $m$  como uma variável. Adicionalmente, o parâmetro  $r$  dá a diferença máxima permitida na quantidade de passageiros entre rotas. Com essas novas considerações, a formulação matemática para o problema de roteamento de veículos fretados (PRVF) proposto nesse artigo é descrita por meio do seguinte modelo de programação não linear inteiro misto.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\{i,j\} \in \bar{A}} c_{ij}x_{ij} \tag{2.16}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j \in \bar{V}} (f_{ji} - f_{ij}) = 2d_i, \quad i \in V', \tag{2.17}$$

$$\sum_{j \in V'} f_{0j} = \sum_{i \in V'} d_i, \tag{2.18}$$

$$\sum_{j \in V'} f_{j0} = mQ - \sum_{i \in V'} d_i, \tag{2.19}$$

$$\sum_{j \in V'} f_{nj} = mQ, \tag{2.20}$$

$$f_{0j} \geq x_{0j}q, \quad j \in V', \tag{2.21}$$

$$f_{ij} + f_{ji} = Q(x_{ij} + x_{ji}), \quad \{i, j\} \in \bar{A}, \quad i < j, \tag{2.22}$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad \{i, j\} \in \bar{A}, \quad i < j, \tag{2.23}$$

$$\sum_{i \in \bar{V}, i \neq k} x_{ik} + \sum_{j \in \bar{V}, j \neq k} x_{kj} = 2, \quad k \in V', \tag{2.24}$$

$$\sum_{i \in \bar{V}} x_{ik} \leq 1, \quad k \in V', \quad i \neq k, \tag{2.25}$$

$$\sum_{j \in \bar{V}} x_{kj} \leq 1, \quad k \in V', \quad j \neq k, \tag{2.26}$$

$$\sum_{j \in V'} x_{j0} = 0, \tag{2.27}$$

$$\sum_{j \in V'} x_{nj} = 0, \tag{2.28}$$

$$\sum_{j \in V'} x_{0j} = m, \tag{2.29}$$

$$\sum_{j \in V'} x_{jn} = m, \tag{2.30}$$

$$0 \leq Q - q \leq r, \tag{2.31}$$

$$f_{ij} \geq 0, f_{ji} \geq 0, \quad \{i, j\} \in \bar{A}, \tag{2.32}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \{i, j\} \in \bar{A}, \tag{2.33}$$

$$m, q, Q \in \mathbb{N}. \tag{2.34}$$

O custo total das rotas é minimizado em (2.16). O fluxo de passageiros partindo dos vértices 0 e n e que atravessa os vértices dos clientes V' é modelado por (2.17)–(2.20) e (2.32) da mesma forma que em (2.8)–(2.11) e (2.14). A inclusão de (2.21) torna este modelo adequado para a aplicação proposta neste artigo. Note que agora se um veículo é usado em uma solução factível, então ele inicia com um fluxo mínimo de passageiros. O fluxo de veículos é modelado por (2.22)–(2.30). Neste modelo apenas uma direção é permitida para cada aresta ao determinar o fluxo de veículos que partem do vértice 0 para o vértice n. Note que por (2.27) não existe aresta ativa chegando



no vértice 0 e por (2.28) não existe aresta ativa saindo do vértice  $n$ . No entanto, por (2.29) existem  $m$  veículos saindo do vértice 0 e por (2.30) existem  $m$  veículos chegando no vértice  $n$ . Além disso, observe que por (2.23)–(2.26) apenas uma direção é escolhida para cada aresta ativa. Então, (2.22) conecta o fluxo de veículos ao fluxo de passageiros nesta aresta ativa. É importante lembrar que diferente do fluxo de veículos, as variáveis de fluxo de passageiros  $f_{ij}$  definem dois caminhos para uma rota na solução viável. Um caminho que parte do vértice 0 para o vértice  $n$  e um segundo caminho que parte do vértice  $n$  para o vértice 0. Finalmente, o domínio das variáveis é definido em (2.31)–(2.34).

A Figura 1 ilustra uma típica solução factível para o PRVF. Cada seta contínua em negrito pertence ao caminho do vértice 0 para o vértice  $n$  cujo valor indicado em cada seta contínua é a quantidade atual de passageiros no veículo. No sentido oposto, cada seta tracejada pertence ao caminho do vértice  $n$  para o vértice 0 cujo valor indicado em cada seta tracejada é a quantidade de assentos vazios no veículo. Em cada ponto de coleta (conjunto  $V'$ ) está indicado em vermelho a demanda de passageiros neste ponto. O exemplar da figura limita em  $r = 3$  a maior diferença de fluxo de passageiros entre rotas. Neste caso, considerando a demanda total de passageiros igual a 74, que está distribuída ao longo dos pontos de coleta, a solução tem  $m = 4$  rotas, além de fornecer  $Q = 20$  e  $q = 17$  como sendo a maior e a menor quantidade de passageiros em um veículo, respectivamente. Note que se  $x_{0j} = 1$  para algum  $j \in V'$ , então por (2.21) temos  $f_{0j} \geq 17$ . Além disso, por (2.22) o maior valor que  $f_{0j}$  pode atingir é 20, o que corresponde a uma solução para o PRVF contendo um conjunto de rotas equilibradas em relação a quantidade de passageiros.

A principal diferença do modelo proposto (2.16)–(2.34) com os modelos (2.1)–(2.6) e (2.7)–(2.15) está na inclusão de um certo tipo de equilíbrio entre rotas por meio de uma formulação de fluxo de produto em arco que não considera um índice para cada veículo. Observamos que o uso de um terceiro índice para rotular cada veículo na variável de decisão facilitaria a comparação das rotas no conjunto de restrições. Além disso, apesar das restrições de fluxos que eliminam subrotas desconectadas apresentarem relaxação fraca, elas aparecem em quantidade polinomial. Isso fornece um ganho significativo quando se pretende usar diretamente um solver de resolução, ou seja, facilita a implementação ao não exigir nenhuma técnica sofisticada para fortalecer o politopo, a não ser é claro nas escolhas de configuração do solver.

Soluções de roteamento com algum tipo de equilíbrio entre rotas podem apresentar muitas vantagens no transporte de passageiros. Por exemplo, elas podem evitar que um veículo circule com passageiros na sua capacidade máxima enquanto outro veículo faz seu trajeto praticamente vazio. O conforto do passageiro se difere muito nesses casos. O equilíbrio no tamanho das rotas, evitando uma rota muito longa, pode ajudar a cumprir faixas de horários no deslocamento sem incorporar janela de tempo no modelo. Adicionando o equilíbrio no número de vértices por rota, as soluções tornam-se mais equilibradas em termos da carga de trabalho por veículo. Neste trabalho, o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas é modelado, porém também é investigado o efeito desse equilíbrio em relação ao tamanho e ao número de vértices visitados por rota.

Apesar das Restrições (2.19)–(2.22) serem não lineares, a estrutura da modelagem proposta permite simular várias configurações para o PRVF considerando, por exemplo, fixar adequadamente

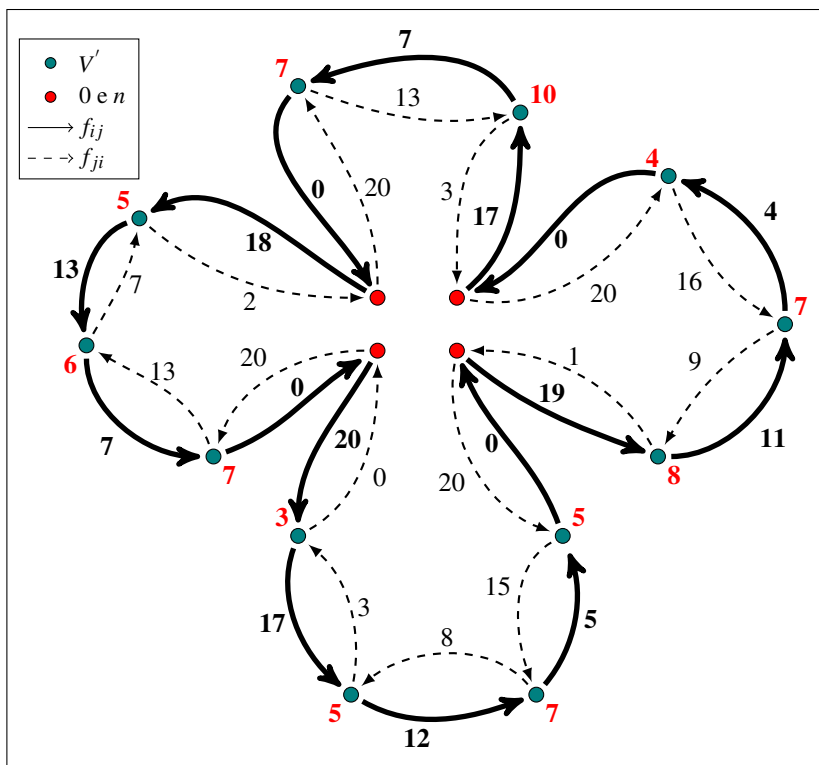


Figura 1: Solução factível para o PRVF contendo quatro veículos.

