

Funções Matemáticas Aplicadas a Determinação dos Pesos no Posicionamento DGPS¹

L.F.A. DALBELO², D.B.M. ALVES³, J.F.G. MONICO⁴, FCT, UNESP, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil.

Resumo. Dentre as métodos de posicionamento GPS (*Global Positioning System*) o DGPS (*Differential GPS*) tem grande destaque. Para que o usuário possa realizar o posicionamento aplicando correções DGPS é utilizado o MMQ (Método dos Mínimos Quadrados). Assim, algo muito importante a ser considerado neste método é o peso dado a cada observação. Logo, partindo do princípio de que os satélites que têm maior ângulo de elevação atravessam uma camada menor da atmosfera, pode-se assumir que as observações desses satélites têm melhor qualidade e, portanto, devem ter um peso maior no ajustamento. Nesse artigo, diferentes funções matemáticas foram utilizadas para determinar os pesos das observações em função do ângulo de elevação. As melhorias obtidas chegaram a até 27%.

1. Introdução

O GPS (*Global Positioning System*) é um dos sistemas de posicionamento de maior destaque dentro do Global Navigation Sattelite System (GNSS), que por sua vez engloba outros sistemas de posicionamento. A comunidade usuária de GPS desenvolveu ao longo de sua existência uma grande variedade de métodos de processamento dos sinais provindos deste sistema. Dentre essas técnicas o DGPS (*Differential GPS*) tem grande destaque.

Esse método pode ser utilizado em várias aplicações, como: navegação, levantamentos, atividades de engenharia, locação, agricultura de precisão, etc. O DGPS utiliza 2 receptores. Um dos receptores é instalado sobre um ponto de coordenadas conhecidas e o outro é utilizado para levantar os pontos de interesse (receptor ou estação móvel/usuário). Assumindo uma alta correlação dos erros (ionosfera, troposfera, etc.) em uma determinada área de abrangência, correções podem ser calculadas a partir dos dados da estação base. Sendo que estas correções são enviadas para a estação móvel por vários meios de comunicação, dentre eles: links de rádio e, atualmente, utilizando protocolos de transmissão via Internet.

A estação móvel recebe as correções e as aplica às suas observações e realiza o posicionamento. Este posicionamento é feito utilizando o MMQ (Método dos

¹Trabalho financiado pela CNPq,

²ldalbelo@gmail.com, Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas,

³danibarroca@yahoo.com.br, Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas,

⁴galera@fct.unesp.br, Departamento de Cartografia.

Mínimos Quadrados). Assim, algo muito importante a ser considerado neste método é o peso dado a cada observação. Logo, partindo do princípio de que os satélites que têm maior ângulo de elevação com relação ao horizonte atravessam uma camada menor da atmosfera (grande fonte de erros no posicionamento por GPS), pode-se assumir que as observações dos satélites mais altos têm melhor qualidade e, portanto, devem ter um peso maior no ajustamento.

Neste sentido, este artigo descreve os conceitos básicos do DGPS, dando ênfase à sua formulação matemática. Além disso, são apresentados resultados obtidos com esse tipo de posicionamento utilizando diferentes pesos nas observações.

2. DGPS

O DGPS foi desenvolvido inicialmente com o intuito de reduzir os efeitos provocados pela *Selective Availability* (SA). É uma técnica usada para melhorar a acurácia da posição do receptor móvel através da aplicação de correções providas de uma estação de monitoramento GPS, chamada estação de base (estação de coordenadas conhecidas). Essas correções podem ser enviadas ao usuário através de um link de rádio (Figura 1) [7] ou via Internet [8]. Diferentes procedimentos podem ser utilizados para a geração das correções, como [7]:

- Correções na posição: a posição da estação base derivada do GPS é comparada com sua posição considerada verdadeira. As correções da posição ΔX , ΔY , ΔZ são transmitidas e utilizadas para corrigir a posição do receptor móvel;

- Correções na pseudodistância - as pseudodistâncias (seção 2.1) observadas (arquivos de observação) de todos os satélites visíveis são comparadas com as calculadas a partir das coordenadas da estação base e dos satélites. As diferenças e suas variações são transmitidas para o receptor móvel para corrigir as pseudodistâncias observadas pelo mesmo. Este método provê os melhores resultados. No entanto, devido a decorrelação dos erros (ionosfera, troposfera e órbita), quando o receptor móvel se afasta da estação base, a acurácia decresce $\cong 1\text{m}$ para cada 100 km [5].

