

Gráfico de Controle de Regressão Estrutural

J.G. CARVALHO JÚNIOR¹, S.S. ALMEIDA², E.M.L.S. RAMOS³, Departamento de Estatística, PPGME, UFPA, 66075-110 Belém, PA, Brasil.

Resumo. Devido a necessidade de se alcançar níveis de precisão cada vez maiores, isto é, reduzir ao máximo os erros de medida, este trabalho considera o modelo de regressão com erro nas variáveis proposto por [3], mais especificamente o modelo aditivo estrutural e o combina a metodologia de construção de gráficos de controle de regressão de [5], desenvolvendo desta forma uma ferramenta inédita e inovadora, denominada gráfico de controle de regressão estrutural. Independente do erro padrão utilizado (erro padrão sobre a reta de regressão ajustada, erro padrão sobre a esperança condicional de Y dado X e o erro padrão sobre um valor predito da variável dependente) pode-se verificar que o gráfico de controle de regressão estrutural monitora de forma satisfatória processos com variáveis relacionadas.

1. Introdução

Há tempos os métodos estatísticos tornaram-se ferramentas relevantes aos estudos de fenômenos nas mais variadas áreas do conhecimento, como por exemplo, na saúde, na agricultura e nas engenharias. Em aplicações industriais, dentre os diversos métodos estatísticos destacam-se a análise de regressão, planejamento de experimentos e o controle estatístico da qualidade (*CEQ*). O monitoramento do processo é realizado observando-se a característica (variável) da qualidade, que é expressa na maioria das vezes em termos de uma medida, por exemplo, o diâmetro de uma peça. Antecipar-se a diversas ocorrências que por ventura venham a ocasionar alterações em um processo, induzindo-o a uma estabilidade no sistema avaliado é de fundamental importância. Para isso, faz-se necessário, prever estes acontecimentos que certamente aumentam os custos de produção. Tais previsões só poderão ser efetuadas, caso o processo analisado tenha alguma relação entre as características mensuradas. Uma vez detectado o relacionamento, deve-se então encontrar uma expressão quantitativa, que revele a relação numérica entre esses fatos. A definição do modelo matemático adequado que reflita a relação existente entre os diversos fenômenos pode propiciar a real possibilidade de interpretar a situação, além de significar a obtenção de estimativas e previsões de ocorrências futuras. O modelo

¹gracildo@ufpa.br; Professor do Departamento de Estatística da UFPA

²salmeida@ufpa.br; Professora do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da UFPA

³edson@ufpa.br; Professor do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da UFPA

de regressão linear simples é a forma mais elementar de equacionar essas relações, o qual está formalmente descrito em [9], como

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

onde X é uma variável independente, com valores fixados, Y é uma variável dependente, α e β são os parâmetros desconhecidos da regressão, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ são os erros estocásticos independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância constante σ_ε^2 . Na prática, mesmo com os contínuos avanços tecnológicos nos procedimentos de mensuração, não é realista supor que a variável X seja medida sem nenhum erro. Neste caso, têm-se os chamados modelos com erros nas variáveis (*MEV*), que alguns autores preferem utilizar somente a nomenclatura: modelo funcional (quando X é considerado fixo), modelo estrutural (quando X é considerado uma variável aleatória) e modelo ultraestrutural (uma combinação dos dois modelos, dependendo da forma de apresentação da variável X). Neste trabalho é utilizado o modelo aditivo estrutural, combinando-o a teoria de gráficos de controle, para a obtenção de uma nova proposta metodológica que indique anormalidades nos processos, denominada gráfico de controle de regressão estrutural.

2. Idéia Geral do Modelo com Erros nas Variáveis

Toda medição é passível de erro, e como tal, este é o argumento mais forte para se acreditar que eles estejam sempre presentes em qualquer processo de medição. Da teoria clássica de regressão, sabe-se que o modelo de regressão considera que as variáveis independentes X_i são medidas sem erros e, conseqüentemente, toda a sua formulação esta baseada nesta idéia, e não pode ser aplicada a modelos que contenham variáveis com erros de medida. Este tipo de problema é bastante antigo na análise de regressão linear e ainda hoje ele continua merecendo atenção como mostram os trabalhos de [1] e [3], que tratam deste tópico, denominado de *MEV*. Os *MEV* são uma generalização dos modelos de regressão padrão. Supondo um modelo de regressão, onde as variáveis U_i e y_i são quantidades não observáveis e estão relacionadas através da Equação Linear apresentada por [7], como