algumas variáveis para tornar o modelo linear. Note que o modelo é flexível, pois dado a demanda de passageiros ele pode ser usado para antecipar o planejamento da capacidade e o tamanho da frota usada por uma empresa de fretamento, no sentido que esses valores podem ser simulados como parâmetros de entrada ou variáveis. O controle na quantidade de passageiros por rota também permite em um segundo plano encontrar rotas equilibradas em termos do tamanho (ou tempo de deslocamento) e do número de vértices visitados por rota. Uma série de experimentos computacionais são apresentados na Seção 3, para os quais o caminho escolhido para linearizar o modelo proposto, considerando o equilíbrio entre rotas, aparece descrito nas Seções 3.2 e 3.3. Nas simulações realizadas nos testes computacionais, além do fluxo de passageiros também são analisados a capacidade e o tamanho da frota.

### 3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Esta seção apresenta e discute os experimentos computacionais realizados para o estudo de caso. A Seção 3.1 descreve como os dados foram coletados. As Seções 3.2 e 3.3 explicam como o equilíbrio na quantidade de passageiros é incorporado tornando o modelo matemático linear para o estudo de caso. As configurações usadas para gerar os exemplares resolvidos, divididos em dois cenários de testes, são descritas nas Seções 3.4 e 3.5. Os resultados numéricos são apresentados

na Seção 3.6, enquanto uma discussão sobre as características relevantes das soluções obtidas é feita nas Seções 3.7 e 3.8.

### 3.1 Coleta de dados para o estudo de caso

A empresa de fretamento de veículos autorizou percorrer todas as seis rotas atuais de coleta de passageiros usadas por ela, permitindo que a captação dos dados fosse realizada *in loco*. Em cada percurso, com a utilização de um aparelho eletrônico contendo um *Global Position System* (GPS) e o aplicativo *HERE Technologies*, foram coletadas as coordenadas geográficas de cada ponto de coleta de passageiros. Essas coordenadas somam 110 pontos de coleta, totalizando 111 vértices para o modelo PRVC ao incluir as coordenadas geográficas da indústria (depósito no modelo). *HERE Technologies* é uma empresa que fornece dados de mapeamento que inclui a navegação orientada por voz para pedestres e motoristas de mais de 180 países. Ela usa tecnologia avançada para capturar e armazenar em nuvem o conteúdo local, tais como redes de estradas, edifícios, parques e padrões de tráfego para que os usuários tenham acesso por meio de um dispositivo móvel. Utilizando macros do *Excel VBA* em conjunto com a *Google Matrix API* e as coordenadas de latitude e longitude dos 111 vértices foi possível calcular a matriz de distâncias (parâmetro principal para a função objetivo). Note que esta matriz não é simétrica. A Figura 2 ilustra as localizações dos vértices plotados sobre o mapa, as quais estão principalmente em 62 bairros de Itumbiara-GO, além de algumas localizações nas cidades vizinhas Araporã-GO e Centralina-GO.

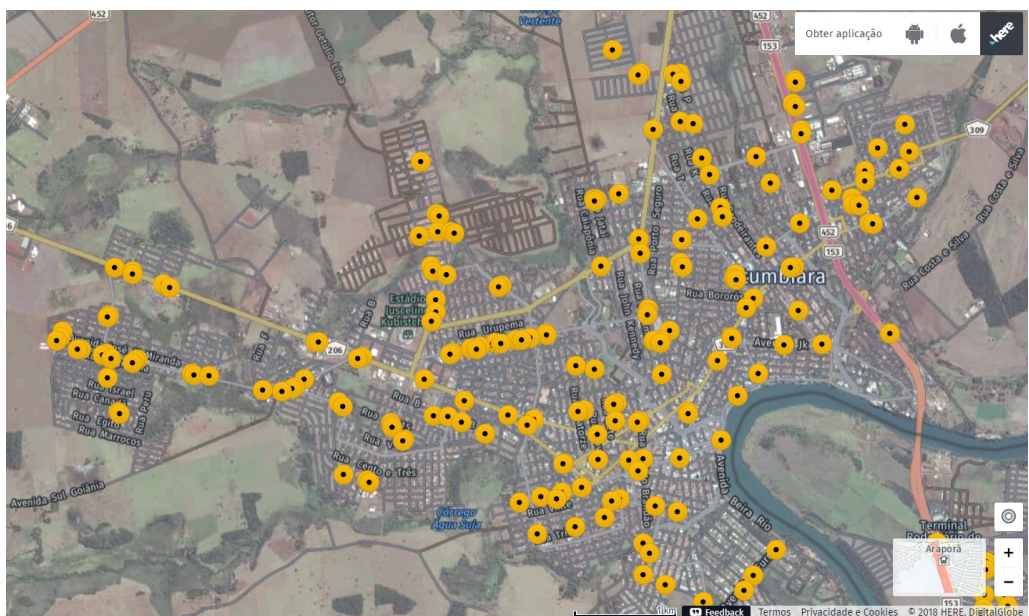


Figura 2: Mapeamento geográfico dos pontos de ônibus na cidade. Fonte: *HERE Technologies*.

Ainda durante a captação das coordenadas foi possível entender um pouco da dinâmica do transporte feito pela empresa de fretamento, como a decisão dos horários de coleta de passageiros em cada ponto, que precisam estar em sincronia com os turnos de trabalho da indústria, e do tempo gasto para completar cada rota. As rotas têm funções distintas, uma parte delas circula coletando passageiros nos pontos com destino final na empresa para início de um turno de serviço, enquanto a outra parte circula com o objetivo de deixar passageiros nos pontos ao final de um turno de serviço. Atualmente, o transporte é realizado com ônibus convencional de 48 lugares de capacidade, porém a empresa de fretamento tem alguns outros veículos para substituição emergencial em decorrência de algum problema mecânico. A frota emergencial é composta por ônibus de 48 lugares, micro-ônibus de 23 lugares e vans de 15 lugares. Devido a disponibilidade de três tipos de veículos, testes computacionais foram realizados alternando a capacidade dos veículos fornecendo novas possibilidades de planejamento das rotas. Um turno específico foi escolhido para os experimentos computacionais, para o qual a demanda total de passageiros é igual a 176. A metodologia escolhida nesse artigo pode ser facilmente repetida para os outros turnos.

### 3.2 Rotas equilibradas

A literatura apresenta algumas propostas de modelos de roteamento considerando equilíbrio entre rotas, por exemplo em relação a quantidade de vértices visitados (Oliveira et al. [20, 21], Ota [22]). Neste artigo, tratamos do equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas. Como pode ser visto nos resultados computacionais na Seção 3.6, essa escolha de solução ajuda a construir rotas mais equilibradas também em termos da distância percorrida e dos pontos visitados por rota e ajuda a diminuir o número de veículos utilizados. No estudo de caso, a empresa de fretamento atende à funcionários (passageiros) de uma indústria sem considerar rigorosamente uma janela de tempo para a coleta deles em cada ponto de coleta, no entanto, os passageiros necessitam entrar na indústria em horário de turno específico. Logo, cada veículo deveria concluir a sua rota de tal forma que os funcionários cheguem na indústria sem atrasos. Nesse sentido, a quantidade de passageiros em cada ponto de coleta, a quantidade de pontos visitados e a distância percorrida por cada veículo são importantes para atingir idealmente um certo equilíbrio entre rotas e favorecer o atendimento dos horários e ter rotas adequadas para um fretamento eficiente.