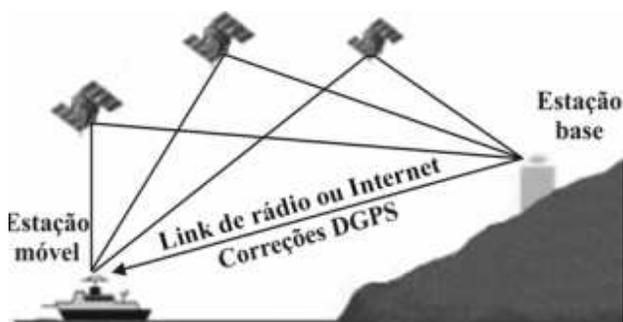


Figura 1: Conceito do DGPS

No caso das correções na pseudodistância o cálculo é feito da seguinte forma: a partir das órbitas dos satélites GPS (posição dos satélites) e as coordenadas da estação base (conhecidas), faz-se o cálculo da distância geométrica entre a estação

base e o satélite para um determinado instante. Assim, com a diferença entre as distâncias calculadas e as pseudodistâncias contidas no arquivo de observação, e considerando também o erro do relógio do receptor que é diferente para a estação base e a estação móvel, tem-se a correção que será enviada ao receptor móvel.

O DGPS é uma técnica cujo processamento geralmente é realizado em tempo real, porém o processamento dos dados após a coleta pode ser realizado sem problema. No processamento em tempo real, as variações devem ser enviadas para o receptor móvel com suas respectivas correções, pois existe uma latência, ou seja, um atraso das correções devido ao tempo de envio das mesmas [3].

2.1. Pseudodistância

Os receptores GPS são capazes de realizar vários tipos de medidas. No entanto, a mais simples de ser obtida é a pseudodistância. Essa medida é obtida a partir da correlação entre o código gerado pelo satélite no instante de transmissão do sinal (t^s) e sua replica gerada no receptor no instante de recepção (t_r). Vários fatores podem acarretar erros na determinação da pseudodistância, tais como: erros dos relógios do satélite e receptor, refração troposférica, efeitos ionosféricos, erro da órbita do satélite, etc. Assim, o modelo matemático que representa a pseudodistância entre o satélite e o receptor na época t , é dado por [2] [6]

$$PD_r^s(t) = \rho_r^s(t) - c(dt_r - dt^s) + I_r^s + T_r^s + d\rho_r^s + \varepsilon_{PD_r^s}, \quad (2.1)$$

onde

ρ_r^s : distância geométrica entre o receptor no instante de recepção do sinal e o satélite no instante de transmissão, em metros;

c : velocidade da luz no vácuo, m/s ;

dt_r : erro do relógio do receptor em relação ao tempo GPS no instante de recepção, em segundos;

dt^s : erro do relógio do satélite em relação ao tempo GPS no instante de transmissão, em segundos;

I_r^s : erro causado pela ionosfera, em metros;

T_r^s : erro causado pela refração troposférica, em metros;

$d\rho_r^s$: erro causado pela órbita do satélite, em metros;

$\varepsilon_{PD_r^s}$: erro da pseudodistância devido aos efeitos não modelados e aleatórios.