$$y_i = \alpha + \beta U_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

onde α e β são parâmetros desconhecidos. Porém, nem y e nem U são observados diretamente, de modo que os valores observados são Y_i e X_i , onde

$$Y_i = y_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

e

$$U_i = X_i - \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

sendo os ε_i e δ_i , $i = 1, \dots, n$, conhecidos como erros de observação, e considerados mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variâncias finitas σ_ε^2 e σ_δ^2 , respectivamente. A partir do modelo descrito por [9], os modelos apresentados por [7] podem ser reescritos como

$$Y_i = \alpha + \beta(X_i - \delta_i) + \varepsilon_i = \alpha + \beta X_i + \nu_i, \quad (2.4)$$

onde $\nu_i = \varepsilon_i - \beta\delta_i$, $i = 1, \dots, n$, e sendo os ε_i e δ_i , conhecidos como erros de observação, e considerados mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variâncias finitas σ_ε^2 e σ_δ^2 , respectivamente. Verifica-se que este não é um modelo de regressão tradicional, pois X_i é aleatório para qualquer modelo com erros, e também X está correlacionado com o erro ν_i , isto é, $Cov(X, \nu) = -\beta\sigma_\delta^2$. Caso sejam utilizadas estimativas de regressão ordinárias (mínimos quadrados) em variáveis com erros de medida, isto implicará em estimativas inconsistentes. Como comprovação desta afirmação, são necessárias algumas definições básicas da teoria assintótica, que podem ser encontradas em [4], por exemplo.

3. Modelo Estrutural

Para [3], a principal característica que o modelo estrutural (*ME*) apresenta é o fato de que os U_i são considerados variáveis aleatórias independentes entre si e também de ε_i e δ_i , para todo $i = 1, \dots, n$. Além disso, eles devem possuir uma determinada função densidade de probabilidade (distribuição), não necessariamente a distribuição normal, com média μ_u e variância σ_u^2 . Portanto, têm-se seis parâmetros no modelo os quais são: α , β , μ_u , σ_ε^2 , σ_δ^2 e σ_u^2 . Considerando válida a suposição de normalidade de U_i , ou seja, $U_i \sim N(\mu_u, \sigma_u^2)$, $i = 1, \dots, n$, tem-se que

$$\begin{pmatrix} U_i \\ \varepsilon_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left(\begin{pmatrix} \mu_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix} \right), \quad (3.1)$$

onde $i = 1, \dots, n$, e N_3 denota a distribuição normal trivariada. Nota-se que o par (X_i, Y_i) possui distribuição normal bivariada com vetor de médias e matriz de covariância dados por

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{XY} & S_{YY} \end{pmatrix} \right], \quad (3.2)$$

onde $\mu_X = \mu_u$; $\mu_Y = \alpha + \beta\mu_u$ e $S_{XX} = \sigma_u^2 + \sigma_\delta^2$; $S_{XY} = \beta\sigma_u^2$ e $S_{YY} = \beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2$. Segundo [2], tem-se aqui um modelo não identificável, visto que, o mesmo possui seis parâmetros e o conjunto de estatísticas suficientes associado à distribuição normal bivariada (X, Y) estima os cinco parâmetros $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ e $Cov(X, Y)$. “Neste caso também, os estimadores de máxima verossimilhança não podem ser obtidos, pois como o modelo é não identificável, dois vetores de parâmetros diferentes podem levar ao mesmo valor da distribuição conjunta de (X, Y) ” [3]. Nesta situação, é impossível estimar consistentemente os parâmetros destes modelos, pois o limite de um estimador consistente tem que ser único.