O parâmetro  $r$  no modelo é a diferença máxima permitida na quantidade de passageiros entre rotas em uma solução factível do PRVF, ou seja,  $0 \leq Q - q \leq r$  em (2.31). Um caminho para ter rotas com a quantidade de passageiros aproximadamente a mesma é supor um certo “alvo” entre as possibilidades para a quantidade de passageiros para, assim, sempre que  $Q$  e  $q$  estiverem perto ou atingirem esse alvo, as rotas estarão equilibradas. Seja  $a > 0$  este alvo e considere  $\tilde{r} \in \mathbb{N}$  um desvio em relação ao alvo  $a$ . Podemos considerar  $Q := a + \tilde{r}$  e  $q := a - \tilde{r}$  sempre que  $a$  e  $\tilde{r}$  forem escolhidos adequadamente de tal forma que  $0 \leq Q - q \leq r$ . Assim,  $\tilde{r}$  pode ser usado para controlar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas, ou seja, quanto menor for  $\tilde{r}$  maior será o equilíbrio. Considerando a demanda total de passageiros, uma relação entre  $Q$ ,  $q$  e  $m$  é estabelecida para atingir o equilíbrio proposto neste artigo. A média de passageiros por rota  $a := (\sum_{i \in V'} d_i) / m$  depende do tamanho da frota  $m$ , então ao considerar  $Q := Q(m) = \lceil a \rceil + \tilde{r}$

e  $q := q(m) = \lfloor a \rfloor - \tilde{r}$ , estabelecemos uma relação entre o equilíbrio nas rotas e o tamanho da frota. Note que se  $a \in \mathbb{N}$ , então  $Q(m) - q(m) = 2\tilde{r}$ , caso contrário  $Q(m) - q(m) = 2\tilde{r} + 1$ . Logo, basta escolher  $\tilde{r}$  tal que em (2.31) o modelo satisfaça  $2\tilde{r} + 1 \leq r$ . Além disso,  $Q(m)$  não pode ser maior que a capacidade do veículo.

### 3.3 Linearização do modelo considerando o equilíbrio entre rotas

As Restrições (2.19)–(2.22) tornam o modelo não linear. Este trabalho não pretende resolver o modelo não linear e também não tem como objetivo considerar técnicas de linearização elaboradas sobre o modelo. O objetivo é fornecer soluções equilibradas no estudo de caso. Assim, sempre que  $Q$  e  $q$  forem fixados a priori o modelo torna-se linear. Como será visto, as escolhas  $Q := Q(m)$  e  $q := q(m)$  descrita na Seção 3.2 permitem a linearização do modelo, bem como são suficientes para atingir os objetivos desse trabalho relacionados com o equilíbrio de passageiros entre rotas.

### 3.4 Solução empírica

A Tabela 1 fornece as principais informações coletadas de algumas das rotas atuais que a empresa de fretamento usa para o transporte de funcionários. Chamamos esse conjunto de rotas de *solução empírica*. Essa solução é constituída de 6 rotas de ônibus convencional de 48 lugares cada um (288 lugares no total). A tabela mostra como a quantidade total de pontos de coleta e a demanda total de passageiros são distribuídas entre as rotas, bem como o tamanho em quilômetros de cada rota. Observe na Coluna #passageiros que a metade da frota usa aproximadamente apenas 55% da capacidade do veículo, o que indica que a capacidade dos veículos está sendo subestimada na solução empírica. A maior diferença na quantidade de passageiros entre rotas é igual a 11, a mesma diferença ocorre na quantidade de visitas entre rotas, e aproximadamente 40 km é a maior diferença no tamanho das rotas.

Tabela 1: Dados captados *in loco* para cada rota na solução empírica.

rota	#pontos de coleta	#passageiros	capacidade	distância (km)
1	13	25	48	17,21
2	17	34	48	29,58
3	18	28	48	17,52
4	24	25	48	17,73
5	15	28	48	26,31
6	23	36	48	58,65
média	18,33	29,33	48	27,83
total	110	176	288	167

Os experimentos foram conduzidos em duas partes com o objetivo de fornecer soluções alternativas que possam substituir adequadamente a solução empírica. A primeira parte dos experimentos

(Cenário 1) apresenta soluções que respeitam as escolhas da empresa para os pontos de coleta em cada rota da solução empírica, porém adicionando alternativas para a sequência de visitas e tipo de veículos utilizados. A segunda parte dos experimentos (Cenário 2) busca soluções totalmente novas utilizando as localizações dos pontos de coleta e demais parâmetros.

### 3.5 Cenários de testes

Essa seção descreve dois cenários de testes realizados nos experimentos computacionais. Observe abaixo que várias configurações são escolhidas para obter soluções alternativas considerando três tipos de veículos.

#### 3.5.1 Cenário 1

Neste cenário de testes a solução empírica é estudada em dois passos sucessivos. Primeiramente, o conjunto de pontos de coleta (vértices) em cada rota da solução empírica é desagregado (*vértices desagregados*) e então um PRVF é formulado e resolvido separadamente para esse conjunto, considerando  $m$  como uma variável. Chamamos essa solução obtida de *solução parcial*. No final, a união das soluções parciais fornece uma opção de solução de rotas para a empresa. Este caminho respeita as decisões já estabelecidas pela empresa em relação aos pontos de coleta em cada rota da solução empírica. O objetivo com esse primeiro passo é construir uma solução alternativa que poderia substituir cada rota caso seja vantajosa. Note que cada solução parcial fornece um valor específico para  $m$ , então a união das soluções parciais fornece o tamanho da frota na solução alternativa. Em um segundo momento, todos os pontos de coleta são então considerados em conjunto (*vértices agregados*) para formular e resolver um novo PRVF fixando o valor  $m$  como sendo o tamanho da frota que foi gerado na solução alternativa. Enquanto no primeiro passo o PRVF é resolvido relaxando a proposta de equilíbrio entre rotas, o objetivo do segundo passo é verificar o potencial do PRVF considerando soluções com equilíbrio entre rotas.

*Testes para o PRVF sem considerar rotas equilibradas.*

O modelo PRVF é simplificado para não considerar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas e resolvido com as configurações considerando  $m$  variável,  $Q \in \{15, 23, 48\}$ ,  $q = 0$  e  $r = Q$  nos Testes 1–3 da Tabela 2 (vértices desagregados).

*Testes para o PRVF considerando rotas equilibradas.*

O PRVF é resolvido considerando a quantidade de passageiros equilibrada entre as rotas fornecendo agora soluções com novas características para a empresa. As configurações consideram  $m \in \{6, 12, 14\}$ ,  $Q = \lceil a \rceil + \tilde{r}$  e  $q = \lfloor a \rfloor - \tilde{r}$ , sendo  $\tilde{r} \in \{1, 2\}$  para ônibus e  $\tilde{r} \in \{2, 3\}$  para micro-ônibus e van nos Testes 7–12 da Tabela 2 (vértices agregados). Aqui cada valor para  $m$  foi fixado igual ao valor obtido para o tamanho total da frota nas soluções parciais dos Testes 1–3 (um

Tabela 2: Configuração dos cenários de testes para o estudo de caso.

PRVF sem considerar rotas equilibradas											
Cenário 1 – desagregado						Cenário 2 – agregado					
Teste	$m$	$Q$	$q$	$r$	veículo	Teste	$m$	$Q$	$q$	$r$	veículo
1	$\mathbb{N}$	48	0	48	ônibus	4	$\mathbb{N}$	48	0	48	ônibus
2	$\mathbb{N}$	23	0	23	micro	5	$\mathbb{N}$	23	0	23	micro
3	$\mathbb{N}$	15	0	15	van	6	$\mathbb{N}$	15	0	15	van
PRVF considerando rotas equilibradas											
Cenário 1 – agregado						Cenário 2 – agregado					
Teste	$m$	$Q$	$q$	$r$	veículo	Teste	$m$	$Q$	$q$	$r$	veículo
		$\lceil a \rceil + \tilde{r}$	$\lfloor a \rfloor - \tilde{r}$	$\tilde{r}$				$\lceil a \rceil + \tilde{r}$	$\lfloor a \rfloor - \tilde{r}$	$\tilde{r}$	
7	6	31	28	1	ônibus	13	4	45	43	1	ônibus
8	12	17	12	2	micro	14	9	21	18	1	micro
9	14	15	10	2	van	15	13	15	12	1	van
10	6	32	27	2	ônibus	16	4	46	42	2	ônibus
11	12	18	11	3	micro	17	9	22	17	2	micro
12	14	15	9	3	van	18	13	15	11	2	van

PRVF foi resolvido isoladamente considerando  $m$  variável para cada conjunto de pontos de coleta em cada rota da solução empírica). Logo, o tamanho total da frota foi obtido da união de todas as soluções parciais. Por exemplo, como esperado devido aos dados da Tabela 1, no Teste 1 foi obtido  $m = 1$  em cada solução parcial, ou seja, 6 rotas no total quando os veículos são ônibus. Além disso, 12 rotas no total para micro-ônibus e 14 rotas no total para van.

