

Propriedades Assintóticas dos Estimadores de Máxima Verossimilhança em um Processo de Renovação com Distribuição Weibull¹

J.C. FOGO², F. LOUZADA NETO³, Departamento de Estatística, UFSCar, Cx.P. 676, 13565-905 São Carlos, SP, Brasil

C.G.B. DEMÉTRIO⁴, Departamento de Ciências Exatas, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, USP, 13418-900 Piracicaba, SP, Brasil.

Resumo. Processos de renovação são um caso especial de processos envolvendo eventos recorrentes nos quais um item ou unidade, após a ocorrência de uma falha, é recolocado na mesma condição de novo. Neste artigo é apresentado um estudo das propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança, no qual se considerou um modelo de regressão com a presença de uma covariável z , assumindo valores -1 e 1 , num processo de renovação puro com tempos entre ocorrências com distribuição de Weibull. A metodologia é desenvolvida para o caso em que várias unidades são acometidas por eventos recorrentes. Nas simulações realizadas foram analisadas as probabilidades de cobertura empíricas do intervalo de confiança normal assintótico e também o comportamento das variâncias dos estimadores. Os resultados mostram uma boa aproximação com os valores esperados, mas com certos cuidados a serem tomados, especialmente nos procedimentos baseados na simetria das distribuições empíricas.

Palavras-chave. Processo de renovação, eventos recorrentes, análise de sobrevivência, modelos de regressão.

1. Introdução

Processos de renovação (RP) são um caso especial de processos envolvendo eventos recorrentes nos quais um item ou unidade, após a ocorrência de uma falha, é recolocado na mesma condição de novo (ou tão bom quanto novo) por meio de uma ação corretiva ou de manutenção. Como consequência, segue-se que os tempos entre as ocorrências são independentes e identicamente distribuídos segundo uma função intensidade $\lambda(\cdot)$. A literatura para eventos recorrentes é bastante ampla e tem crescido muito nos últimos anos, acompanhando o desenvolvimento computacional. Em [2, 11] pode-se encontrar detalhes da teoria sob o enfoque tradicional enquanto

¹Essa pesquisa foi parcialmente financiada pelo CNPq

²fogo@power.ufscar.br

³dfln@power.ufscar.br

⁴clarice@esalq.usp.br

que [1] detalham a teoria para eventos recorrentes sob o enfoque de processos de contagem.

O modelo para dados de sobrevivência na forma de processos pontuais mais explorado é o modelo introduzido por [5], também conhecido como processo de renovação modulado, ou RPM, o qual engloba diferentes tipos de processos conforme a definição dos parâmetros envolvidos. [6] apresenta o modelo de Cox sob o enfoque da teoria de processos de contagem multivariados, estendendo a teoria assintótica por meio de martingales. [9] desenvolveram um modelo misto que engloba tanto um termo de tendência, como um termo de renovação e [10] unificaram oito tipos de modelos similares ao de [9], considerando o processo transformado para as intensidades acumuladas. Em seu modelo, [10] englobam os processos de Poisson, de renovação e os modelos mistos, o qual chamaram de processo de renovação e tendência TRP (*trend renewal process*), bem como esses mesmo modelos com a incorporação de um termo de heterogeneidade, ou fragilidade. Mais recentemente, [7] apresentaram um modelo misto, alternativo ao modelo de [9], no qual o termo referente à renovação foi substituído pelo número esperado de falhas do processo $N(t)$, visando simplificar a aplicação do modelo na prática.

Nesses trabalhos, os diversos autores enfocam basicamente a modelagem da função de intensidade $\lambda(\cdot)$ sem considerar a presença de covariáveis. [13] faz um estudo comparativo de modelos de regressão em processos de Poisson e em [12], têm-se detalhes da teoria para modelos de regressão sob o enfoque de processos de contagem.

A estimação dos parâmetros por meio do método de máxima verossimilhança, na maior parte das situações, considera a aproximação assintótica dos estimadores na construção de intervalos de confiança ou em teste de hipóteses. A teoria estatística, no entanto, apresenta inúmeros exemplos em que as propriedades assintóticas não funcionam conforme o esperado, especialmente quando se trabalha com dados censurados. [8] cita um exemplo no qual o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de forma do modelo de Weibull apresenta um vício quando se incorporam dados censurados.

Neste artigo, considerou-se um modelo de regressão com uma covariável, para um processo de renovação com tempos entre ocorrências seguindo uma distribuição de Weibull, com o objetivo de apresentar um estudo detalhado das propriedades assintóticas dos estimadores dos parâmetros.

O restante deste artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 é apresentado o modelo de regressão proposto; a Seção 3 apresenta a estimação pelo método da máxima verossimilhança; a Seção 4, subdividida em três partes, apresenta os resultados das simulações para os casos limitado pelo número de falhas e limitado pelo tempo e, finalmente, na Seção 5 são apresentadas as conclusões e considerações finais.