4. Estimadores dos Parâmetros de Regressão

Há de se destacar que a estimação dos parâmetros da regressão no *ME* só será possível se forem feitas suposições adicionais aos parâmetros. Uma delas é o conhecimento de uma das variâncias do erro, por exemplo σ_δ^2 . No caso em que σ_δ^2 é

conhecido, os estimadores de máxima verossimilhança de α e β não são consistentes e não são obtidos de forma explícita. Contudo, isso não significa que estimadores consistentes não possam ser obtidos. [3] afirmam que no *ME* a estimação de α e β é realizada, quando a variância dos erros de medição σ_δ^2 é conhecida, adotando-se os estimadores obtidos pelo método dos momentos no próprio *ME*, pois os mesmos são estimadores consistentes. Para [3], sendo o *ME* formalmente definido conforme Equações (2.1) à (2.3). Sendo os U_i considerados variáveis aleatórias independentes entre si e também de ε_i e de δ_i , para todo $i = 1, \dots, n$; como sendo os erros de medida normais independentes e identicamente distribuídos, ambos com média zero e variâncias constantes σ_ε^2 e σ_δ^2 , respectivamente. Considerando as Equações (3.1) e (3.2) e sob a suposição de que σ_δ^2 é conhecido, obtém-se um sistema de equações, a partir do método de estimação de máxima verossimilhança e supondo $S_{XX} > \sigma_\delta^2$, têm-se os estimadores

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \quad (4.1)$$

e

$$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX} - \sigma_\delta^2}, \quad (4.2)$$

onde $S_{YY} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2/n$; $S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/n$; $S_{XY} = (\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})) / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ e $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$.

5. Visão Geral de Gráficos de Controle

Em busca da obtenção de procedimentos capazes de monitorar produtos e serviços de forma precisa e menos vulneráveis as variações anormais em um determinado processo produtivo, foi fundado o Departamento de Engenharia e Inspeção dos Laboratórios da *Bell Telephone*, no ano de 1924. Nele, *Walter Andrew Shewhart* desenvolveu o primeiro gráfico de controle [6]. “Um gráfico de controle consiste em três linhas paralelas: uma linha central (LC), que reflete o nível de operação do processo e duas linhas extremas denominadas limite superior de controle (*LSC*) e limite inferior de controle (*LIC*), obtidas em função da medida de variabilidade de alguma variável do processo” [10].

“Somente quando o gráfico de controle indicar que existe um estado de controle estatístico a investigação pode começar, com alguma garantia de que dados subsequentes serão confiáveis. Caso contrário, pode-se estar utilizando dados que são inúteis por serem contaminados com os efeitos de causas especiais, as quais são provenientes do equipamento de medida” [8]. Portanto, pode-se constatar que o principal objetivo de se aplicar um gráfico de controle é sugerir áreas de investigações. Para aplicar um gráfico de controle como um teste de hipóteses, as hipóteses nula e alternativa são definidas como

$$\begin{cases} H_0 : O \text{ processo está sob controle estatístico} \\ H_1 : O \text{ processo não está sob controle estatístico.} \end{cases}$$

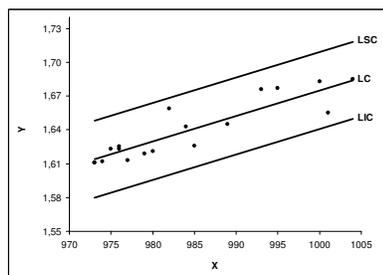


Figura 1: Desgaste de uma Ferramenta de Corte em Relação a Quantidade de Peças Produzidas.

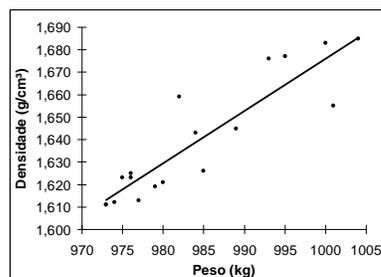


Figura 2: Diagrama de Dispersão entre Densidade Aparente e Peso do Eletrodo na Linha de Produção.

6. Idéia Geral do Gráfico de Controle de Regressão

Imagina-se a situação onde os pontos “plotados” em um gráfico apresentam-se com certa tendência ascendente ou descendente, isto pode ser atribuído a uma tendência normal do processo ou anormal de variação, tal como, é apresentado na Figura 1, que ilustra o desgaste (Y) de uma ferramenta de corte (a fabricação de produtos freqüentemente envolvem processos que variam de dimensão de acordo com o número de unidades produzidas), em relação a quantidade (X) de peças produzidas. Alguns exemplos onde fica melhor a combinação destas duas ferramentas do controle estatístico da qualidade (gráfico de controle e análise de regressão) que podem ser realizadas são: a previsão da necessidade de trabalho e a programação de recursos para este trabalho; a formulação de uma melhoria no orçamento anual e o corte de funcionários; e para o estabelecimento de padrões flexíveis de desempenho e a eficiência de unidades organizacionais.