### 3.5.2 Cenário 2

Neste cenário de testes, as soluções são determinadas em dois passos sucessivos. Primeiramente, todos os pontos de coleta (vértices) são considerados conjuntamente (vértices agregados) na formulação e resolução do PRVF tendo  $m$  como uma variável, porém relaxando a proposta de equilíbrio entre rotas. Então, uma solução com novas características é fornecida como opção de solução para a empresa que poderia substituir a solução empírica caso seja vantajosa. Neste caso, as rotas são modificadas e as decisões da empresa em relação aos pontos de coleta em cada rota precisariam ser revistas considerando as vantagens apresentadas pela modelagem proposta neste artigo. Note que cada solução do primeiro passo fornece um valor específico para  $m$ . Em um segundo momento, ainda com todos os pontos de coleta considerados em conjunto (vértices agregados), um novo PRVF é formulado e resolvido fixando o valor  $m$  como sendo o tamanho da frota que foi gerado na solução do primeiro passo. Enquanto no primeiro passo o PRVF é resolvido relaxando a proposta de equilíbrio entre rotas, o objetivo do segundo passo é verificar o potencial do PRVF considerando soluções com equilíbrio entre rotas. No entanto, diferentemente do Cenário 1, o Cenário 2 não considera a solução empírica como um ponto de partida.

*Teste para o PRVF sem considerar rotas equilibradas.*

O PRVF é simplificado para não considerar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas e resolvido considerando o tamanho da frota como uma variável para confrontar com a quantidade de rotas usada na solução empírica. As configurações consideram  $m$  variável,  $Q \in \{15, 23, 48\}$ ,  $q = 0$  e  $r = Q$  nos Testes 4–6 da Tabela 2 (vértices agregados).

*Teste para o PRVF considerando rotas equilibradas.*

O PRVF é resolvido considerando a quantidade de passageiros equilibrada entre as rotas fornecendo agora soluções com novas características para a empresa. As configurações consideram  $m \in \{4, 9, 13\}$ ,  $\tilde{r} \in \{1, 2\}$ ,  $Q = \lceil a \rceil + \tilde{r}$  e  $q = \lfloor a \rfloor - \tilde{r}$  nos Testes 13–18 da Tabela 2 (vértices agregados). Aqui cada valor para  $m$  foi fixado igual ao valor obtido para o tamanho total da frota nas soluções dos Testes 4–6 que tiveram  $m$  como variável, ou seja, 4 rotas no total para ônibus, 9 rotas no total para micro-ônibus e 13 rotas no total para van.

É importante observar na Tabela 2 que, para o caso em que o veículo é uma van, obtemos  $Q = 16$  devido ao cálculo  $a := 176/14$  e  $a := 176/13$  nos Testes 12 e 18, respectivamente. No entanto, para manter factibilidade com a escolha da frota, consideramos também  $Q \leq \bar{Q} = 15$ . Ou seja, nos casos em que a frota é conhecida a priori é necessário incluir no modelo a restrição  $Q \leq \bar{Q}$ , onde  $\bar{Q}$  é a capacidade do veículo.

### 3.6 Resultados numéricos

O modelo matemático desenvolvido na Seção 2.2 foi codificado com a linguagem de modelagem JuMP (versão 0.18.2 [7]) incorporado na linguagem de programação Julia (versão 0.6 [4]). Todos os experimentos foram realizados em um computador pessoal com processador Intel(R) Core (TM) i7-8550 de 1.80 GHz, 16 GB de RAM e sistema operacional Windows 64-bit. Cada teste para o modelo PRVF foi resolvido com o solver IBM ILOG CPLEX 12.8. O limite de 3.600 segundos de tempo de CPU foi configurado como critério de parada do solver.

As tabelas que seguem compartilham colunas em comum, *rota* enumera as rotas na solução, *custo* fornece a distância total da rota em quilômetros,  $|V'|$  é a quantidade de vértices na rota,  $d(V')$  é a demanda total de passageiros coletados na rota,  $t(s)$  é o tempo de CPU gasto em segundos para cada execução do solver,  $\tilde{r}$  é o desvio em relação ao valor pretendido para equilibrar as rotas (a razão entre o total de demanda e o tamanho da frota) e, por fim, *GAP* fornece o gap de otimalidade retornado pelo solver ao finalizar a resolução do modelo.

A análise dos resultados numéricos tem dois objetivos principais: i) validar a modelagem proposta para o PRVF no estudo de caso; e ii) estudar o impacto sobre o custo total das rotas e a quantidade de vértices visitados por rota quando o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas é implementado. Conforme as configurações para os testes apresentados na Tabela 2 e descritos na Seção 3.5, o item ii) será analisado comparando os Testes 1–3 (*PRVF sem considerar*



*rotas equilibradas*) com os Testes 7–12 (*PRVF considerando rotas equilibradas*) do Cenário 1, e comparando os Testes 4–6 (*PRVF sem considerar rotas equilibradas*) com os Testes 13–18 (*PRVF considerando rotas equilibradas*) do Cenário 2.

As tabelas que seguem compartilham linhas em comum com as medidas usadas nessa análise, *total* fornece a soma total, *Me* é a média simples e *Dp* é o desvio-padrão do conjunto de valores tabelados. Além disso, como o objetivo principal é verificar o equilíbrio entre as rotas, o maior valor e o menor valor encontrados para cada medida nas colunas estão destacados em negrito para dar ideia da amplitude total encontrada para essa medida na solução final. Note que quanto menor for a amplitude total mais equilibrados são os dados observados.

### 3.6.1 Cenário 1: modificações da solução empírica por meio do modelo PRVF

A Tabela 3 compara as rotas obtidas no Teste 1 com as rotas da solução empírica. A solução parcial para cada conjunto de pontos de coleta desagregado usando o PRVF com  $m$  variável resultou em  $m = 1$ , pois o valor total de demanda em cada rota da solução empírica (veja Tabela 1) é menor que a capacidade do veículo. Para cada rota, a coluna *Dif. Rel.* fornece a diferença relativa entre o custo da rota na solução empírica atual (CE) e o custo da rota obtido da resolução do modelo PRVF (CM), ou seja,  $\text{Dif. Rel.} = \frac{|CE - CM|}{CE} \times 100$ . Note que a maior e a menor redução relativa no custo ocorreram na Rota 5 (11,52%) e na Rota 1 (3,49%), respectivamente, enquanto que a redução no custo total foi de 6,84% (aproximadamente 11,42 km). Se a preferência da empresa de fretado for por manter as decisões em relação a escolha dos pontos de coleta em cada rota, este experimento apresenta possibilidades de redução de custos por meio da mudança na sequência das visitas por rota.

Tabela 3: Comparação entre as rotas otimizadas e as rotas da solução empírica.

rota	custo		Dif. Rel. (%)
	empírica	Teste 1	
1	<b>17,21</b>	16,61	3,49
2	29,58	26,97	8,82
3	17,52	<b>16,15</b>	7,82
4	17,73	17,08	3,67
5	26,31	23,28	11,52
6	<b>58,65</b>	<b>55,49</b>	5,39
total	167,00	155,58	6,84

A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos da resolução do PRVF com  $m$  variável a partir de cada conjunto de pontos de coleta desagregado na solução empírica. Aqui o modelo PRVF é simplificado para não considerar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas, ou seja,  $q = 0$  e  $r = Q$ , onde  $Q = 48$  para ônibus,  $Q = 23$  para micro-ônibus e  $Q = 15$  para van. Nessas configurações que conservam as decisões da empresa em relação a escolha dos pontos de coleta em cada rota, o tamanho da frota com o uso de micro-ônibus resultou em 12, enquanto que com

Tabela 4: Soluções para o PRVF sem considerar rotas equilibradas nos Testes 1–3.

