

# Algoritmos ART para a Estimativa do Coeficiente de Absorção com Feixes Divergentes usando certas Funções de Bregman

M.J. BERROCAL TITO<sup>1</sup>, R.F. CARITA MONTERO<sup>2</sup>, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Est. D. Castorina 110, 22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

**Resumo.** Consideramos uma classe de algoritmos tipo ART (Algebraic Reconstruction Technique) empregando certas funções de Bregman, para a estimativa do coeficiente de absorção com feixes divergentes de poucas vistas onde o número de incógnitas é maior ao número de dados. O funcional de Bregman usado está relacionado às entropias estudadas por Shannon, Harvda-Charvát e Sharma-Taneja. Este funcional depende de certos parâmetros  $r$  e  $s$ . Com este funcional nós construímos uma família de distâncias de Bregman para ser empregada nos algoritmos ART. Neste trabalho procuram-se os valores ótimos dos parâmetros  $r$  quando  $s \rightarrow 1$ , que ofereçam os melhores resultados para a estimativa dos coeficientes de absorção. Casos testes são apresentados, empregando dados com ruídos randômicos.

## 1. Introdução

A tomografia de raios X representa talvez o problema inverso mais básico onde temos que determinar a estrutura interna de um meio baseado em dados obtido externamente por detectores.

Problemas relativamente simples são os ensaios não destrutivos com aplicação tecnológica importante na indústria, diagnose e tratamento em medicina, e no qual o espalhamento pode ser desprezado, sendo a absorção (denominado atenuação em medicina) o modo dominante de interação da radiação no meio. A Tomografia computadorizada (CT) e a tomografia computadorizada por emissão de fótons (SPECT) estão dentro deste contexto [6, 3, 5].

Uma aproximação muito boa é considerar que os raios X viajam por qualquer meio em linha reta. Para medir os raios depois que eles atravessarem uma região de interesse, o detector é colocado diretamente em frente a uma fonte de raios X, como mostrado na Figura 1. Assume-se que os raios X não se espalham e que serem apenas parcialmente absorvidos pelo meio. Assim a intensidade,  $I$ , que atravessa uma diferencial do meio,  $ds$ , pode ser descrita por

---

<sup>1</sup>mabet99@yahoo.com

<sup>2</sup>rftcm20000@yahoo.com.br

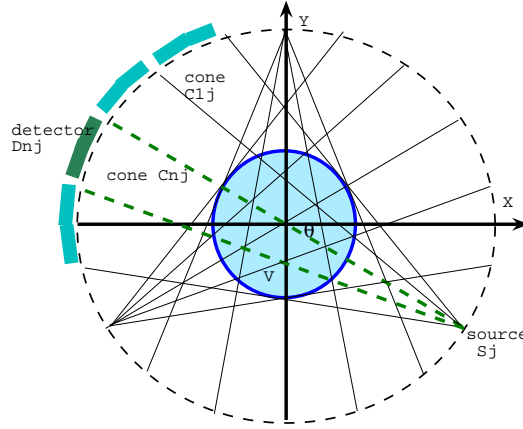


Figura 1: Geometria básica e partição do domínio com feixes divergentes.

$$\frac{dI}{I} = -f(x, y)ds, \quad (1.1)$$

onde a função  $f(x, y)$  está relacionada ao coeficiente de atenuação,  $\sigma$ . Assumindo uma intensidade  $I_S$  na fonte, a Eq.(1.1) pode ser integrada dada a intensidade do detector  $I_D$  como

$$I_D = I_S \exp\left\{ \int_{cone} f(x, y)ds \right\} \Rightarrow \ln \frac{I_S}{I_D} = \int_{cone} f(x, y)ds. \quad (1.2)$$