7. Gráfico de Controle de Regressão Estrutural

A reta de regressão ajustada para o ME , ou seja, a LC do gráfico de controle de regressão estrutural é dada por

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\tilde{U}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.1)$$

onde $\tilde{U}_i = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 Y_i + \tilde{\gamma}_3 X_i$, $i = 1, \dots, n$. Assim, obtém-se o termo independente ($\tilde{\gamma}_1$) resolvendo a Equação (7.2),

$$\tilde{\gamma}_1 = (1 - \tilde{\gamma}_3)\bar{X} - \tilde{\gamma}_2\bar{Y}. \quad (7.2)$$

Para a obtenção dos vetores $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_3$ que representam, respectivamente o segundo e o terceiro coeficiente do verdadeiro valor do vetor aleatório \tilde{U}_i , procede-se de

maneira à resolver o seguinte produto matricial

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_2 \\ \tilde{\gamma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{YY} & S_{XY} \\ S_{XY} & S_{XX} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{XY} \\ S_{XX} - \sigma_\delta^2 \end{bmatrix}.$$

A estimativa do vetor de médias é dada por $(\hat{\mu}_Y, \hat{\mu}_X)^T = (\bar{Y}, \bar{X})^T$.

Para a construção dos limites do gráfico de controle de regressão, segundo [5], obtém-se o erro padrão (EP), a partir do desvio padrão estimado baseado nos desvios dos valores observados sobre a linha de regressão, utilizando-se a Equação (7.3).

$$EP(Y) = S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}}, \quad (7.3)$$

onde $(n-2)$ representa os graus de liberdade do modelo e \hat{Y}_i é dado pela Equação (7.1). Porém, como o objetivo do gráfico de controle é controlar uma variação média, que nada mais é do que uma esperança condicional de Y dado X , pode-se utilizar o erro padrão a partir da Equação (7.4).

$$EP(\hat{Y}_i) = \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2 \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n}}, \quad (7.4)$$

onde $\hat{\beta}$ é obtido a partir da Equação (4.2), $\hat{\sigma}_u^2 = S_{XX} - \hat{\sigma}_\delta^2$ e $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = S_{YY} - \hat{\beta}^2 \hat{\sigma}_u^2$. De acordo com [5] uma outra maneira de se obter linhas de controle mais exatas é utilizando-se a estimativa do (EP) definida a partir do erro padrão de um valor predito da variável dependente, conforme a Equação (7.5), dada por

$$EP(\hat{Y}_t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - (X_i - \bar{X})\hat{\beta})^2}{n-2} + \frac{\hat{\beta}^2 \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n}}. \quad (7.5)$$

8. Aplicação

Considera-se a variável densidade aparente (Y) e peso (X) do eletrodo, medidas em g/cm^3 e Kg , respectivamente, (ver [1]), como sendo relacionadas de forma linear. Os 18 dados são referentes as médias mensais da densidade aparente em g/cm^3 (Y), e do peso em Kg (X) dos blocos de carbono (eletrodos) necessários à produção de alumínio, no período de agosto de 2001 a janeiro de 2003. Como essas variáveis são provenientes de processos de medições, é razoável supor que as mesmas apresentem erros de medidas. Portanto, a associação linear entre essas duas variáveis admitindo-se que a variável independente (X) apresente erro de medida, tal qual, ocorre com a variável dependente (Y), pode ser expressa através do ME . A partir de informações obtidas junto a gerência de processos dessa indústria, fixa-se a variância do erro de medida da variável (X), em $\sigma_\delta^2 = 10Kg$.