rota	ônibus (Teste 1)				micro-ônibus (Teste 2)				van (Teste 3)			
	custo	$ V' $	$d(V')$	t(s)	custo	$ V' $	$d(V')$	t(s)	custo	$ V' $	$d(V')$	t(s)
1	16,61	<b>13</b>	25	0,13	16,46	11	<b>23</b>	0,14	11,07	5	10	0,23
2	26,97	17	34	<b>0,08</b>	8,21	2	<b>2</b>	<b>0,14</b>	15,43	8	15	0,23
3	<b>16,15</b>	18	28	<b>0,47</b>	23,68	12	21	0,36	19,52	6	15	2,20
4	17,08	<b>24</b>	<b>25</b>	0,25	18,26	5	13	0,36	22,69	10	<b>15</b>	2,20
5	23,28	15	28	0,11	14,08	12	15	0,33	<b>3,84</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	2,20
6	<b>55,49</b>	23	<b>36</b>	0,41	<b>4,23</b>	6	13	0,33	14,08	12	15	0,14
7					17,15	<b>22</b>	23	0,20	4,23	6	13	<b>0,14</b>
8					4,74	<b>2</b>	2	0,20	12,22	10	11	1,64
9					23,18	13	23	0,27	14,56	<b>14</b>	14	1,64
10					6,78	2	5	0,27	17,11	8	15	0,81
11					<b>53,84</b>	10	19	<b>1,69</b>	15,03	7	13	0,81
12					16,47	13	17	1,69	<b>54,20</b>	10	15	<b>2,97</b>
13									54,07	8	15	2,97
14									13,40	5	6	2,97
total	155,58	110	176	1,45	207,08	110	176	5,98	271,44	110	176	21,15
Me	25,93	18,33	29,33		17,26	9,17	14,67		19,39	7,86	12,57	
Dp	15,12	4,37	4,63		13,30	6,00	7,94		15,55	3,28	3,61	

o uso de vans resultou em 14. O custo total das rotas aumenta conforme aumenta o tamanho da frota necessária para coletar a demanda total de passageiros. Como em cada rota foi considerada uma parte menor da quantidade total de vértices, o tempo computacional de CPU gasto não foi maior que 2,97 segundos, ou seja, GAP=0 com solução ótima obtida para cada resolução do modelo.

Exceto os Testes 1–3, os demais testes foram realizados com todos os vértices em conjunto na formulação de um único PRVF. Para esses testes, o tempo limite estipulado de 3.600 segundos para cada execução do solver foi ultrapassado e, portanto, nas Tabelas 5, 6 e 7 o valor de cada GAP é apresentado no lugar do tempo computacional.

O impacto geral nas soluções ao implementar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas no Cenário 1 (modificações da solução empírica por meio do modelo PRVF) pode ser visto comparando os resultados da Tabela 5 com os resultados da Tabela 4. Em particular, notamos que a tendência para todas as três medidas, partindo da Tabela 4 para Tabela 5, é de ter o maior valor encontrado mais próximo da média em cada coluna, o que mostra uma tendência de equilíbrio entre as rotas para as três medidas analisadas, ou seja, além da quantidade de passageiros, o custo e quantidade de visitas entre rotas. Se o veículo for ônibus, o Teste 7 apresenta maior equilíbrio que o Teste 1, se o veículo for micro-ônibus, o Teste 11 apresenta em geral maior equilíbrio que o Teste 2, enquanto que para van, o Teste 9 é mais promissor que o Teste 3. É importante destacar que o tamanho da frota nos Testes 7–12 foi determinado por meio das soluções encontradas nos Testes 1–3. Note que o caminho escolhido no próximo cenário de testes permitiu obter soluções com tamanho de frota reduzido.

Com o objetivo de exemplificar as características de uma solução fornecida pelo modelo no estudo de caso, a Figura 3 ilustra uma parcela da solução obtida para dois testes do Cenário 1. A Rota 1 (em cor azul) e a Rota 3 (em cor vermelha) estão desenhadas sobrepostas ao mapa

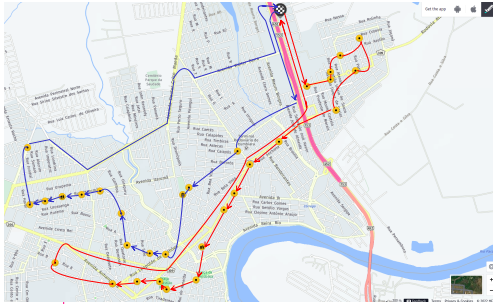
Tabela 5: Resultados para os Testes 7–12 considerando rotas equilibradas.

rota	ônibus (Teste 7)			micro-ônibus (Teste 8)			van (Teste 9)		
	$\tilde{r}=1$ GAP=29,61%		$d(V')$	$\tilde{r}=2$ GAP=37,79%		$d(V')$	$\tilde{r}=2$ GAP=41,69%		$d(V')$
	custo	$ V' $		custo	$ V' $		custo	$ V' $	
1	23,80	18	29	21,65	8	16	22,36	9	10
2	28,60	22	29	19,33	<b>13</b>	<b>17</b>	23,89	7	13
3	29,33	<b>14</b>	<b>28</b>	<b>13,93</b>	8	<b>12</b>	22,74	6	11
4	<b>39,51</b>	<b>22</b>	<b>31</b>	20,70	7	12	<b>60,57</b>	10	11
5	<b>23,37</b>	16	30	17,36	<b>6</b>	12	18,88	9	13
6	32,85	18	29	17,16	7	15	16,40	8	<b>10</b>
7				23,73	11	17	55,31	9	12
8				25,06	8	14	32,92	<b>10</b>	<b>15</b>
9				30,90	10	14	<b>4,96</b>	<b>5</b>	12
10				23,86	12	17	29,77	8	15
11				18,58	7	13	23,99	8	15
12				<b>59,99</b>	13	17	28,07	9	13
13							24,45	6	12
14							15,45	6	14
total	177,46	110	176	292,25	110	176	379,76	110	176
Me	29,58	18,33	29,33	24,35	9,17	14,67	27,13	7,86	12,57
Dp	6,04	3,20	1,03	12,07	2,52	2,10	14,77	1,61	1,74

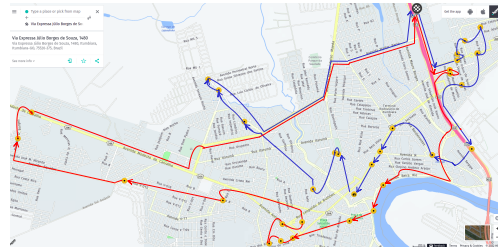
  

rota	ônibus (Teste 10)			micro-ônibus (Teste 11)			van (Teste 12)		
	$\tilde{r}=2$ GAP=28,21%		$d(V')$	$\tilde{r}=3$ GAP=23,44%		$d(V')$	$\tilde{r}=3$ GAP=39,77%		$d(V')$
	custo	$ V' $		custo	$ V' $		custo	$ V' $	
1	21,01	17	29	18,14	6	15	17,01	6	12
2	<b>57,93</b>	18	29	24,58	11	17	20,39	9	15
3	<b>18,85</b>	19	28	16,17	<b>17</b>	<b>18</b>	15,87	6	9
4	21,47	<b>22</b>	31	19,00	10	14	28,17	10	15
5	28,35	21	<b>32</b>	<b>5,11</b>	<b>4</b>	<b>11</b>	24,76	8	15
6	24,09	<b>13</b>	<b>27</b>	14,63	6	11	11,91	5	<b>9</b>
7				15,81	9	13	<b>68,95</b>	<b>11</b>	<b>15</b>
8				15,19	7	13	17,56	6	12
9				27,22	11	18	14,70	9	11
10				20,83	9	14	<b>11,08</b>	<b>4</b>	10
11				22,05	9	15	16,35	10	14
12				<b>33,71</b>	11	17	11,72	6	11
13							50,08	11	14
14							16,71	9	14
total	171,70	110	176	232,44	110	176	325,26	110	176
Me	28,62	18,33	29,33	19,37	9,17	14,67	23,23	7,86	12,57
Dp	14,73	3,20	1,86	7,21	3,35	2,46	16,51	2,32	2,28

da cidade de Itumbiara-GO na figura para destacar os resultados do Teste 1 da Tabela 4 e os resultados do Teste 7 da Tabela 5. Apenas as Rotas 1 e 3 foram escolhidas apropriadamente para fornecer uma imagem mais limpa, no entanto, ao comparar as rotas da Figura 3a com a Figura 3b, podemos observar o impacto nelas ao considerar rotas equilibradas.



(a) Rotas 1 e 3 para o Teste 1



(b) Rotas 1 e 3 para o Teste 7

Figura 3: Exemplo ilustrativo de solução.