2.2. Cálculo das correções das pseudodistâncias

A partir dos termos referentes aos erros de troposfera (T_r^s), ionosfera (I_r^s), erros dos relógios do satélite (dt^s) e do receptor (dt_{r_i}), será obtida uma correção para cada pseudodistância, restando apenas os erros residuais, que é dada por

$$\Delta\rho_r^s(t_i) = PD_r^s(t_i) - \rho_r^s(t_i) - c(\overline{dt_{r_i}} - dt^{s_i}), \quad (2.2)$$

onde t_i é o tempo na época especificada e ρ_r^s é a distância geométrica entre a estação base e o satélite no instante de transmissão do sinal t^s . Assim que dados de novas épocas ficam disponíveis, o processo é repetido e as variações das correções são

calculadas para serem disponibilizadas aos usuários juntamente com as correções. Logo, obtendo-se as correções $\Delta\rho$ das épocas t_i e t_{i+1} , por exemplo, pode-se calcular a variação da correção como

$$\Delta\dot{\rho}_r^s(t_i) = \frac{\Delta\rho(t_{i+1}) - \Delta\rho(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \quad (2.3)$$

2.3. Utilizando as correções

No DGPS, o usuário que deseja utilizar as correções da pseudodistância na época t_k em relação a época t_0 deverá aplicar a seguinte correção na pseudodistância observada

$$\Delta\rho(t_k) = \Delta\rho(t_0) + \Delta\dot{\rho}(t_0)(t_k - t_0), \quad (2.4)$$

onde $\Delta\rho(t_0)$ é a correção na época t_0 e $\Delta\dot{\rho}(t_0)$ é a razão de variação da correção.

As correções (2.4) serão aplicadas nas pseudodistâncias observadas da estação móvel. Portanto, na estação móvel, as pseudodistâncias corrigidas (*PDcorr*) serão dadas por

$$PDcorr(t_k) = PD_r^s(t_k) - c(\overline{dt_{r_k}} - dt^{s_k}) - \Delta\rho(t_k). \quad (2.5)$$

Assim, utilizando as observáveis corrigidas, tal como na equação (2.5), o usuário (estação móvel) poderá determinar sua posição [5]. Para tanto, é realizado um ajustamento utilizando o MMQ.

3. Ajustamento pelo MMQ

O método de ajustamento utilizado para a determinação das coordenadas da estação móvel é o paramétrico. Visto que as equações de observação ((2.1) para cada satélite) não são lineares, utiliza-se a linearização do modelo matemático (equação (2.1)).

As coordenadas da estação e as coordenadas dos satélites estão implícitas na distância geométrica entre a estação e o satélite na equação 2.1. No ajustamento, as coordenadas da estação móvel $X = (X, Y, Z)^T$ e o erro do relógio do receptor são considerados incógnitas. Já as coordenadas dos satélites, bem como o erro do relógio dos satélites, são obtidos nas efemérides fornecidas pelo IGS, e são considerados como constantes no ajustamento. Deste modo, para que se possa obter uma solução, deve-se ter no mínimo 4 satélites observados em cada instante.

Assim, a matriz (A) design ou Jacobiana do ajustamento é dada pelas derivadas das equações de observação (2.1), considerando o método dos parâmetros do ajustamento (ver [1] para maiores detalhes), em função das coordenadas (parâmetros) do ponto que se quer determinar.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial\rho_i^1(t)}{\partial X_{i_0}} & \frac{\partial\rho_i^1(t)}{\partial Y_{i_0}} & \frac{\partial\rho_i^1(t)}{\partial Z_{i_0}} & 1 \\ \frac{\partial\rho_i^2(t)}{\partial X_{i_0}} & \frac{\partial\rho_i^2(t)}{\partial Y_{i_0}} & \frac{\partial\rho_i^2(t)}{\partial Z_{i_0}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\rho_i^n(t)}{\partial X_{i_0}} & \frac{\partial\rho_i^n(t)}{\partial Y_{i_0}} & \frac{\partial\rho_i^n(t)}{\partial Z_{i_0}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Na equação (3.1), n é o número de satélites observados em cada instante de coleta e i refere-se ao ponto cujas coordenadas estão sendo determinadas.