2. Modelo

Um processo de renovação é um processo pontual no qual diversas unidades ou sistemas são observados até a ocorrência de uma falha, a partir da qual, uma ação

corretiva recoloca essas unidades, ou sistemas, na mesma condição de novos. Assim sendo, uma mesma unidade pode apresentar diversas falhas durante a sua vida útil, as quais serão chamadas de recorrências. Um evento recorrente, portanto, será definido como aquele que não é terminal.

Considere um processo de renovação com m unidades sendo observadas até um tempo limite t_L , conforme Figura 1, e suponha que os tempos de ocorrências para a i -ésima unidade, $i = 1, \dots, m$, sejam $0 < t_{i1} < \dots < t_{in_i} < t_L$. Dessa forma, os tempos entre ocorrências para a unidade i serão definidos como $v_{ik} = t_{ik} - t_{i(k-1)}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n_i$. O intervalo de tempo medido a partir da última falha até o limite t_L , dado por $t_L - t_{in_i}$, será denotado por $v_{i(n_i+1)}^+$, uma vez que se trata de um tempo censurado em t_L . Caso a observação se encerre no mesmo instante da última falha, ou seja, $t_L = t_{in_i}$, então os tempos de renovação $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in_i}$ formam uma amostra completa.

Considere, ainda, $N(s, t)$ denotando o número de eventos em $[s, t)$, com $N(0, t)$ sendo representado por $N(t)$. O processo pontual $N(t)$ pode ser totalmente especificado em termos da sua função intensidade completa ou condicional. Definindo a história do processo até o instante t como $\mathcal{H}_{t-} = \{N(s) : 0 \leq s < t\}$, então, de [1], a intensidade condicional de $N(t)$ é definida como

$$\lambda(t|\mathcal{H}_{t-}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t) = 1 | \mathcal{H}_{t-}]}{\Delta t}.$$

Num processo de renovação, a função de intensidade condicional é dada por $\lambda(t) = h[t - t_{N(t-)}]$, em que $t_{N(t-)}$ é o instante de ocorrência da falha mais recente e $h(\cdot)$ é a função de risco correspondente ao processo de renovação.

Assumindo um modelo de regressão multiplicativo, a função de intensidade para a i -ésima unidade de um processo de renovação é

$$\lambda_i(v|\boldsymbol{\theta}) = h_0(v|\boldsymbol{\theta}) e^{\boldsymbol{\beta}' \mathbf{z}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.1)$$

sendo que, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_p)$, $\mathbf{z} = (1, z_1, \dots, z_p)$ e $h_0(v|\boldsymbol{\theta})$ é função de risco de base.

O modelo (2.1) difere daquele apresentado por [5] por considerar a presença de covariáveis. Os modelos introduzidos por [9, 7, 10], apesar de generalizarem o modelo de Cox, também não consideram a presença de covariáveis. O modelo aqui apresentado é basicamente o modelo de [5], porém, considerando um processo de renovação puro, com a presença de variáveis concomitantes para explicar possíveis diferenças entre grupos de unidades.

3. Estimação pelo Método da Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança para uma unidade do processo de renovação, considerando o modelo de regressão (2.1), é da forma [1]

$$L_i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta} | \mathcal{D}) = \left[\prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i(v_{ij} | \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) \right] \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{n_i+1} \int_0^{v_{ij}} \lambda_i(u | \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) du \right\}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.1)$$

em que o último termo da soma em (3.1) refere-se à integral de (2.1) no intervalo $v_{i(n_i+1)}^+$.

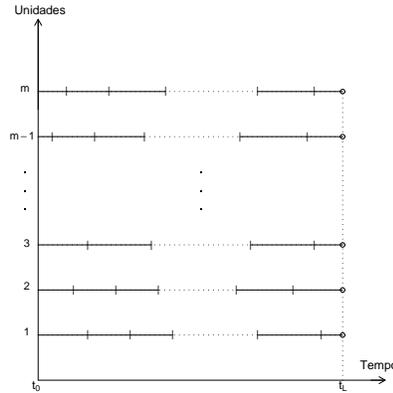


Figura 1: Processo de renovação com tempo limite t_L (as linhas horizontais indicam as unidades e as marcas sobre as linhas, as recorrências do evento)

Ao assumir um tempo limite t_L como parada do experimento, automaticamente, após a última falha, tem-se uma censura. Contudo, durante o experimento podem ser observadas censuras devido a outras causas. Nessa condição, define-se uma variável indicadora de falha c , tal que $c_{ij} = 1$, se ocorre uma falha no instante t_{ij} e $c_{ij} = 0$, se há uma censura em t_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_i + 1$.