### 3.6.2 Cenário 2: aplicação do modelo PRVF como ferramenta de planejamento de rotas

A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos considerando todos os pontos de coleta na formulação e resolução de um único PRVF com  $m$  variável. No entanto, o modelo PRVF é simplificado para não considerar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas, ou seja,  $q = 0$  e  $r = Q$ , para  $Q$  variando entre ônibus, micro-ônibus e van. Nesse caso em que as configurações não conservam as decisões da empresa em relação a escolha dos pontos de coleta em cada rota, o tamanho da frota teve redução significativa, de 6 para 4 veículos, 12 para 9 veículos e de 14 para 13 veículos, quando a frota é formada por ônibus, micro-ônibus e vans, respectivamente. Essa diminuição também permitiu uma diminuição significativa no custo total das rotas para cada tipo de frota quando comparado com os Testes 1–3 da Tabela 4.

Tabela 6: Resultados para os Testes 4–6 sem considerar rotas equilibradas.

rota	ônibus (Teste 4)			micro-ônibus (Teste 5)			van (Teste 6)		
	custo	$ V' $	$d(V')$	custo	$ V' $	$d(V')$	custo	$ V' $	$d(V')$
1	30,54	29	48	17,00	16	<b>23</b>	24,09	8	15
2	<b>42,56</b>	<b>32</b>	<b>48</b>	<b>37,15</b>	16	23	16,69	8	15
3	<b>15,37</b>	<b>21</b>	<b>39</b>	29,76	13	23	11,05	<b>4</b>	12
4	23,61	28	41	14,66	14	19	32,26	10	14
5				34,84	<b>17</b>	23	15,48	5	14
6				17,90	9	15	12,20	13	14
7				<b>3,95</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	16,10	7	12
8				17,34	13	23	<b>5,54</b>	6	13
9				12,65	9	19	15,48	<b>15</b>	15
10							18,94	10	<b>15</b>
11							13,32	6	<b>10</b>
12							17,41	8	12
13							<b>56,54</b>	10	15
total	112,08	110	176	185,24	110	176	255,10	110	176
Me	28,02	27,50	44,00	20,58	12,22	19,56	19,62	8,46	13,54
Dp	11,51	4,65	4,69	11,00	4,49	5,17	12,81	3,13	1,61

Tabela 7: Resultados para os Testes 13–18 considerando rotas equilibradas.

rota	ônibus (Teste 13)			micro-ônibus (Teste 14)			van (Teste 15)		
	$\bar{r}=1$	GAP=26,56%		$\bar{r}=1$	GAP=79,59%		$\bar{r}=1$	GAP=71,81%	
	custo	$ V' $	$d(V')$	custo	$ V' $	$d(V')$	custo	$ V' $	$d(V')$
1	31,93	28	<b>43</b>	125,47	13	18	54,63	9	12
2	<b>24,31</b>	<b>29</b>	44	58,11	10	21	48,18	8	13
3	<b>58,41</b>	<b>25</b>	<b>45</b>	85,80	8	<b>18</b>	35,15	7	<b>12</b>
4	30,23	28	44	44,40	13	<b>21</b>	72,69	8	<b>15</b>
5				<b>108,84</b>	14	20	<b>25,14</b>	<b>5</b>	14
6				103,09	16	21	32,60	8	12
7				140,43	<b>16</b>	19	35,86	9	15
8				<b>35,72</b>	12	19	47,50	11	15
9				56,74	<b>8</b>	19	33,15	8	12
10							87,75	8	12
11							88,77	10	14
12							<b>149,93</b>	<b>12</b>	15
13							60,43	7	15
total	144,88	110	176	758,60	110	176	771,78	110	176
Me	36,22	27,50	44,00	84,29	12,22	19,56	59,37	8,46	13,54
Dp	15,15	1,73	0,82	37,42	3,03	1,24	34,22	1,81	1,39

rota	ônibus (Teste 16)			micro-ônibus (Teste 17)			van (Teste 18)		
	$\bar{r}=2$	GAP=16,25%		$\bar{r}=2$	GAP=21,68%		$\bar{r}=2$	GAP=40,49%	
	custo	$ V' $	$d(V')$	custo	$ V' $	$d(V')$	custo	$ V' $	$d(V')$
1	<b>38,45</b>	<b>30</b>	43	23,82	10	19	15,76	7	15
2	<b>24,83</b>	<b>23</b>	<b>45</b>	28,34	12	17	<b>14,35</b>	<b>6</b>	13
3	28,69	30	<b>42</b>	<b>37,35</b>	15	22	20,98	<b>14</b>	14
4	34,99	27	46	16,12	11	<b>17</b>	25,15	8	13
5				<b>15,13</b>	12	20	25,23	9	<b>15</b>
6				16,01	12	<b>21</b>	18,56	7	14
7				18,56	<b>10</b>	20	18,60	8	<b>11</b>
8				15,13	<b>16</b>	20	18,14	8	13
9				24,06	12	20	33,46	7	14
10							<b>58,31</b>	7	13
11							27,87	13	15
12							26,02	9	15
13							17,81	7	11
total	126,96	110	176	194,52	110	176	320,22	110	176
Me	31,74	27,50	44,00	21,61	12,22	19,56	24,63	8,46	13,54
Dp	6,13	3,32	1,83	7,57	2,05	1,67	11,49	2,40	1,39

O impacto geral nas soluções ao implementar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas no Cenário 2 pode ser visto comparando os resultados da Tabela 7 com os resultados da Tabela 6. Em particular, notamos novamente que a tendência para todas as três medidas, partindo da Tabela 6 para Tabela 7, é de ter o maior valor encontrado mais próximo da média em cada coluna, o que mostra uma tendência de equilíbrio entre as rotas para as três medidas analisadas. Note que se o veículo for ônibus, o Teste 16 apresenta equilíbrio significativo em relação ao Teste 4, se o veículo for micro-ônibus, o Teste 17 apresenta maior equilíbrio que o Teste 5,

adicionalmente para van, o Teste 18 é mais equilibrado que o Teste 6. É importante observar que o tamanho da frota nos Testes 13–18 foi determinado por meio das soluções encontradas nos Testes 4–6.

### 3.7 Análise comparativa dos resultados entre os cenários

A amplitude total (a diferença entre o maior e menor valor), ou simplesmente a amplitude dos valores resultantes em relação ao custo, quantidade de vértices visitados e quantidade de passageiros entre rotas pode ser usada para verificar o quanto as rotas são equilibradas nas soluções, ou seja, quanto menor a amplitude maior o equilíbrio. A Figura 4 apresenta três gráficos/diagramas do tipo radar (*radar chart* ou *spider web chart*), um para cada tipo de frota de veículos considerando os dois cenários de testes. Cada gráfico consiste de uma sequência de raios equiangulares, com cada raio representando uma das variáveis (amplitude do custo, da quantidade de vértices visitados e da quantidade de passageiros entre rotas). O comprimento de cada raio é proporcional à magnitude da variável considerando cada ponto dos dados em relação à máxima magnitude da variável em todos os pontos. Então, uma linha conecta os valores de cada raio, dando a sua aparência que indica orientação do gráfico para o seu interior como sendo as melhores opções. Ou seja, aquele teste que tem suas variáveis com orientação para o centro do gráfico, tem menor valor proporcional de amplitude, fornecendo assim rotas mais equilibradas em relação a variável analisada. Note ainda que é possível observar *trade-offs* na escolha dos melhores testes.

Quando a frota de veículos é formada por ônibus, o gráfico confirma a análise realizada sobre os resultados tabelados, uma vez que os Testes 7 e 16 são os melhores, no entanto entre os dois cenários é possível observar uma pequena vantagem proporcional no Teste 16. Para micro-ônibus, o gráfico novamente confirma a análise anterior tendo as soluções dos Testes 11 e 17 como as melhores em termos de equilíbrio, com um pequeno conflito que favorece proporcionalmente os resultados do Teste 17. A análise anterior é confirmada apenas em relação ao Teste 18 no caso em que os veículos são vans. Note que nesse caso os Testes 3 e 6 são os mais próximos do Teste 18, no entanto o Teste 18 poderia ser escolhido com alguma vantagem proporcional.

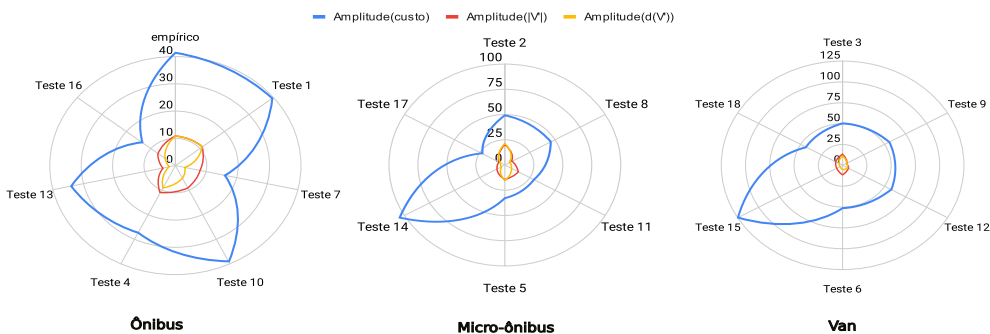


Figura 4: Diagrama de radar da amplitude de três medidas de equilíbrio entre rotas.

