

Movimento do Pólo Terrestre: Aspectos Físicos, Modelagem Matemática e Análises¹

D.B.M. ALVES², E.M. de SOUZA³, J.F.G. MONICO⁴, FCT, UNESP, 19060-900
Presidente Prudente, SP, Brasil.

Resumo. O pólo terrestre está em constante movimento. Tal movimento ocorre pois o eixo de rotação da Terra varia com respeito à figura da Terra. Neste trabalho, primeiramente são discutidos os aspectos físicos do movimento do pólo. Posteriormente, as componentes desse movimento são calculadas geometricamente, utilizando um rigoroso desenvolvimento matemático. Além disso, também é descrita a matriz de rotação apropriada para calcular a transformação entre os dois sistemas (o sistema convencional fixo a Terra e o instantâneo que representa o movimento do pólo). Finalmente, as coordenadas do pólo terrestre no período de janeiro de 2006 a abril de 2008 (parte medida e parte predita) são plotadas e analisadas.

1. Introdução

O eixo de rotação da Terra varia com respeito à figura da Terra, principalmente pelas suas propriedades elásticas e interação com a atmosfera, ocasionando o chamado movimento do pólo. Esse efeito influencia as coordenadas de todos os pontos terrestres. Logo, o principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo rigoroso de tal efeito, contemplando aspectos físicos e sua formulação matemática.

2. Movimento do Pólo

O movimento do pólo é a rotação do pólo celeste verdadeiro (eixo de rotação instantâneo) em relação ao pólo de um sistema de referência convencional fixo a Terra, denominado *Conventional International Origin* (CIO), do *Conventional Terrestrial Reference System* [2], [3] e [4]. A Figura 1 ilustra o sistema de coordenadas do movimento polar. Como se trata de ângulos pequenos, elas podem ser vistas como coordenadas cartesianas próximas ao pólo de referência.

Os parâmetros de orientação da Terra não podem ser descritos por teoria, sendo, portanto, determinados a partir de observações. Por um longo período, observações astronômicas foram utilizadas para esse fim, dentro do contexto de um serviço

¹Trabalho financiado pela FAPESP - Processos 03/12771-0 e 03/12770-3,

²danibarroca@yahoo.com.br, Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas,

³eniuce@yahoo.com.br, Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas,

⁴galera@fct.unesp.br, Departamento de Cartografia.

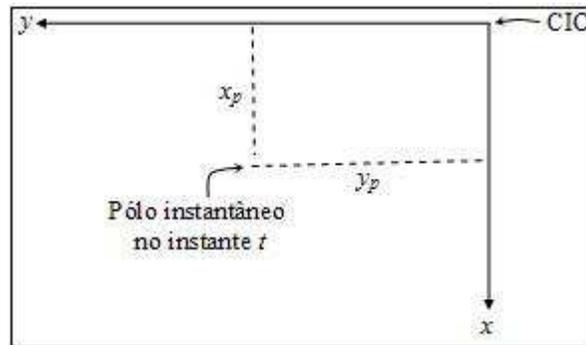


Figura 1: Coordenadas do movimento polar

internacional; inicialmente sob o auspício do ILS (*International Latitude Service*) e depois pelo IPMS (*International Polar Motion Service*), juntamente com o BIH (*Bureau International de l'Heure*). Em 1 de janeiro de 1988 essas duas agências foram incorporadas no IERS (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*) que passou a realizar essas funções. Atualmente, as tecnologias utilizadas nessa atividade são o VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), SLR (*Satellite Laser Range*), GPS (*Global Positioning System*), LLR (*Lunar Laser Range*) etc [3].

O movimento polar afeta as coordenadas de todos os pontos terrestres. Esse movimento é causado por variações na distribuição de massa da Terra e de sua atmosfera, as quais podem ocorrer devido a fenômenos meteorológicos, geológicos e geofísicos, tais como [4]

- Movimento da atmosfera e dos oceanos;
- Mudanças na distribuição de massa da superfície (erosão);
- Mudanças na crosta e nos fluidos (erupções vulcânicas, terremotos);
- Movimento entre a crosta terrestre e seu interior.