Supondo que os tempos entre falhas tenham uma distribuição de probabilidade Weibull com intensidade $\lambda(v | \mathcal{H}_{t-}) = \delta v^{\delta-1} e^{\boldsymbol{\beta}' \mathbf{z}}$, então, a função de verossimilhança (3.1) com a informação das m unidades é escrita como

$$L(\delta, \boldsymbol{\beta} | \mathcal{D}) = \delta^c \left(\prod_{i=1}^m e^{c_i \boldsymbol{\beta}' \mathbf{z}_i} \right) \left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n_i} v_{ij}^{(\delta-1)c_{ij}} \right) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij}^{\delta} e^{\boldsymbol{\beta}' \mathbf{z}_i} \right\}, \quad (3.2)$$

em que $c_i = \sum_{j=1}^{n_i+1} c_{ij}$ é o número de falhas da i -ésima unidade e $c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i+1} c_{ij}$ é o total de falhas.

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\delta}$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}_r$, $r = 0, 1, \dots, p$, não são de fácil obtenção, por isso, deve-se utilizar um método numérico, como por exemplo, Newton-Raphson.

4. Estudo de Simulação

Considerando o modelo de regressão (2.1) com tempos entre ocorrências com distribuição de Weibull, com densidade $f(v) = \lambda \delta v^{\delta-1} \exp\{-\lambda v^{\delta}\}$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$ e

$\delta > 0$, foi realizado um estudo de simulação limitado pelo número de falhas para se avaliarem as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança.

Para a modelagem, foi considerada uma única covariável assumindo os valores -1 e 1, sendo o vetor de covariáveis da forma $\mathbf{z}' = (1, z)$ e o vetor de parâmetros da regressão $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1)$. A intensidade para a i -ésima unidade é, portanto

$$\lambda_i(v_{ij}|\mathcal{H}_{t-}) = \delta v_{ij}^{\delta-1} \exp\{\beta_0 + \beta_1 z_i\}, \quad i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n_i.$$

Os valores dos parâmetros considerados na simulação foram $\delta = 0.8, 1.0$ e 2.0 e $\beta_0 = \beta_1 = 1.0$, representando situações nas quais se tem uma função de risco decrescente, constante e crescente, respectivamente. O número de unidades em observação m e o número de ocorrências observadas por unidade n variaram conforme mostram as Tabelas 1 a 3. Para cada combinação de m e n , foram geradas $k = 2000$ amostras, sendo calculadas as estimativas de máxima verossimilhança e construído os intervalos de confiança normais assintóticos de 95%. Segundo a teoria assintótica, para n suficientemente grande, os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\delta}$, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ têm distribuições aproximadas normais com variâncias dadas pelos elementos da diagonal da inversa da matriz de informação observada.

Nas Tabelas 1 a 3, são apresentadas os resultados para as simulações com δ igual a 0.8, 1.0 e 2.0, respectivamente. As tabelas apresentam as proporções para as quais as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\delta}$, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ foram menores do que o limite inferior L , do intervalo de confiança assintótico, maiores do que o limite superior U e nas, colunas indicadas por C , são apresentadas as probabilidades de cobertura empíricas. Uma vez que cada simulação pode ser vista como uma amostra de uma distribuição binomial com parâmetros k e 0.95, pode-se testar a hipótese de que a probabilidade de cobertura é igual a 0.95 considerando que $(\hat{p} - p_0)/\sqrt{p_0(1-p_0)/k} \sim N(0, 1)$ [3], em que \hat{p} é a probabilidade de cobertura observada. Com um nível de significância de 5%, obtém-se uma região de não rejeição dada pelo intervalo (0.9405; 0.9596), portanto, rejeita-se a igualdade entre as proporções para as coberturas observadas fora desse intervalo, as quais estão assinaladas com um (*) nas Tabelas 1 a 3.

Pelos valores obtidos, nota-se que os resultados para $\hat{\delta}$ foram bons, sendo a cobertura esperada atingida mesmo para uma quantidade pequena de unidades, independentemente do valor de δ considerado na simulação. Os resultados referentes aos parâmetros da regressão foram piores, sendo que em diversas simulações o valor esperado de 0.95 não foi alcançado, até para quantidades de amostras mais elevadas. As probabilidades de cobertura empíricas do estimador $\hat{\beta}_0$ foram as que mais divergiram do valor esperado, especialmente na simulação com $\delta = 0.8$.

De maneira geral, para amostras pequenas, as distribuições empíricas dos estimadores de máxima verossimilhança se apresentaram bastante assimétricas, com um peso maior nas caudas inferiores mas com uma tendência a se tornarem simétricas com o aumento do tamanho da amostra. Mesmo assim, os valores observados para as probabilidades empíricas L e U indicam uma certa assimetria nos resultados. Esse comportamento foi observado para os três estimadores, conforme pode-se observar pelos valores das probabilidades empíricas L e U as quais estão longe do objetivo de 0.025, em grande parte das simulações.