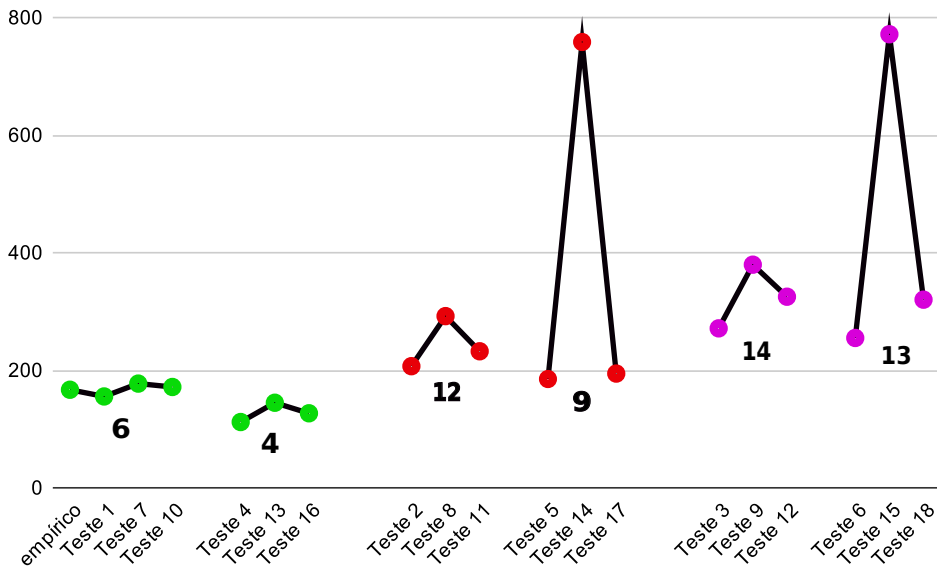


Figura 5: Valores obtidos para a função objetivo ao longo dos cenários de testes.

É importante observar que em geral a tendência para o custo total seja de crescimento quando as rotas de um problema de roteamento apresenta equilíbrio no tamanho do percurso entre as rotas, uma vez que uma rota proporcionalmente grande em relação as demais acaba absorvendo parte do custo total. Portanto, os resultados obtidos para o valor da função objetivo do modelo matemático (custo total) também precisa ser analisado para a metodologia proposta. A Figura 5 ilustra um gráfico de linhas mostrando a tendência do custo total ao longo dos testes. O valor sob cada parte de segmentos de linha indica o tamanho da frota no cenário de testes, reforçando a diminuição da frota do Cenário 1 para o Cenário 2. Note que existe uma influência negativa nessa análise devido a alguns valores altos para o GAP de otimalidade (Testes 14 e 15), uma vez que GAP alto implica em custo total alto. No entanto, podemos observar no gráfico que, entre os testes considerando cada cenário e tipo de frota de veículos, o crescimento que ocorre a partir do teste sem considerar o equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas (empírico, Testes 1–3 e Testes 4–6) para o melhor teste em termos de custo total considerando o equilíbrio proposto, não é significativo. Portanto, esse gráfico também confirma que o impacto ao considerar o equilíbrio proposto nesse artigo é relativamente positivo no planejamento de rotas para a empresa de fretamento, uma vez que ter percursos equilibrados é positivo no gerenciamento das rotas.

Com o objetivo de verificar se duas amostras independentes e não pareadas pertencem à mesma população foi utilizado o teste de hipótese não paramétrico de *Mann-Whitney*, conforme as recomendações da *American Psychological Association* (APA [2]). Este teste compara a diferença estatística entre as medianas das amostras. As amostras testadas são compostas das

três seguintes medidas de equilíbrio: amplitude do custo, amplitude da quantidade de vértices visitados e amplitude da quantidade de passageiros entre rotas. Note que o teste de Mann-Whitney permite comparar amostras com tamanhos diferentes, portanto as amostras foram divididas em dois grupos, os experimentos computacionais sem considerar rotas equilibradas (Testes 1-6) e considerando rotas equilibradas (Testes 7-18).

A análise estatística apresentada neste artigo foi desenhada de modo a verificar se a proposta de incluir restrições de equilíbrio na quantidade de passageiros entre rotas também ocasiona algum equilíbrio no tamanho e na quantidade de visitas entre as rotas. Para cada teste de hipótese de Mann-Whitney foi adotado um nível de significância de 5% ( $p < 0,05$ ). Com base nos valores amostrais da amplitude da quantidade de passageiros entre rotas o teste de hipótese aplicado forneceu  $p = 0,00278$ , comprovando que a inclusão das restrições levam a rotas estatisticamente equilibradas. Além disso, quando testado o impacto da inclusão das restrições de equilíbrio, o mesmo efeito foi encontrado ao analisar a amplitude da quantidade de vértices visitados entre rotas, uma vez que o teste de hipótese aplicado forneceu  $p = 0,00247$ . O mesmo não se repetiu para o caso da amplitude do custo, para o qual o teste de hipótese forneceu  $p = 0,96360$ .

### 3.8 Simulação considerando equilíbrio entre rotas com frota heterogênea

O modelo para o PRVF proposto nesse artigo tem a vantagem de ter um conjunto de restrições em quantidade polinomial, porém tem a desvantagem de não permitir modelar certos aspectos de problemas de roteamento, como por exemplo, a dificuldade em modelar o problema considerando frota heterogênea. No entanto, dois testes simples foram realizados nesse sentido, uma vez que a escolha para obter rotas equilibradas descrita na Seção 3.2 permite definir uma amplitude entre  $Q$  e  $q$  que engloba, embora artificialmente, as capacidades dos três tipos de veículos estudados nesse artigo. Entre algumas possibilidades, para os dois seguintes casos de parâmetros  $(m, \tilde{r}) = (9, 4)$  e  $(m, \tilde{r}) = (8, 7)$ , considerando 176 como a demanda total de passageiros, obtemos ao calcular  $Q := Q(m) = \lceil a \rceil + \tilde{r}$  e  $q := q(m) = \lfloor a \rfloor - \tilde{r}$  os seguintes intervalos  $[q, Q] = [15, 24]$  para  $(m, \tilde{r}) = (9, 4)$  e  $[q, Q] = [15, 29]$  para  $(m, \tilde{r}) = (8, 7)$ . Portanto, ao resolver um PRVF considerando tais valores para  $Q$  e  $q$  em cada um desses dois casos, o resultado final em termos da quantidade de passageiros em cada rota também indica a possibilidade de um tipo de veículo que poderia ser usado em cada rota, uma vez que observando a capacidade tanto um ônibus, um micro-ônibus ou uma van poderia ser usada em cada uma dessas rotas.

Os seguintes resultados foram obtidos no teste considerando  $(m, \tilde{r}, q, Q) = (9, 4, 15, 24)$ : uso de um ônibus, seis micro-ônibus e duas vans, custo total igual a 201,81 quilômetros e GAP igual a 27,20%. Adicionalmente, no teste considerando  $(m, \tilde{r}, q, Q) = (8, 7, 15, 29)$  obtivemos: uso de quatro ônibus e quatro micro-ônibus, custo total igual a 181,17 quilômetros e GAP igual a 29,16%. No primeiro teste, a quantidade obtida de passageiros por veículo foi  $\{24\}$  para o ônibus,  $\{16, 18, 21, 21, 23, 23\}$  (amplitude igual a 7) para os seis micro-ônibus e  $\{15, 15\}$  para as duas vans. No segundo teste, a quantidade obtida de passageiros por veículo foi  $\{24, 25, 25, 27\}$  (amplitude igual a 3) para os quatro ônibus e  $\{16, 16, 20, 23\}$  (amplitude igual a 7) para os quatro micro-ônibus. Note que apesar da maior diferença permitida na quantidade de passageiros entre



rotas ser de 9 e 14 passageiros no primeiro e segundo teste, respectivamente, as amplitudes relevantes apresentadas na quantidade de passageiros por tipo de veículo foram 7 passageiros no primeiro teste, e 3 e 7 passageiros no segundo teste. Esses dois testes mostram que, dependendo do tipo de simulação e do estudo de caso, o PRVF poderia ser entendido dentro de certas limitações como um modelo de frota heterogênea, possibilitando assim encontrar soluções alternativas no planejamento de rotas de veículos.