2.1. Breve histórico

O fenômeno do movimento polar surge do fato de que o eixo de rotação da Terra não coincide com o eixo de máximo momento de inércia (eixo de simetria). Euler investigou esse fenômeno em 1765 e chamou-o de nutação livre.

O movimento polar foi conhecido como um conceito teórico por mais de 100 anos, antes que pudesse ser comprovado através de medidas. Em 1884, Kuestner em Berlin detectou uma variação do eixo de rotação da Terra com uma amplitude de $\cong 0,2''$. Isto conduziu a uma campanha observacional em 1891, onde uma série de observações astronômicas feitas simultaneamente em Berlin e Hawai ($\Delta\lambda \cong 180^\circ$, sendo λ a longitude) foram analisadas. Os resultados mostraram uma amplitude de $0,5''$ em 14 meses [4].

Nesse mesmo ano, Chandler analisou algumas observações antigas e chegou a conclusão de que o movimento polar é resultante de duas componentes: uma com período anual e outra com período de 428 dias, posteriormente chamado de período de Chandler. Embora houvessem dúvidas no começo, estes resultados foram logo

confirmados pelo experimento Berlin-Hawai. E, em 1892, Newcomb mostrou que a elasticidade da Terra é responsável pelo alongamento do período do movimento polar de 304 dias (valor teórico para a Terra rígida) para 435 dias (valor observado para a Terra real) [4]. A amplitude do período de Chandler é de 0,2 arcsec. Já o movimento anual, que ocorre devido à redistribuição de massas pelos processos geofísicos e meteorológicos, tem amplitude de $\cong 0,05$ a 0,1 arcsec [2].

Outros componentes do movimento polar incluem a oscilação diurna (até agora não foi detectada, somente prevista), e o chamado passeio polar, que é o movimento secular do pólo. Durante 1900-2000, o eixo de giro da Terra se moveu $\cong 0,004$ arcsec por ano na direção do meridiano de 80°O [2]. A Figura 2 mostra o movimento polar de Chandler de 1890 a 2000.

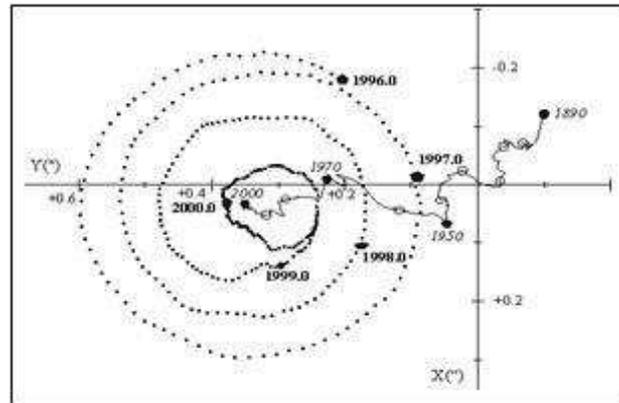


Figura 2: Movimento polar de Chandler

2.2. Descrição matemática e física

O momento angular H pode ser expresso pelo produto do tensor de inércia C e do vetor de velocidade angular ω , ou seja ([1] e [6])

$$H = C\omega, \quad (2.1)$$

onde $C = \begin{bmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZY} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{bmatrix}$.

Os termos da diagonal da matriz C são chamados de momentos de inércia, enquanto os termos fora da diagonal são chamados de produtos de inércia.

Assim, considerando o tensor de inércia C referido ao eixo principal, tem-se

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

Sabendo que a equação geral para a conservação do momento angular é dada por $\frac{\partial H}{\partial t} + \omega \times H = L$, sendo que L representa os torques externos a Terra e, utilizando a equação (2.1), pode-se escrever $\frac{\partial H}{\partial t} + \omega \times H = L \Rightarrow C \dot{\omega} + \omega \times H = L$.

$$\text{Como } C\dot{\omega} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\dot{\omega}_1 \\ B\dot{\omega}_2 \\ C\dot{\omega}_3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\omega \times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A\omega_1 & B\omega_2 & C\omega_3 \end{vmatrix} = (C - B)\omega_2\omega_3i + (A - C)\omega_1\omega_3j + (B - A)\omega_1\omega_2k,$$

tem-se

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = L_1 \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 = L_2 \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = L_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde ω_1 , ω_2 e ω_3 são as velocidades angulares dos três eixos de inércia, A , B e C são os momentos de inércia, $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$, e $\dot{\omega}_3$ são as derivadas em relação ao tempo dos componentes da velocidade angular.