Tabela 1: Probabilidades empíricas para os intervalos normais assintóticos com 95% de confiança, com $\delta = 0.8$.

m	n	$\hat{\delta}$			$\hat{\beta}_0$			$\hat{\beta}_1$		
		L	U	C	L	U	C	L	U	C
2	3	0.057	0.008	0.936*	0.119	0.004	0.878*	0.058	0.019	0.924*
	7	0.046	0.006	0.948	0.089	0.006	0.906*	0.055	0.020	0.926*
	15	0.043	0.015	0.942	0.070	0.011	0.919*	0.038	0.022	0.940*
	30	0.039	0.019	0.942	0.059	0.012	0.930*	0.039	0.018	0.944
10	50	0.029	0.019	0.953	0.044	0.009	0.947	0.036	0.025	0.940*
	3	0.044	0.016	0.941	0.066	0.007	0.927*	0.046	0.017	0.938*
	7	0.029	0.021	0.950	0.040	0.016	0.945	0.033	0.020	0.948
	15	0.033	0.022	0.946	0.041	0.015	0.945	0.037	0.018	0.945
30	30	0.032	0.021	0.948	0.048	0.017	0.936*	0.031	0.023	0.946
	50	0.029	0.028	0.944	0.041	0.016	0.944	0.036	0.022	0.942
	3	0.038	0.019	0.944	0.047	0.011	0.943	0.029	0.015	0.957
	7	0.024	0.018	0.959	0.038	0.013	0.949	0.041	0.021	0.939*
50	15	0.030	0.027	0.944	0.047	0.015	0.938*	0.036	0.022	0.943
	30	0.021	0.024	0.955	0.042	0.016	0.943	0.036	0.024	0.940*
	50	0.024	0.029	0.948	0.043	0.017	0.941	0.032	0.016	0.952
	3	0.033	0.019	0.949	0.046	0.019	0.936*	0.030	0.013	0.958
100	7	0.038	0.027	0.936*	0.045	0.016	0.939*	0.029	0.020	0.951
	15	0.024	0.024	0.953	0.043	0.016	0.942	0.038	0.016	0.946
	30	0.025	0.027	0.948	0.035	0.019	0.947	0.033	0.014	0.953
	50	0.029	0.028	0.944	0.054	0.019	0.928*	0.038	0.017	0.946
30	3	0.024	0.024	0.952	0.035	0.012	0.954	0.028	0.022	0.951
	7	0.021	0.033	0.947	0.037	0.020	0.944	0.031	0.018	0.952
	15	0.020	0.024	0.957	0.038	0.011	0.952	0.032	0.022	0.947
	30	0.018	0.035	0.948	0.048	0.019	0.933*	0.038	0.015	0.948
50	0.023	0.035	0.942	0.041	0.015	0.945	0.044	0.017	0.939*	

4.1. Análise das variâncias dos estimadores

As variâncias amostrais dos estimadores de máxima verossimilhança, em função do tamanho da amostra, pode ser representada por uma relação do tipo

$$\text{vâr}(\hat{\theta}) = \frac{SQ}{m^a n^b}, \quad (4.1)$$

em que a e b são potências positivas as quais, segundo a inferência estatística, devem ser iguais a 1. Por conseguinte, espera-se que a e b tendam a 1 conforme m e n aumentem. Aplicando-se o logaritmo em ambos os lados da igualdade (4.1) obtém-se a seguinte relação linear

$$\log[\text{vâr}(\hat{\theta})] = \log(SQ) - a \log(m) - b \log(n), \quad (4.2)$$

logo, espera-se que as variâncias dos estimadores de δ , β_0 e β_1 diminuam conforme o tamanho de amostra aumenta, segundo a relação (4.2).

Para o estudo do comportamento de a e b foi utilizado um procedimento empírico no qual se calcularam os coeficientes angulares de (4.2) para cada par de valores de m ou n . O coeficiente angular entre $\log[\text{vâr}(\cdot)]$ e $\log(m)$, para $m_1 < m_2$, é calculado segundo a relação

$$\text{coef} = \frac{\log[\text{vâr}_2(\cdot)] - \log[\text{vâr}_1(\cdot)]}{\log(m_2) - \log(m_1)}, \quad (4.3)$$

Tabela 2: Probabilidades empíricas para os intervalos normais assintóticos com 95% de confiança, com $\delta = 1.0$.