Neste caso os erros de ionosfera e troposfera não são estimados, pois assume-se que estes são eliminados pelas correções diferenciais. A derivada do erro do relógio do receptor deveria ser igual à velocidade da luz, mas se este valor for introduzido na matriz A , esta se tornaria mal condicionada, o que acarretaria em problemas no ajustamento. Deste modo, como pode-se verificar, na coluna 4 da matriz A foi introduzido o valor 1, o que significa que no vetor dos parâmetros ajustados o erro do relógio estará multiplicado pela velocidade da luz. Já o erro do relógio do satélite dt^s é considerado conhecido e não comparece na matriz A pois sua derivada é nula [5].

O vetor das observações (Lb) é dado pelo conjunto de medidas feitas para cada satélite pelo receptor móvel.

$$Lb = \left[PD_r^{s^1} PD_r^{s^2} \dots PD_r^{s^n} \right]. \quad (3.2)$$

Como o modelo é não linear deve-se introduzir os parâmetros aproximados: coordenadas aproximadas da estação móvel e o erro do relógio do receptor (que pode ser considerado como zero na primeira iteração). As coordenadas aproximadas da estação são obtidas por um posicionamento por ponto simples [5].

Maiores detalhes do ajustamento podem ser encontrados em [1] e [5].

Como mencionado anteriormente, os sinais emitidos pelos satélites GPS atravessam um caminho maior ou menor da atmosfera dependendo de sua elevação com relação ao horizonte. Assim, os satélites com ângulo de elevação menor atravessam uma camada maior. Logo, estas observações têm menor qualidade. Portanto, deve-se dar maior peso as observações feitas para os satélites cujos ângulos de elevação são maiores. Na Figura 2 são representados os ângulos de elevação de 2 satélites. Note que nesse caso E_2 é maior que E_1 , portanto deve-se dar peso maior para as observações providas do satélite 2.

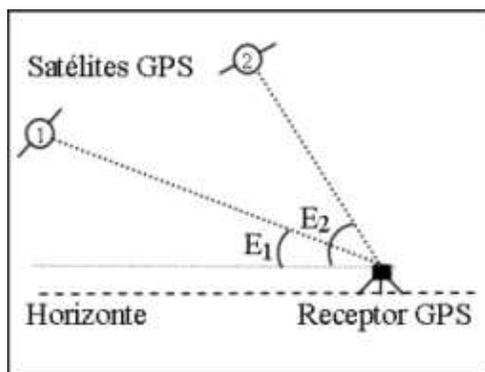


Figura 2: Ângulo de elevação dos satélites

No DGPS, em geral, considera-se observações de mesma qualidade, adotando a matriz peso P igual a identidade (I). Com o intuito de obter melhores resultados, é

proposta a utilização de uma função matemática que represente os pesos em função do ângulo de elevação dos satélites (E). Assim, a matriz peso é dada por

$$P = f(E) = \begin{bmatrix} w^1(E) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w^2(E) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w^n(E) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Neste artigo foram utilizadas 5 funções matemáticas. Na Figura 3 são apresentadas as funções e o comportamento de cada uma para o intervalo de 0° a 90° .