Assumindo que os torques externos não influenciam o movimento do pólo, tem-se

$$L_1 = L_2 = L_3 = 0. \quad (2.3)$$

Também pode-se assumir

$$A = B, \quad (2.4)$$

isto é, que o corpo tem simetria equatorial. Logo, a equação (2.2) tem a forma

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - A)\omega_2\omega_3 = 0 \\ A\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_1\omega_3 = 0 \\ C\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} . \quad (2.5)$$

O sistema de equações (2.5) é formado por equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares de primeira ordem. Resolvendo a 3ª equação, tem-se $\omega_3 = \text{const}$.

Substituindo $\mu = \frac{C-A}{A}\omega_3$ nas duas primeiras equações de (2.5), o seguinte sistema de equações é obtido

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - A)\omega_3\omega_2 = 0 \\ A\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 + \mu\omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \mu\omega_1 = 0 \end{cases} . \quad (2.6)$$

O próximo passo é a solução do sistema de EDO dado por (2.6). Para tanto, pode-se substituir a primeira equação do sistema na segunda equação. Da primeira equação, tem-se

$$\mu\omega_2 = -\dot{\omega}_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{-\dot{\omega}_1}{\mu} \Rightarrow \dot{\omega}_2 = \frac{-\ddot{\omega}_1}{\mu}. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) na segunda equação de (2.6) tem-se

$$\frac{-\ddot{\omega}_1}{\mu} - \mu\omega_1 = 0 \Rightarrow -\ddot{\omega}_1 - \mu^2\omega_1 = 0. \quad (2.8)$$

Solucionando (2.8), tem-se

$$-r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\mu^2 \Rightarrow r = \pm \mu i.$$

Portanto, as soluções dessa EDO são $e^{\mu it}$ e $e^{-\mu it}$. A solução geral é dada por

$$\omega_1 = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t. \quad (2.9)$$

Como c_1 e c_2 são constantes, para outras duas constantes a_1 e a_2 pode-se assumir $c_1 = a_1 \cos a_2$ e $c_2 = -a_1 \sin a_2$, assim

$$\omega_1 = a_1(\cos \mu t \cos a_2 - \sin \mu t \sin a_2) \Rightarrow \omega_1 = a_1 \cos(\mu t + a_2). \quad (2.10)$$

Para determinar ω_2 , basta substituir o valor ω_1 de (2.10) em (2.7). Assim

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{-\dot{\omega}_1}{\mu} = \frac{-1}{\mu} a_1 (\cos(\mu t + a_2))' = \frac{-1}{\mu} a_1 (\cos \mu t \cos a_2 - \sin \mu t \sin a_2)' \\ &= \frac{-1}{\mu} a_1 (-\mu \sin \mu t \cos a_2 - \mu \cos \mu t \sin a_2), \end{aligned}$$

portanto,

$$\omega_2 = a_1(\sin \mu t \cos a_2 + \cos \mu t \sin a_2) = a_1 \sin(\mu t + a_2). \quad (2.11)$$

Assim, de (2.10) e (2.11), a solução é dada por

$$\begin{cases} \omega_1 = a_1 \cos(\mu t + a_2) \\ \omega_2 = a_1 \sin(\mu t + a_2) \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde as constantes μ , a_1 e a_2 podem ser interpretadas como freqüência angular μ , amplitude a_1 e fase a_2 .

As equações acima descrevem o movimento circular do eixo de rotação da Terra. Esse movimento pode ser determinado através da observação de latitudes astronômicas (Figura 3). Como as observações da latitude referem-se ao eixo instantâneo de rotação, qualquer desvio entre esse eixo e o eixo de simetria será detectado nas latitudes astronômicas, porque elas são fixadas a observatórios, e que por sua vez são fixados à crosta. Observando a latitude astronômica continuamente, o movimento polar pode ser detectado [4].

Nas equações anteriores, foi discutida a parte física do movimento do pólo. Basta agora calcular, geometricamente, as componentes desse movimento, como também verificar qual é a matriz de rotação apropriada.