m	n	$\hat{\delta}$			$\hat{\beta}_0$			$\hat{\beta}_1$		
		L	U	C	L	U	C	L	U	C
2	3	0.056	0.008	0.937*	0.135	0.004	0.862*	0.061	0.019	0.921*
	7	0.052	0.012	0.937*	0.085	0.008	0.908*	0.050	0.025	0.925*
	15	0.040	0.014	0.946	0.063	0.010	0.928*	0.045	0.017	0.939*
	30	0.035	0.021	0.945	0.044	0.015	0.942	0.036	0.025	0.940*
10	50	0.031	0.019	0.951	0.040	0.014	0.947	0.031	0.023	0.947
	3	0.036	0.014	0.950	0.058	0.012	0.931*	0.040	0.018	0.942
	7	0.033	0.024	0.944	0.041	0.014	0.946	0.039	0.017	0.945
	15	0.027	0.017	0.957	0.043	0.015	0.943	0.032	0.018	0.951
30	30	0.023	0.021	0.957	0.029	0.017	0.955	0.030	0.024	0.947
	50	0.033	0.020	0.947	0.034	0.016	0.951	0.033	0.018	0.950
	3	0.032	0.021	0.947	0.044	0.012	0.945	0.038	0.015	0.948
	7	0.030	0.020	0.951	0.034	0.016	0.951	0.034	0.022	0.945
50	15	0.027	0.022	0.952	0.029	0.026	0.946	0.038	0.020	0.943
	30	0.026	0.029	0.946	0.030	0.020	0.951	0.034	0.021	0.946
	50	0.023	0.025	0.952	0.026	0.021	0.954	0.042	0.012	0.947
	3	0.036	0.025	0.940*	0.040	0.014	0.947	0.035	0.022	0.944
100	7	0.025	0.022	0.954	0.037	0.017	0.947	0.025	0.019	0.957
	15	0.025	0.029	0.946	0.036	0.023	0.942	0.034	0.023	0.944
	30	0.025	0.028	0.948	0.032	0.019	0.950	0.036	0.016	0.949
	50	0.016	0.026	0.958	0.038	0.018	0.945	0.035	0.013	0.953
200	3	0.030	0.029	0.942	0.028	0.020	0.953	0.031	0.019	0.951
	7	0.025	0.025	0.950	0.040	0.020	0.940*	0.032	0.018	0.951
	15	0.019	0.026	0.956	0.024	0.018	0.959	0.036	0.017	0.948
	30	0.022	0.040	0.938*	0.028	0.013	0.959	0.043	0.020	0.938*
50	0.017	0.032	0.952	0.030	0.022	0.949	0.041	0.015	0.945	

em que $\log[\hat{\text{var}}_i(\cdot)]$, $i = 1, 2$, é o logaritmo da variância amostral obtida na simulação com $m = m_i$, para um valor fixo de n .

Na Tabela 4 são apresentados os valores dos coeficientes angulares calculados em função de $\log(m)$, mantendo-se n fixo e, na Tabela 5, os valores dos coeficientes angulares em função de $\log(n)$ para m fixo. Conforme o esperado, os valores dos coeficientes a e b decaíram para 1, ou para um valor próximo de 1, independente do valor de δ .

4.2. Simulação para um processo de renovação limitado pelo tempo

Para o caso limitado pelo tempo, foram considerados dois tempos limites $t_L = 4$ e $t_L = 9$, assumido-se que todos os tempos anteriores a t_L foram observados. Como no caso anterior, foram utilizados os mesmos números de unidades m , com os valores dos parâmetros fixados em $\delta = 2.0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1.0$.

No tempo limite igual a 4, os números médios de ocorrências não censuradas, por unidade, para cada nível da covariável, foram de $\bar{n}_1 = 4.1$, no nível -1 de \mathbf{z} e de $\bar{n}_2 = 11.9$, no nível 1. No tempo limite 9, foram registradas $\bar{n}_1 = 9.8$, no nível -1 de \mathbf{z} e $\bar{n}_2 = 27.2$, no nível 1.

Pelos valores apresentados na Tabela 6 pode-se observar que, das cinco simulações realizadas para $\hat{\delta}$, com o tempo limite $t_L = 9$, três apresentaram valores fora dos limites esperados, mesmo para tamanhos de amostras moderados. As pro-

Tabela 3: Probabilidades empíricas para os intervalos normais assintóticos com 95% de confiança, com $\delta = 2.0$.

m	n	$\hat{\delta}$			$\hat{\beta}_0$			$\hat{\beta}_1$		
		L	U	C	L	U	C	L	U	C
2	3	0.060	0.007	0.934*	0.121	0.005	0.875*	0.067	0.035	0.899*
	7	0.049	0.009	0.942	0.088	0.005	0.908*	0.054	0.021	0.926*
	15	0.042	0.020	0.938*	0.063	0.012	0.925*	0.049	0.021	0.930*
	50	0.036	0.017	0.948	0.045	0.013	0.943	0.035	0.027	0.939*
10	3	0.040	0.013	0.948	0.063	0.012	0.926*	0.049	0.019	0.933*
	7	0.033	0.014	0.954	0.049	0.012	0.940*	0.033	0.015	0.953
	15	0.033	0.018	0.949	0.035	0.019	0.947	0.029	0.020	0.952
	50	0.028	0.022	0.950	0.034	0.024	0.943	0.024	0.022	0.955
30	3	0.029	0.018	0.954	0.030	0.022	0.949	0.029	0.027	0.945
	7	0.031	0.020	0.949	0.032	0.011	0.957	0.038	0.019	0.944
	15	0.037	0.017	0.947	0.033	0.018	0.950	0.028	0.017	0.955
	50	0.028	0.021	0.952	0.038	0.017	0.946	0.038	0.022	0.940*
50	3	0.032	0.017	0.952	0.026	0.027	0.948	0.033	0.028	0.940*
	7	0.034	0.024	0.943	0.026	0.021	0.954	0.031	0.026	0.944
	15	0.030	0.023	0.948	0.034	0.021	0.945	0.033	0.019	0.949
	50	0.030	0.018	0.953	0.024	0.022	0.955	0.028	0.024	0.949
100	3	0.027	0.021	0.952	0.033	0.024	0.944	0.034	0.021	0.945
	7	0.033	0.020	0.947	0.025	0.021	0.955	0.035	0.018	0.948
	15	0.034	0.018	0.949	0.021	0.026	0.953	0.030	0.018	0.952
	50	0.030	0.024	0.947	0.031	0.021	0.949	0.032	0.018	0.950
200	3	0.031	0.024	0.946	0.031	0.025	0.945	0.041	0.024	0.936*
	7	0.027	0.023	0.951	0.021	0.019	0.961*	0.031	0.024	0.946
	15	0.037	0.017	0.946	0.029	0.022	0.950	0.038	0.022	0.941
	50	0.032	0.022	0.947	0.026	0.026	0.949	0.037	0.022	0.942