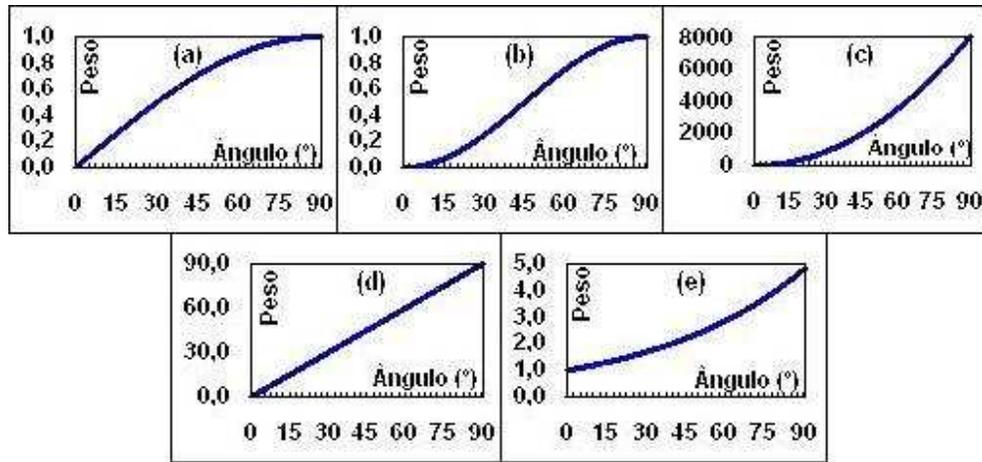


Figura 3: Funções matemáticas utilizados para representar os pesos

As funções apresentadas na Figura 3 são dadas respectivamente por: (a): $f(E) = \sin(E)$; (b): $f(E) = \cos(90^\circ - E)$; (c): $f(E) = E^2$; (d): $f(E) = E$; (e): $f(E) = e^E$.

As funções apresentadas acima foram utilizadas para determinar os pesos para cada observação de acordo com os ângulos de elevação dos satélites. Como pode-se observar na Figura 3, a magnitude dos valores do eixo y de cada gráfico são diferentes. No entanto, isto não importa, pois os pesos são relativos entre si.

Todas as funções apresentadas têm uma mesma característica em comum, à função cresce de acordo com o crescimento do ângulo de elevação do satélite. O que diferencia cada uma é quanto e a que velocidade o peso aumenta dentro do intervalo de 0° a 90° . Assim, experimentos foram realizados para verificar qual destas funções proporciona a melhor adequação para a determinação dos pesos no posicionamento DGPS.

4. Experimentos e Análises

Para avaliar o desempenho das funções citadas na seção anterior foram realizados experimentos utilizando estas funções para determinar os pesos das observações. Nos experimentos foram utilizadas 3 estações GPS na cidade de Presidente Prudente (PPTE), Rosana (ROSA) e São José do Rio Preto (RIOP) (Figura 4).

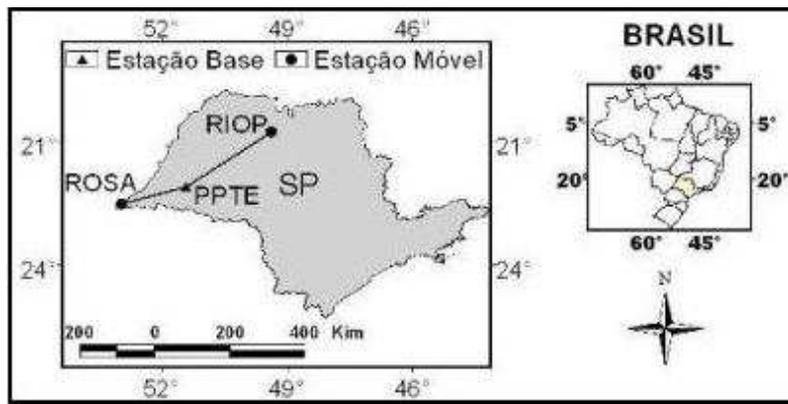


Figura 4: Linhas de base utilizadas

Foram utilizados 2 dias de dados coletados em 28 e 29 de dezembro de 2006 (dias 362 e 363 do ano). O intervalo de gravação utilizado foi de 15 s.

A estação PPTE foi utilizada como base no DGPS e as outras duas como estações móveis. Assim, as linhas de base formadas foram PPTE-ROSA e PPTE-RIOP. Para avaliar cada função utilizada foram calculadas as discrepâncias das coordenadas determinadas pelo DGPS, utilizando as mesmas, e as coordenadas verdadeiras da estação.

A Tabela 1 apresenta a média (M), o desvio padrão (DP) e o erro médio quadrático (EMQ) para as discrepâncias obtidas com os resultados do DGPS considerando a matriz peso como a identidade (I) e para o DGPS utilizando cada uma das funções aplicadas à determinação dos pesos.

Tabela 1: Resultantes médias das coordenadas para cada dia e linha de base.