A partir dos dados e com o auxílio de uma macro construída na planilha *EXCEL* gerou-se um diagrama de dispersão, com a intenção de verificar a força e o sentido da correlação (associação) existente entre as variáveis Y e X , ou seja, identificar se

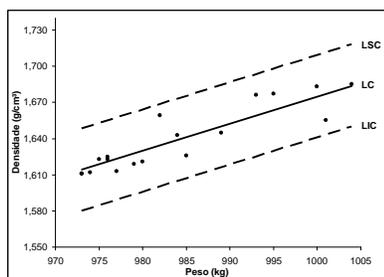


Figura 3: Gráfico de Controle de Regressão Estrutural com $\sigma_{\delta}^2 = 10Kg$ da Densidade Aparente e Peso do Eletrodo com Limites de $2EP(Y) = 2S_e$.

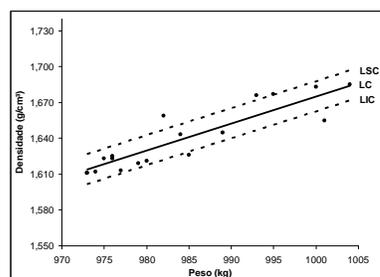


Figura 4: Gráfico de Controle de Regressão Estrutural com $\sigma_{\delta}^2 = 10Kg$ da Densidade Aparente e Peso do Eletrodo, com Limites de $2EP(\hat{Y}_i) = 2S_{\hat{Y}_i}$.

a relação entre estas duas variáveis é significativa e linear, como pode ser verificado na Figura 2.

Observando a Figura 2 se pode comprovar a existência de uma associação linear entre as variáveis Y e X , a qual apresenta uma forte relação entre estas duas variáveis, fato o qual torna a aplicação da análise de regressão linear entre estas duas variáveis inteiramente aceitável, além de que não se verifica nenhum ponto extremo (*outlier*) dentre os pontos observados, o que poderia vir a comprometer a confiabilidade dos resultados obtidos a partir de um modelo de regressão ajustado para tal característica. Para a construção do preditor \tilde{U}_i (vetor aleatório), ou seja, a obtenção do verdadeiro valor de U_i , supondo que o mesmo é aleatório com distribuição normal e ainda, que $\sigma_{\delta}^2 = 10Kg$, segundo informação fornecida pela gerência de processos desta indústria, tem-se que

$$\tilde{U}_i = 244,932 + 179,635Y_i + 0,452X_i. \quad (8.1)$$

Pode-se a partir de (7.1) e utilizando (4.1), (4.2) e (8.1) estabelecer a equação estimada da linha de regressão para o modelo estrutural, obtendo-se a linha central de regressão do gráfico de controle de regressão estrutural, como

$$LC = \hat{Y}_{\hat{Y}_i} = -0.898 + 0.002578\tilde{U}_i. \quad (8.2)$$

Após a obtenção da Equação (8.2) e fixando-se o valor de $k = 1; 2; 3$ ou seja, com limites de controle fixados em 68,86%, 95,46% e 99,73% de confiança, respectivamente, torna-se possível obter o limite superior de controle (LSC) e o limite inferior de controle (LIC), a partir de $LSC = \hat{Y}_i + k\hat{\sigma}$ e $LIC = \hat{Y}_i - k\hat{\sigma}$, respectivamente, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Os gráficos de controle de regressão estrutural com limites de controle fixados em 95,46% de confiança, para as três estimativas de σ dadas pelas Equações (7.3), (7.4) e (7.5), são apresentados nas Figuras 3, 4 e 5, respectivamente.

Para a construção dos limites de controle do gráfico da Figura 3 utilizou-se o erro padrão da linha de regressão ($EP(Y)$), como estimador do desvio padrão

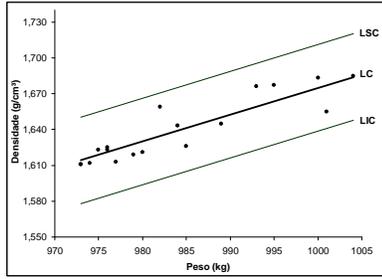


Figura 5: Gráfico de Controle de Regressão Estrutural com $\sigma_{\delta}^2 = 10Kg$ da Densidade Aparente e Peso do Eletrodo. Com Limites de $2EP(\hat{Y}_t) = 2S_{\hat{Y}_{pi}}$.