babilidades de cobertura empíricas para os estimadores de máxima verossimilhança de β_0 e β_1 na maioria das vezes ficaram dentro dos limites esperados, com apenas dois casos diferindo do esperado.

Com relação à simetria das distribuições amostrais, nota-se um comportamento semelhante ao caso limitado pelo número de falhas, ou seja, nas amostras menores houve uma tendência mais acentuada de assimetria na cauda inferior. Para os estimadores $\hat{\delta}$ e $\hat{\beta}_0$, a assimetria diminui com o aumento do tamanho da amostra mas, na maioria dos casos, as probabilidades empíricas L e U ainda estão longe do valor esperado. Para $\hat{\beta}_1$, as probabilidades empíricas L e U são bastante equilibradas na simulação com tempo limite $t_L = 4$ mas, nas simulações com $t_L = 9$, verifica-se uma inversão na assimetria para as maiores amostras, nas quais os valores obtidos indicam uma peso maior das caudas superiores.

Na avaliação do decaimento das variâncias amostrais dos estimadores de máxima verossimilhança, espera-se a mesma relação linear (4.2) considerada no caso limitado pelo número de falhas. Pelos valores apresentados na Tabela 7, observa-se que os coeficientes estão próximos do valor 1, mesmo para as amostras menores, o que pode ser explicado pelos valores registrados para \bar{n}_1 e \bar{n}_2 .

Tabela 4: Coeficientes angulares de $\log[\text{v\hat{a}r}(\cdot)] \times \log(m)$ para n fixo, obtidos de (4.3).

Estimador	δ		n				
	real	m	3	7	15	30	50
$\hat{\delta}$	0.8	2 e 10	-2.11	-1.35	-1.12	-1.06	-1.01
		10 e 30	-1.20	-1.11	-1.02	-1.10	-1.08
		30 e 50	-1.12	-0.75	-1.15	-0.96	-0.91
		50 e 100	-1.04	-1.18	-1.03	-0.95	-0.94
	1.0	2 e 10	-1.94	-1.36	-1.19	-1.07	-1.01
		10 e 30	-1.20	-1.13	-0.99	-0.97	-1.06
		30 e 50	-1.00	-1.03	-0.95	-1.07	-1.16
		50 e 100	-1.06	-0.96	-1.10	-0.96	-0.89
	2.0	2 e 10	-2.05	-1.38	-1.22	-1.03	-1.06
		10 e 30	-1.15	-1.00	-0.99	-1.03	-0.95
		30 e 50	-1.13	-1.09	-1.11	-0.98	-1.08
		50 e 100	-1.01	-0.93	-0.98	-1.09	-1.01
$\hat{\beta}_0$	0.8	2 e 10	-2.10	-1.32	-1.16	-1.04	-1.00
		10 e 30	-1.16	-1.07	-0.94	-1.06	-1.02
		30 e 50	-0.92	-0.94	-1.09	-1.07	-0.82
		50 e 100	-1.22	-1.08	-1.11	-0.89	-1.12
	1.0	2 e 10	-1.93	-1.34	-1.09	-1.08	-1.03
		10 e 30	-1.19	-1.06	-1.03	-0.99	-1.04
		30 e 50	-1.00	-1.00	-1.01	-1.05	-0.88
		50 e 100	-1.12	-1.00	-1.12	-1.04	-1.04
	2.0	2 e 10	-1.98	-1.32	-1.14	-1.09	-1.04
		10 e 30	-1.26	-1.07	-1.01	-1.01	-1.00
		30 e 50	-0.89	-1.11	-1.01	-1.11	-1.02
		50 e 100	-1.07	-0.88	-1.09	-0.92	-1.00
$\hat{\beta}_1$	0.8	2 e 10	-1.91	-1.30	-1.10	-1.01	-1.03
		10 e 30	-1.25	-1.00	-1.00	-1.01	-1.09
		30 e 50	-0.98	-1.14	-1.15	-1.19	-0.87
		50 e 100	-0.97	-0.99	-0.97	-0.94	-1.01
	1.0	2 e 10	-1.81	-1.32	-1.16	-1.08	-1.03
		10 e 30	-1.15	-1.08	-0.95	-0.97	-1.01
		30 e 50	-1.04	-1.17	-1.01	-1.13	-1.06
		50 e 100	-1.01	-0.92	-1.05	-0.86	-0.95
	2.0	2 e 10	-1.92	-1.33	-1.17	-1.10	-1.04
		10 e 30	-1.16	-1.04	-0.96	-0.94	-1.00
		30 e 50	-1.07	-0.94	-1.01	-1.09	-1.03
		50 e 100	-1.02	-0.94	-1.03	-0.93	-0.93