#### 4 CONCLUSÕES

Este artigo explora uma formulação de fluxo de produtos em arcos para propor um modelo de otimização para o problema de roteamento de veículos fretados, que busca equilibrar a quantidade de passageiros entre os veículos, permitindo desenhar uma sequência não sobrecarregada de coleta de passageiros por veículo, além de reduzir a distância total percorrida. A inclusão de novas equações e a adaptação das equações de fluxo para controlar a diferença entre o número de passageiros por rota é uma contribuição deste trabalho para a literatura da área. O modelo proposto foi aplicado para tratar um problema prático do transporte de passageiros por veículos fretados na cidade de Itumbiara-GO.

Um conjunto de testes foi realizado para investigar o impacto da proposta de equilíbrio entre rotas na solução do modelo. Os experimentos computacionais foram divididos em dois cenários, construídos a partir de dados reais, com distintas configurações de parâmetros. Os exemplares foram resolvidos com o auxílio do solver CPLEX, por um tempo limitado em 3600 segundos. Os resultados numéricos mostraram que é viável usar modelos matemáticos mais enxutos (o tamanho do conjunto de restrições é polinomial) para planejar rotas de veículos por meio de um processo de simulação dos parâmetros. Além disso, foi possível verificar uma redução significativa na distância total percorrida pela frota de veículos, quando comparada com as rotas obtidas de forma empírica pela empresa.

O modelo proposto também foi testado como ferramenta de apoio ao planejamento e dimensionamento da frota, incluindo a escolha dos pontos de parada. Como resultado, foram fornecidas algumas soluções para os cenários testados, permitindo que o tomador de decisão planeje o transporte dos funcionários a partir outras perspectivas. Algumas alternativas permitem avaliar o oferecimento do serviço de transporte utilizando não apenas ônibus, mas também micro-ônibus e vans. Outro aspecto é a possibilidade de manter as rotas com tamanho equilibrado de tal forma que os horários de entrada de funcionários nos seus diversos turnos de serviço não sejam afetados.

Uma perspectiva que pode ser explorada a partir deste estudo é expandir o modelo para o transporte coletivo urbano, considerando o embarque e desembarque simultâneo de passageiros nos pontos de visitas. Nesse caso, a troca de passageiros nos terminais ou linhas de conexão interfere na capacidade dos veículos de forma diferente do que foi tratada aqui, exigindo adaptações no modelo matemático. Além disso, desenvolver métodos heurísticos para confrontar as soluções obtidas com o solver em um tempo de processamento reduzido é um caminho promissor como proposta de trabalho futuro.

## Agradecimentos

Este trabalho teve suporte financeiro parcial do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (processo 309925/2021-5) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (BIOS - Brazilian Institute of Data Science, processo 2020/09838-0).

**ABSTRACT.** Many companies have chosen private commute options over public transportation for employee displacement. The benefits obtained with these options aim at the comfort of the employees and management of the entry and exit time in the different work shifts, helping in the daily production of the companies. Thus, planning suitable routes for the vehicles is also essential. This article studies the vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation to propose new mathematical modeling that explicitly controls the number of passengers between vehicles, targeting the design of routes with approximately the same number of passengers. To validate the practical feasibility of the proposed model, we solved a case study regarding the private commute transport of workers from the food industry in the city of Itumbiara-Brazil. This paper reports a series of computational experiments with parameter variation to evaluate the practical impact of planning balanced routes regarding the number of passengers, the number of visits, and the total distance traveled. Descriptive statistics and hypothesis tests validated the solutions of the proposed mathematical model for a significant part of the computational experiments.

**Keywords:** Private commute transport, vehicle routing problem, vehicle flow formulation.

## REFERÊNCIAS

- [1] ANP. “Os serviços de transporte de passageiros por fretamento. Série Cadernos Técnicos”. ANP- Associação Nacional de Transportes Públicos (2012). URL [http://files-server.antp.org.br/\\\_5dotSystem/download/dcmDocument/2013/03/11/2C71B08A-6A12-4356-AA3F-F5A0F0DFB717.pdf](http://files-server.antp.org.br/\_5dotSystem/download/dcmDocument/2013/03/11/2C71B08A-6A12-4356-AA3F-F5A0F0DFB717.pdf). Acesso em Junho, 2022.
- [2] A.P. Association. “Publication manual of the american psychological association, (2020)”. American Psychological Association (2019).
- [3] R. Baldacci, E. Hadjiconstantinou & A. Mingozzi. An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation. *Operations research*, **52**(5) (2004), 723–738.
- [4] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski & V.B. Shah. Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM review*, **59**(1) (2017), 65–98.
- [5] G. Clarke & J.W. Wright. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations research*, **12**(4) (1964), 568–581.
- [6] G.B. Dantzig & J.H. Ramser. The truck dispatching problem. *Management science*, **6**(1) (1959), 80–91.

- [7] I. Dunning, J. Huchette & M. Lubin. JuMP: A modeling language for mathematical optimization. *SIAM review*, **59**(2) (2017), 295–320.
- [8] G. Finke. A two-commodity network flow approach to the traveling salesman problem. *Congresses Numeration*, **41** (1984), 167–178.
- [9] W. Garvin, H. Crandall, J. John & R. Spellman. Applications of vehicle routing in the oil industry. *Management Science*, **3**(1) (1957), 407–430.
- [10] B. Gavish & S. Graves. Scheduling and routing in transportation and distribution systems: formulations and new relaxations. *University of Rochester, Rochester, NY*, **1** (1981).
- [11] B. Gavish & S.C. Graves. The travelling salesman problem and related problems. *Massachusetts Institute of Technology, Operations Research Center*, **1** (1978).
- [12] M.H. Hà, N. Bostel, A. Langevin & L.M. Rousseau. An exact algorithm and a metaheuristic for the multi-vehicle covering tour problem with a constraint on the number of vertices. *European Journal of Operational Research*, **226**(2) (2013), 211–220.
- [13] M.H. Hà, N. Bostel, A. Langevin & L.M. Rousseau. An exact algorithm and a metaheuristic for the generalized vehicle routing problem with flexible fleet size. *Computers & Operations Research*, **43** (2014), 9–19.
- [14] IBGE. “Sinopse do censo demográfico: 2010/IBGE.”. IBGE (2011). URL <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em Novembro, 2018.
- [15] IBGE. “Estimativas da população residente para os Municípios brasileiros e para as Unidades da Federação: 1o de julho de 2021.”. IBGE (2021). URL <https://biblioteca.ibge.gov.br/>. Acessado em: 13/06/2022.
- [16] A. Langevin, M. Desrochers, J. Desrosiers, S. Gélinas & F. Soumis. A two-commodity flow formulation for the traveling salesman and the makespan problems with time windows. *Networks*, **23**(7) (1993), 631–640.
- [17] G. Laporte. Fifty years of vehicle routing. *Transportation Science*, **43**(4) (2009), 408–416.
- [18] G. Laporte, Y. Nobert & M. Desrochers. Optimal routing under capacity and distance restrictions. *Operations research*, **33**(5) (1985), 1050–1073.
- [19] MPMGO. Projeto soluções cidadãos reúne mais de 250 pessoas na câmara de Itumbiara (2017). URL <http://www.mpmgo.mp.br/portal/noticia/projeto-solucoes-cidadas-reune-mais-de-250-pessoas-na-camara-de-itumbiara>. Acessado em: 08/06/2022.
- [20] R.C. Oliveira, W. Oliveira & A.C. Moretti. O problema de rotas de cobertura multiveículo com uma restrição de equilíbrio no número de vértices entre rotas. *XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, (2015), 2892–2903.
- [21] W.A. Oliveira, A.C. Moretti & E.F. Reis. Multi-vehicle covering tour problem: building routes for urban patrolling. *Pesquisa Operacional*, **35**(3) (2015), 617–644.

- [22] C.T. Ota. “Métodos de resolução e modelagem para o problema de rotas de cobertura multiveículo”. Master’s thesis, Faculdade de Ciências Aplicadas da Universidade Estadual de Campinas, Limeira (2018).
- [23] P. Toth & D. Vigo. “Vehicle routing: problems, methods, and applications”. Society for Industrial and Applied Mathematics (2014).