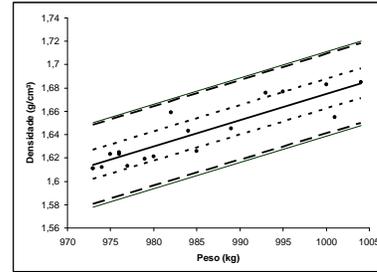


Figura 6: Gráfico de Controle de Regressão Estrutural com $\sigma_{\delta}^2 = 10Kg$ da Densidade Aparente e Peso do Eletrodo. Com Limites $2EP(Y)$, $2EP(\hat{Y}_i)$ e $2EP(\hat{Y}_t)$.

de σ . Pode-se perceber que todos os pontos “plotados” no gráfico estão dentro dos limites de controle, demonstrando que o processo está sob controle estatístico. Entretanto, ao utilizar o erro padrão da linha de regressão estimada $EP(\hat{Y}_i)$, no gráfico da Figura 4, onde objetiva-se controlar a variação média de um processo, ou seja, controlar a esperança condicional da variável dependente (Y) dado uma variável independente (X) (neste caso os limites de controle obtidos são diferentes dos obtidos na Figura 3), verifica-se que os dados não se ajustaram aos limites de controle estabelecidos a partir dessa estimativa de σ , fato que pode ser explicado devido esta segunda variação do gráfico de controle estrutural ser apropriada ao monitoramento de processos refinados, ou seja, processos que apresentam-se sob controle estatístico durante um longo período de tempo (pelo menos cinco anos). Assim, considerando-se que o processo em questão é um processo refinado, observa-se na Figura 4, que o mesmo não está sob controle estatístico.

Na Figura 5, não é notada a presença de pontos fora dos limites de controle superior e inferior, portanto, conclui-se que, este processo está sob controle estatístico e que esta estimativa da variabilidade adotada ($2S_{\hat{Y}_{pi}}$), bem como a estimativa utilizada no gráfico da Figura 3 ($2S_e = 2EP(Y)$) produzem limites de controle capazes de monitorar de forma satisfatória este processo. Objetivando-se obter limites de controle mais largos e conseqüentemente, com menor probabilidade de alarmes falsos (supor que o processo está fora de controle estatístico quando na verdade ele não está), para o processo em questão, sugere-se adotar esta última medida de variabilidade, ou seja, $2EP(\hat{Y}_t) = 2S_{\hat{Y}_{pi}}$. Para se verificar a diferença gerada pela escolha, de cada uma das três estimativas de σ apresentadas, para a construção das três variações do Gráfico de Controle de Regressão Estrutural, obteve-se a Figura 6, um gráfico comparativo o qual sintetiza as Figuras 3, 4 e 5 apresentadas anteriormente.

Verifica-se ao analisar a Figura 6, que o gráfico construído utilizando-se o erro padrão de um valor predito da variável dependente, é o que melhor se aplica a este processo de produção, visto que, dentre as três estimativas de erro utilizadas, além de conseguir compreender todos os pontos observados, ela também produz limites de

controle mais largos, com isto, uma eventual situação de anormalidade do processo produtivo (causa especial ou aleatória), será controlada de forma mais eficaz por estes limites, logo, a opção por esta terceira estimativa de σ é a mais adequada para monitorar e controlar a densidade aparente e peso do eletrodo. Percebe-se também que, caso o processo de controle esteja sendo iniciado, pode se fazer a opção pelos limites de controle baseado nos desvios dos valores observados sobre a linha de regressão ($EP(Y) = S_e$), ou ainda na estimativa do erro padrão dada pelo erro padrão de um valor predito da variável dependente ($EP(\hat{Y}_t)$). Caso o processo apresente-se sob controle estatístico há um longo período de tempo, isto é, caso se verifique que o processo é “refinado”, faz-se necessário a utilização do erro padrão da linha de regressão estimada $EP(\hat{Y}_i)$, como estimador do desvio padrão σ , ou seja, uma estimativa da variabilidade da reta de regressão (variabilidade da média).