A transformação das coordenadas astronômicas e azimute do pólo celeste verdadeiro (instantâneo) para o pólo de um sistema de referência terrestre fixo à crosta terrestre (o CIO), é construída observando as Figuras 4 e 5 [2]. Seja Φ_t , Λ_t e A_t a latitude astronômica, longitude e azimute observados (instantâneos) na época t ; e seja Φ , Λ e A os ângulos correspondentes com respeito ao pólo terrestre convencional (CIO), de forma que $\Delta\Phi = \Phi - \Phi_t$, $\Delta\Lambda = \Lambda - \Lambda_t$, $\Delta A = A - A_t$, representem as correções aos ângulos observados. Essas correções são ângulos pequenos, como ilustrado nas Figuras 4 e 5 [2].

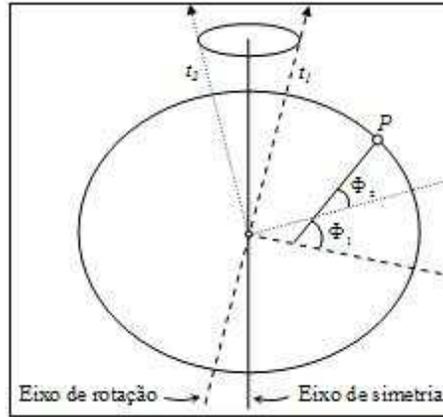


Figura 3: Variação da latitude devido ao movimento do pólo

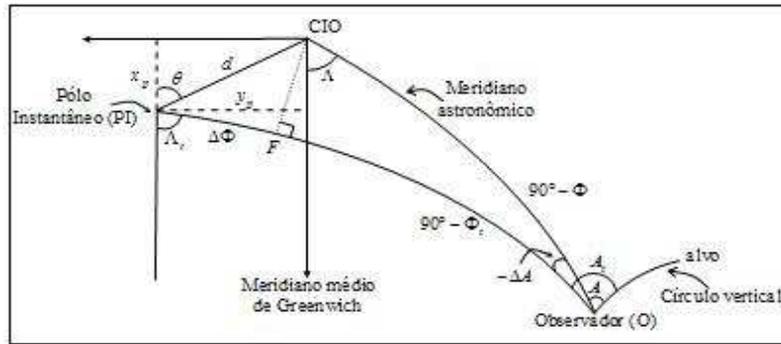


Figura 4: Relação entre coordenadas astronômicas observadas na época t e as coordenadas do sistema de referência terrestre

As coordenadas polares, d e θ , foram colocadas na Figura 04 de forma que

$$x_p = d \cos \theta, y_p = d \sin \theta. \quad (2.13)$$

Para a latitude, utilizando o triângulo F-CIO-PI da Figura 15, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= d \cos((180^\circ - \Lambda_t) - \theta) = d(\cos(180^\circ - \Lambda_t) \cos \theta + \sin(180^\circ - \Lambda_t) \sin \theta) \\ &= d((\cos 180^\circ \cos \Lambda_t + \sin 180^\circ \sin \Lambda_t) \cos \theta + (\sin 180^\circ \cos \Lambda_t - \cos 180^\circ \sin \Lambda_t) \sin \theta) \end{aligned}$$

como $\cos 180^\circ = -1$ e $\sin 180^\circ = 0$, tem-se $\Delta\Phi = -d \cos \Lambda_t \cos \theta + d \sin \Lambda_t \sin \theta$.

Utilizando (2.13), tem-se

$$\Delta\Phi = -x_p \cos \Lambda_t + y_p \sin \Lambda_t. \quad (2.14)$$

Para o azimute, usando a lei dos senos no triângulo esférico CIO-O-PI da Figura 4, tem-se

$$\frac{\sin(-\Delta A)}{\sin d} = \frac{\sin(180^\circ - \Lambda_t - \theta)}{\sin(90^\circ - \Phi)}. \quad (2.15)$$