5. Conclusão

O procedimento para construção dos intervalos de confiança baseado na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança mostrou-se satisfatório na maioria dos casos, porém, com algumas simulações em que os resultados obtidos não atingiram os valores nominais. As probabilidades de cobertura obtidas para o estimador de parâmetro δ foram mais consistentes do que para os parâmetros da regressão, alcançando o valor nominal na maioria das simulações. Em algumas simulações, mesmo para amostras consideradas grandes, as probabilidades de cobertura empíricas dos estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ não atingiram o valor esperado de 0.95, especialmente para $\delta = 0.8$. Além disso, os resultados mostram assimetria na cauda inferior que, de maneira geral, foi mais marcante nas pequenas amostras. Esse resultado indica que as inferências baseadas em procedimentos bicaudais merecem cuidado especial, particularmente quando amostras pequenas são consideradas. Nas análises das variâncias dos estimadores, por sua vez, os resultados indicaram um

Tabela 5: Coeficientes angulares de $\log[\text{vâr}(\cdot)] \times \log(n)$ para m fixo, obtidos de (4.3).

estimador	δ real	n	m				
			2	10	30	50	100
$\hat{\delta}$	0.8	3 e 7	-2.68	-1.26	-1.14	-0.92	-1.03
		7 e 15	-1.54	-1.04	-0.90	-1.17	-1.03
		15 e 30	-1.16	-1.03	-1.16	-1.02	-0.94
		30 e 50	-1.16	-0.99	-0.97	-0.92	-0.91
	1.0	3 e 7	-2.27	-1.18	-1.08	-1.10	-1.02
		7 e 15	-1.55	-1.20	-1.01	-0.96	-1.09
		15 e 30	-1.27	-0.99	-0.95	-1.04	-0.90
		30 e 50	-1.11	-0.91	-1.11	-1.19	-1.10
	2.0	3 e 7	-2.53	-1.26	-1.06	-1.04	-0.98
		7 e 15	-1.39	-1.05	-1.03	-1.04	-1.09
		15 e 30	-1.38	-0.95	-1.02	-0.93	-1.03
		30 e 50	-1.00	-1.09	-0.93	-1.02	-0.92
$\hat{\beta}_0$	0.8	3 e 7	-2.66	-1.18	-1.06	-1.07	-0.96
		7 e 15	-1.46	-1.11	-0.91	-1.01	-1.03
		15 e 30	-1.19	-0.92	-1.12	-1.11	-0.89
		30 e 50	-1.24	-1.11	-1.02	-0.76	-1.07
	1.0	3 e 7	-2.36	-1.24	-1.06	-1.06	-0.96
		7 e 15	-1.54	-1.01	-0.97	-0.98	-1.08
		15 e 30	-1.11	-1.09	-1.04	-1.07	-0.99
		30 e 50	-1.16	-1.01	-1.12	-0.94	-0.94
	2.0	3 e 7	-2.45	-1.19	-0.95	-1.08	-0.93
		7 e 15	-1.46	-1.08	-1.00	-0.93	-1.12
		15 e 30	-1.14	-1.03	-1.03	-1.10	-0.93
		30 e 50	-1.19	-1.04	-1.00	-0.91	-1.03
$\hat{\beta}_1$	0.8	3 e 7	-2.41	-1.26	-0.94	-1.03	-1.05
		7 e 15	-1.46	-1.03	-1.02	-1.03	-1.00
		15 e 30	-1.17	-0.97	-0.99	-1.02	-1.00
		30 e 50	-1.01	-1.06	-1.22	-0.90	-0.99
	1.0	3 e 7	-2.08	-1.14	-1.04	-1.12	-1.05
		7 e 15	-1.50	-1.17	-0.99	-0.88	-0.99
		15 e 30	-1.19	-1.01	-1.05	-1.14	-0.95
		30 e 50	-1.13	-0.97	-1.05	-0.98	-1.11
	2.0	3 e 7	-2.37	-1.25	-1.10	-1.02	-0.95
		7 e 15	-1.38	-1.04	-0.92	-0.97	-1.05
		15 e 30	-1.18	-1.02	-0.98	-1.04	-0.94
		30 e 50	-1.10	-0.93	-1.07	-1.01	-1.01

Tabela 6: Probabilidades empíricas para os intervalos normais assintóticos com 95% de confiança, com $\delta = 2.0$, para o caso limitado pelo tempo.