	I	a	b	c	d	e
362	PPTE-ROSA (m)					
M	1,343	1,152	1,038	1,037	1,135	1,236
DP	0,726	0,604	0,550	0,553	0,598	0,666
RMS	1,527	1,300	1,175	1,176	1,282	1,404
362	PPTE-RIOP (m)					
M	1,616	1,363	1,197	1,188	1,460	1,481
DP	0,901	0,733	0,643	0,642	0,739	0,829
RMS	1,850	1,548	1,359	1,351	1,637	1,697
363	PPTE-ROSA (m)					
M	1,379	1,196	1,100	1,100	1,180	1,273
DP	0,701	0,587	0,554	0,561	0,581	0,641
RMS	1,547	1,332	1,232	1,235	1,315	1,425
363	PPTE-RIOP (m)					
M	1,776	1,486	1,290	1,275	1,460	1,618
DP	0,980	0,754	0,620	0,617	0,739	0,872
RMS	2,028	1,666	1,431	1,416	1,637	1,838

Como se pode observar na Tabela 1 os melhores resultados em RMS foram proporcionados pelas funções b e c . Assim, a seguir serão apresentados gráficos para melhor expor os resultados obtidos com essas funções para um dos dias utilizados (dia 362).

A Figura 5 (a) e (b) apresenta as discrepâncias resultantes, entre as coordenadas consideradas reais (R) e as coordenadas obtidas no ajustamento, para cada instante para o DGPS utilizando os pesos dados pelas funções matemáticas b (R-b) e c (R-c), respectivamente, e para o DGPS sem utilizar as funções (R-I), considerando o peso como I . Pode-se observar na Figura 5 que as funções b e c apresentaram melhorias. Sendo que as duas proporcionaram melhorias de magnitudes aproximadas. Na Figura 6 (a) e (b) são apresentadas as discrepâncias para a linha de base PPTE-RIOP.

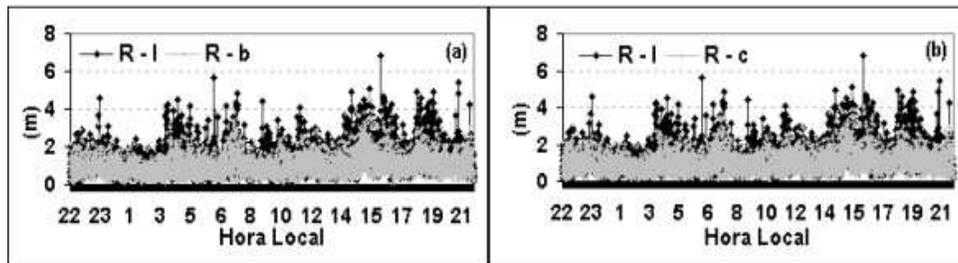


Figura 5: Discrepância resultante para a linha de base PPTE-ROSA - comparação entre as funções I com as funções b e c .

Para a linha de base PPTE-RIOP as duas funções (b e c) também apresentaram

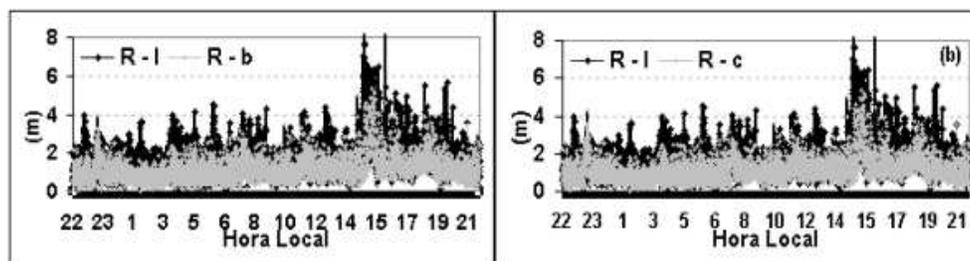


Figura 6: Discrepância resultante para a linha de base PPTE-RIOP - comparação entre as funções I com as funções b e c .

grandes melhorias, com resultados muito similares.