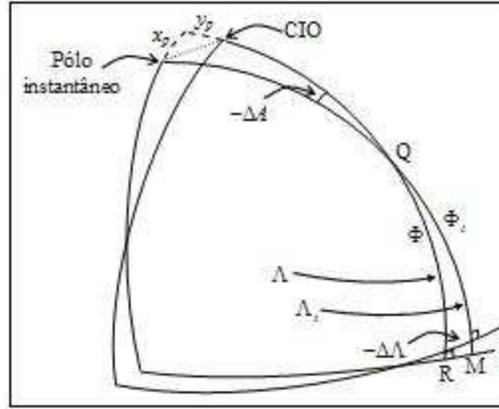


Figura 5: Relação entre a longitude com respeito ao pólo instantâneo e a longitude com respeito ao CIO

Como o seno de um ângulo pequeno é o próprio ângulo, de (2.15) tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta A &= -d \frac{\sin(180^\circ - \Lambda_t - \theta)}{\sin(90^\circ - \Phi)} = d \frac{(\sin(180^\circ - \Lambda_t) \cos \theta - \cos(180^\circ - \Lambda_t) \sin \theta)}{\sin 90^\circ \cos \Phi - \cos 90^\circ \sin \Phi} \\ &= \frac{-d}{\cos \Phi} (\sin \Lambda_t \cos \theta + \cos \Lambda_t \sin \theta), \end{aligned}$$

e utilizando (2.13), tem-se

$$\Delta A = -(x_p \sin \Lambda_t + y_p \cos \Lambda_t) \sec \Phi. \quad (2.16)$$

Finalmente, para a longitude, basta aplicar a lei dos senos no triângulo QRM da Figura 5 [2]:

$$\frac{\sin(-\Delta A)}{\sin(-\Delta \Lambda)} \cong \frac{\sin 90^\circ}{\sin \Phi_t}. \quad (2.17)$$

Utilizando o fato de que o seno de ângulos pequenos é o próprio ângulo, a equação (2.17) pode ser escrita como $\sin(-\Delta A) \sin \Phi_t \cong \sin(-\Delta \Lambda) \Rightarrow \Delta \Lambda \cong \Delta A \sin \Phi_t$ e utilizando (2.16), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta \Lambda &\cong -\sin \Phi_t \left((x_p \sin \Lambda_t + y_p \cos \Lambda_t) \frac{1}{\cos \Phi} \right) \\ \Delta \Lambda &= -(x_p \sin \Lambda_t + y_p \cos \Lambda_t) \tan \Phi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Com as fórmulas (2.14), (2.16) e (2.18) é possível determinar $\Delta \Phi$, $\Delta \Lambda$ e ΔA . No entanto, também é possível utilizar a matriz de rotação para calcular a transformação entre os dois sistemas. Para realizar essa transformação, o interessado precisa ter a sua disposição os valores de x_p , y_p e do *Greenwich Apparent Sideral Time* (GAST, ou simplesmente GST).

As expressões para obtenção do valor do GAST estão descritas em [3] e em [5]. Já as coordenadas do pólo são fornecidas pelo IERS, no boletim A, para usuários que necessitem dos parâmetros de orientação da Terra em um passado recente ou no futuro. O boletim B proporciona os valores finais. Ambos boletins estão disponíveis no site do IERS.

A Figura 6 mostra a situação geométrica para a transformação. A orientação do sistema convencional fixo a Terra é representado por $(X, Y, Z)_{CT}$. O eixo Z_{CT} é direcionado ao pólo terrestre convencional e o eixo X_{CT} ao meridiano médio de Greenwich.

A posição do pólo instantâneo em relação ao pólo convencional é geralmente descrita pelas coordenadas do pólo x_p e y_p . A orientação do eixo X_{CT} depende diretamente da rotação da Terra e é determinada através do GAST [5]. A matriz que transforma o sistema instantâneo para o sistema terrestre convencional é

$$S = R_2(-x_p)R_1(-y_p)R_3(GAST), \quad (2.19)$$

onde

$$R_3(GAST) = \begin{bmatrix} \cos(GAST) & \sin(GAST) & 0 \\ -\sin(GAST) & \cos(GAST) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