t_L	m	$\hat{\delta}$			$\hat{\beta}_0$			$\hat{\beta}_1$		
		L	U	C	L	U	C	L	U	C
4	2	0.047	0.014	0.940*	0.051	0.007	0.943	0.039	0.024	0.938*
	10	0.032	0.022	0.947	0.032	0.012	0.957	0.033	0.025	0.943
	30	0.029	0.021	0.950	0.026	0.022	0.953	0.025	0.026	0.950
	50	0.019	0.024	0.957	0.030	0.022	0.949	0.024	0.026	0.951
9	100	0.019	0.024	0.958	0.029	0.026	0.946	0.021	0.028	0.952
	2	0.043	0.017	0.940*	0.050	0.016	0.935*	0.032	0.025	0.944
	10	0.031	0.029	0.940*	0.038	0.016	0.947	0.023	0.023	0.955
	30	0.031	0.031	0.939*	0.031	0.020	0.950	0.024	0.030	0.947
100	50	0.029	0.027	0.945	0.030	0.027	0.944	0.018	0.033	0.950
	100	0.025	0.018	0.958	0.027	0.029	0.945	0.022	0.030	0.948

decaimento rápido para os níveis nominais, direcionados pelo aumento do tama-

Tabela 7: Coeficiente angular de $\log[\hat{\text{vâr}}(\cdot)]$ x $\log(m)$, para o caso limitado pelo tempo.

t_L	m	$\hat{\delta}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
4.0	2 e 10	-1.34	-1.20	-1.22
	10 e 30	-1.09	-0.99	-1.07
	30 e 50	-0.96	-1.01	-1.08
	50 e 100	-1.02	-0.95	-1.01
9.0	2 e 10	-1.13	-1.07	-1.13
	10 e 30	-1.05	-1.03	-0.97
	30 e 50	-1.07	-0.98	-1.07
	50 e 100	-1.05	-1.00	-1.02

nho da amostra. No caso limitado pelo tempo, com a inclusão de uma observação censurada, tem-se basicamente os mesmos resultados, porém, os resultados para o estimador $\hat{\delta}$ foram piores do que para os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$. A presença de observações censuradas é uma constância em dados de sobrevivência, entretanto, essa situação, apesar de grande importância, esta fora do escopo do artigo e deve ser investigada em pesquisa futura.

Abstract. Renewal process are special case of processes involving recurrent events, in which a unit, after a failure, is restored to the like new condition. In this work we present an asymptotic study of the maximum likelihood estimators properties considering a regression model with a concomitant variable z , assuming values -1 and 1, in a simple renewal process when the times between occurrences present a Weibull distribution. The methodology was developed for the situation when several units in test are submitted by recurrent events. Simulations were analysed by the empirical probabilities of the normal confidential intervals that wraps the real value of the parameter and the asymptotical behaviour of the variances estimations. The results shows a good approach to the nominal values, but some observations about procedures have to be made on the symmetry of the empirical distributions of the estimators.

Keywords. Renewal process, recurrent events, survival analysis, regression models.

Referências

- [1] P.K. Andersen, Ø. Borgan, R.D. Gill, N. Keiding, "Statistical Models Based on Counting Processes", Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] A. Ascher, H. Feingold, "Repairable Systems Reliability: Modeling, Inference, Misconceptions and Their Causes", Marcel Dekker Inc., New York, 1984.
- [3] G. Casella, R.L. Berger, "Statistical Inference", 2nd. ed., Duxbury Press, 2002.
- [4] E.A. Colosimo, S.R. Giolo, "Análise de Sobrevivência Aplicada", Edgard Blücher, São Paulo, 2006.

- [5] D.R. Cox, The statistical analysis of dependencies in point processes, in: “Stochastic Point Processes”, (P.A.W. Lewis, ed.), pp. 55-66, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [6] R.D. Gill, Understanding Cox’s regression model: a martingale approach, *Journal of the American Statistical Association*, **79** (1984), 441-447.
- [7] H. Guo, W. Zhao, A. Mettas, ‘Practical Methods for Modeling Repairable Systems with Time Trends and Repair Effects’, in: “Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium”, California, USA, pp. 182-188, 2006.
- [8] N.L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, “Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions, v.2”, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [9] J.F. Lawless, K. Thiagarajah, A point-process model incorporating renewals and trends, with application to repairable systems, *Technometrics*, **38** (1996), 131-138.
- [10] B.H. Lindqvist, G. Elvebakk, K. Heggland, The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems, *Technometrics*, **45** (2003), 31-44.
- [11] S.E. Rigdon, A.P. Basu, “Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems”, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [12] G.L. Silva, “Análise Bayesiana de Modelos de Sobrevivência com Fragilidade”, 1994. 139p. Tese (Doutorado em Matemática), Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2001.
- [13] V.L.D. Tomazella, “Modelagem de Dados de Eventos Recorrentes Via Processos de Poisson com Termo de Fragilidade”, 2003. 165p. Tese (Doutorado em Ciências de Computação e Matemática Computacional), Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.