Para quantificar qual foi a melhoria proporcionada pelos pesos obtidos com as funções b e c foi calculada a porcentagem média das melhorias proporcionadas por cada uma destas funções, com relação ao DGPS utilizando a matriz $P = I$. A Tabela 2 apresenta as melhorias para as duas funções e a diferença entre os resultados obtidos com as funções b e c ($c - b$). Deste modo, pode-se notar na coluna ($c - b$), que os valores maiores que zero mostram que a função c proporcionou os melhores resultados. Já quanto se têm valores negativos pode-se verificar que a função b apresenta os melhores resultados.

Tabela 2: Melhorias das funções b e c com relação ao DGPS utilizando peso I e comparação entre b e c .

	b	c	c-b	b	c	c-b
	PPTE-ROSA (m)			PPTE-RIOP (m)		
362	22,703	22,778	0,057	25,925	26,490	0,514
	24,218	23,842	-0,279	28,644	28,685	0,037
	23,043	23,018	-0,019	26,560	27,004	0,405
	PPTE-ROSA (m)			PPTE-RIOP (m)		
363	20,179	20,198	0,019	27,387	28,230	0,842
	20,878	19,920	-0,958	36,737	37,086	0,349
	20,322	20,141	-0,181	29,460	30,197	0,738

Como pode-se observar na Tabela 2, na maioria dos casos os resultados obtidos com a função c foram melhores que a função b .

Além disso, a melhoria média obtida chegou até aproximadamente 23% e 27% respectivamente para as linhas de base PPTE-ROSA e PPTE-RIOP no dia 362.

5. Considerações Finais

Neste artigo foi exposta a teoria básica envolvida no posicionamento GPS utilizando a técnica DGPS.

Foi discutido também que a qualidade das observações GPS têm uma alta de-

pendência do ângulo de elevação dos satélites.

Das análises feitas utilizando as funções matemáticas a , b , c , d e e , pode-se observar que as funções b e c apresentam os melhores resultados. Sendo que melhorias de até aproximadamente 27% na acurácia das coordenadas foram obtidas com a utilização dessas funções.

Finalmente, pode-se constatar que a função c foi ligeiramente melhor que a b . No entanto, em termos práticos as duas podem ser utilizadas.

Abstract. Among the several positioning methods accomplished by GPS (*Global Positioning System*), the DGPS (*Differential GPS*) has received a great attention. To accomplish this kind of positioning, the LSM (*Least Square Method*) is used. This way, a very important thing to be considered in this method is the weight given to each observation. Considering that larger elevation angle satellites crosses a smaller layer of the atmosphere, it can be assumed that the observations of these satellites have better quality and, therefore, must have a larger weight in the adjustment. So far, different mathematical functions were used to determine the observations weights in function of the elevation angle. The improvements obtained were up to 27%.

Referências

- [1] C. Gemael, “Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas”, UFPR, Curitiba, 1994.
- [2] M.L. Gizawy, “Development of an Ionosphere Monitoring Technique Using GPS Measurements for High Latitude GPS Users”, Dissertação de Mestrado, University of Calgary, Calgary, 2003.
- [3] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, J. Collins, “GPS Theory and Practice” 4ed. Springer-Verlag, Wien, 1997.
- [4] A. Leick, “GPS - Satellite Surveying”, 2ed. John Wiley & Sons, 1995.
- [5] J.F.G. Monico, “Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: Descrição, Fundamentos e Aplicações”, 1ed. UNESP, São Paulo, 2000.
- [6] M. Olynic, “Temporal Characteristics of GPS Error Sources and Their Impact on Relative Positioning”, Dissertação de Mestrado, University of Calgary, Calgary, 2002.
- [7] G. Seeber, “Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications”, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2003.
- [8] G. Weber, H. Gebhard, R. Kalafus, Networked Transport of RTCM via Internet Protocol (Ntrip) - IP-Streaming for Real-Time GNSS Applications, em “ION GNSS 2005”, Long Beach, California, 2005.