e, devido aos ângulos pequenos,

$$R_2(-x_p)R_1(-y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

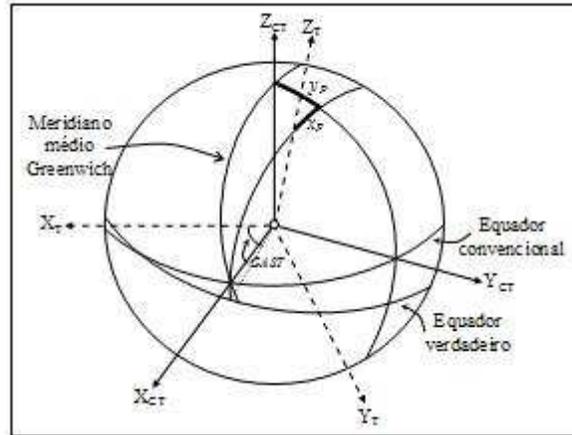


Figura 6: Sistema terrestre convencional e instantâneo devido ao movimento do pólo

3. Análises

Conforme apresentado, as coordenadas do pólo terrestre x_p e y_p são calculadas pelo IERS. As coordenadas do período de janeiro de 2006 a abril de 2008 foram obtidas nos boletins A e B. O boletim B foi utilizado para os dados calculados (janeiro de 2006 a março de 2007) e o boletim A para os dados preditos (abril de 2007 a abril de 2008).

Na Figura 7 (a) são apresentadas as coordenadas instantâneas do pólo terrestre em relação a um pólo fixo a Terra. As coordenadas polares, θ e d , calculadas conforme a equação (2.13), foram plotadas na Figura 07 (b).

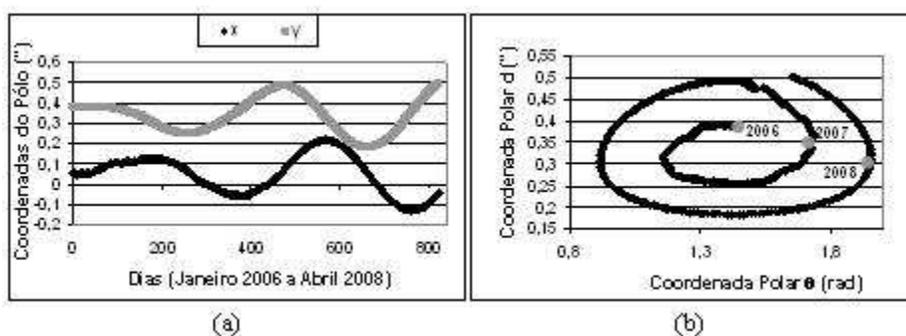


Figura 7: (a) Coordenadas x_p e y_p e (b) Coordenadas d e θ

Observando a Figura 7 (a), pode-se notar, conforme esperado, que o movimento do pólo ocorre de forma suave e cíclica.

Na Figura 7 (b) fica claro o movimento de Chandler, o qual é cíclico e está de acordo com a Figura 2.

4. Considerações Finais

Neste artigo foi discutido sobre um importante movimento terrestre, o movimento do pólo. Foi dada ênfase aos aspectos físicos e a formulação matemática de tal efeito, visando esclarecer e aprofundar os conceitos envolvidos.

Finalizando, na análise realizada com os dados fornecidos pelo IERS, pôde-se confirmar o movimento de Chandler exercido pelo pólo terrestre, evidenciando seu caráter cíclico.

Abstract. The terrestrial pole is in constant movement. This movement occurs because the Earth rotation axis varies in relation to the Earth figure. In this work, firstly the physical features of pole movement are discussed. Later, the movement components are computed geometrically, using a rigorous mathematical development. Furthermore, it is also described the appropriated rotation matrix to compute the transformation between the two systems (the system fixed to the Earth and the instantaneous one that performs the pole movement). Finally, the

terrestrial pole coordinates in the period of 2006 January and 2008 April (measured and predicted parts) are plotted and analysed.

Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, “Fundamentos de Física I: Mecânica”. 6ed. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2002.
- [2] C. Jekeli, “Geometric Reference Systems in Geodesy”, Ohio State University, 2002.
- [3] J.F.G. Monico, “Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: Descrição, Fundamentos e Aplicações”, 1ed. São Paulo: UNESP, 2000.
- [4] K.P. Schwarz, J. Krynski, “Fundamental of Geodesy”, IUGG Reports - The University of Calgary, Calgary, 1997.
- [5] G. Seeber, “Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications”, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2003.
- [6] K.R. Symon, “Mechanics”, 3ed, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.