9. Considerações Finais

Neste trabalho, comprovou-se que o gráfico de controle de regressão estrutural é uma ferramenta de controle capaz de medir o desempenho da densidade aparente em função do peso do eletrodo, utilizando-se para isto do fato de que, a partir do momento em que as variações ocorram, certamente em virtude de causas consideradas comuns ou “aleatórias” (ambas originárias da variabilidade natural do processo), estas devem ser aceitas pois considera-se que o processo está sob controle estatístico. Isto caracteriza o princípio do gráfico de controle convencional, também conhecido como princípio do gerenciamento pela exceção. Os limites do gráfico de controle de regressão, tanto com a variável independente medida com erro (modelo estrutural), como no modelo clássico de regressão, são influenciados pela escolha do estimador da variabilidade ($\hat{\sigma}$). Portanto, é necessário para a construção das três variações do gráfico de controle de regressão estrutural, utilizar três estimativas distintas de σ . Por exemplo, no caso dos modelos de regressão com erro nas variáveis, a estimativa do erro padrão de previsão ($EP(\hat{Y}_t)$), produz limites de controle mais largos do que as demais estimativas para $\hat{\sigma}$, implicando com isso em uma diminuição da chance de ocorrência de alarmes falsos, ou seja, reduzindo desta forma a possibilidade de ocorrência de um grave problema, supor que o processo está fora de controle estatístico quando na verdade ele não está, o que implicaria em uma parada desnecessária do processo. Além disso, conseguiu-se constatar ao longo da execução deste trabalho que, a aplicação em dados reais ilustra a potencialidade do gráfico de controle de regressão estrutural proposto como ferramenta eficaz de controle da qualidade e de medida de desempenho de um processo, sobre tudo, ao utilizar-se a terceira estimativa de σ ($EP(\hat{Y}_t)$), que produz os limites de controle mais largos dentre as três estimativas utilizadas e que é indicada caso o monitoramento e o controle estatístico do processo esteja em seu início, porém, foi possível constatar que, os dados não se ajustaram a segunda variação do gráfico de controle de regressão estrutural, a qual utiliza a estimativa de σ dada pelo $EP(\hat{Y}_i)$, fato o qual, pode ser explicado devido o gráfico de controle de regressão (para o modelo clássico ou modelo com erro nas variáveis) utilizando essa segunda estimativa de σ ser indicado apenas para processos refinados, ou seja, processos que apresentam-se

sobre controle estatístico há um longo período de tempo (pelo menos cinco anos).

Abstract. Because of the necessity of reaching bigger and bigger levels of precision, that is, to reduce to the maximum the errors of measure, this paper considers the model of regression with the error in the variable proposed by [4], specifically the additive structural model and it combines to the methodology of building regression control charts of [7], developing in such a way and unknown and innovative tool that it is called structural regression control chart. Regardless of the standard error used (standard error on the adjusted regression straight line, standard error on the conditional hope of Y resulted X and the standard error on a predicted value of the dependent variable) it can be verified that the structural regression control chart monitor in an efficient way the processes with related variables.

Referências

- [1] S.S. Almeida, “Desenvolvimento de Gráficos de Controle Aplicados ao Modelo Funcional de Regressão”, Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, SC, 2003.
- [2] H. Bolfarine, J. Rodrigues, L.K. Cordani, “O Modelo de Regressão com Erros nas Variáveis”, Texto de Minicurso do X SINAPE, São Paulo, SP, 1992.
- [3] C.L. Cheng, J.W. Van Ness, “Statistical Regression with Measurement Error”, Arnold, New York, 1999.
- [4] J.G. Leite, J.M. Singer, “Métodos Assintóticos em Estatística - Fundamentos e Aplicações” em 9º Simpósio Brasileiro de Probabilidade e Estatística, ABE, IME, USP, São Paulo, SP, 1990.
- [5] B.J. Mandel, The regression control chart, *Journal of Quality Technology*, **1**, No. 1 (1969), 1-9.
- [6] D.C. Montgomery, “Introduction to Statistical Quality Control”, Arizona State University, 5th ed., 2005.
- [7] P.A.P. Moran, Estimating structural and functional relationships, *Journal of Multivariate Analysis*, **1** (1971), 232-255.
- [8] L.S. Nelson, Statistical consulting in manufacturing/engineering, *Journal of Quality Technology*, **34**, No. 4 (2002).
- [9] Neter, Kutner, Nachtsheim, Wasserman. “Applied Linear Statistical Models”, Richard D. Irwin, Burr Ridge, (4th ed.), Illinois, 1996.
- [10] J.E. Pereira, L.F. Jaconi, A.M. Souza, “Gráfico de Controle de Regressão Usando o Statistica”, Visual Books, Florianópolis, SC, 2005.