Em tomografia de raio X, o problema é recuperar  $f(x, y)$  desde sua integral ao longo do caminho entre a fonte - detector. Neste trabalho consideramos cones como os caminhos onde a radiação passa. Na Fig. 1, uma linha de detectores é organizada em frente de uma fonte. Os dados são colecionados em função do ângulo de giro,  $\theta$ , feito pela linha fonte e o eixo  $x$ . O sistema é girado ao redor do objeto, cada giro do sistema denomina-se vista  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . A integral da Eq.(1.2) tem a forma [2]

$$\int_{cone} f(x, y)ds = \sum_{e \in c_{j, n_j}}^E \sigma_e a_e, \quad e = 1, 2, \dots, E \quad e \quad n_j = 1, 2, \dots, N_j, \quad (1.3)$$

onde  $n_j$ , indica um cone, caminho relacionado com a posição entre a fonte e o detector,  $n_j = 1, 2, \dots, N_j$ .  $N_j$  é o número total de cones do sistema  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ ,  $j$  é um sistema rotado por um ângulo  $\theta$ ,  $J$  o número total de sistemas rotados,  $a_e$  é um elemento de área do domínio discretizado,  $e = 1, 2, \dots, E$ , onde  $E$  é o número total de elementos de área que discretizam o domínio.

## 2. Partição do Domínio

A partição do domínio consistente com o sistema fonte-detector representado na Figura 1. consiste na identificação e numeração dos polígonos formados pela in-

terseção de todos os cones originadas com todas as fontes bem como a identificação a numeração e a ordenação dos vértices destes polígonos. Esta partição assim gerada é chamada de base natural. Uma descrição detalhada sobre a partição do domínio com feixes divergentes é encontrada em [2, 7].

### 3. Funções Convexas e Entropias

Seja  $z = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$  o vetor formado pelas incógnitas positivas de um sistema. Define-se o seguinte funcional

$$\eta_{s,r}(z_i) = \frac{z_i^s - z_i^r}{s - r} \quad \text{com } s > 1, \quad r \in (0, 1] \quad \text{or } r > 1, \quad s \in (0, 1], \quad (3.1)$$

que está relacionada com a entropia de Sharma e Taneja [9], Shannon [8] e de Havrda - Charvát [4]

- se  $s \rightarrow 1$  e  $r \rightarrow 1$  obtemos  $\eta_{1,1}(z_i) = z_i \ln z_i$ . (entropia de Shannon)
- se  $s \rightarrow 1$  e  $r > 0$  obtemos  $\eta_{1,r}(z_i) = (z_i - z_i^r)/(1 - r)$ . (entropia de Havrda-Charvát).

A distância de Bregman [1] é definida como

$$D(z, z_0) = D(\eta(z), \eta(z_0)) = \eta(z) - \eta(z_0) - \langle \nabla \eta(z_0), z - z_0 \rangle, \quad (3.2)$$

onde  $\nabla$  é um operador gradiente

$$\langle \nabla \eta(z_0), z - z_0 \rangle = \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{z_0} (z - z_0). \quad (3.3)$$

Com o funcional  $\eta_{s,r}$  obtemos as seguintes distâncias de Bregman.

$$D_{s,r}(z, z_0) = \frac{1}{s - r} \left[ \sum_{i=1}^p (z_i^s - z_i^r) - \sum_{i=1}^p (z_{0i}^s - z_{0i}^r) - \sum_{i=1}^p (s z_{0i}^{s-1} - r z_{0i}^{r-1})(z_i - z_{0i}) \right] \quad (3.4)$$

no caso em que  $s \rightarrow 1$  e  $r > 0$

$$D_{1,r}(z, z_0) = \frac{1}{1 - r} \left[ \sum_{i=1}^p (z_i - z_i^r) - \sum_{i=1}^p (z_{0i} - z_{0i}^r) - \sum_{i=1}^p (1 - r z_{0i}^{r-1})(z_i - z_{0i}) \right] \quad (3.5)$$

e no caso em que  $s \rightarrow 1$  e  $r \rightarrow 1$

$$D_{1,1}(z, z_0) = - \sum_{i=1}^p \left( z_i - z_{0i} - z_i \ln \frac{z_i}{z_{0i}} \right). \quad (3.6)$$

## 4. O Algoritmo ART

Enumere-se todos os cones que particionam o domínio com o índice  $k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , onde  $K$  é o número total de cones. A relação entre  $k$ ,  $j$  número de vista, e  $n_j$  número de cones é dada por  $k = (jN_j - 1) + n_j$ . Considere-se a matriz  $A$ , com dimensões  $(K, E)$  onde cada linha de  $A$  esta relacionado a um cone e uma coluna de  $A$  a um elemento de área da partição do domínio. A linha  $k$  contém todas as informações dos elementos de área que formam o cone  $k$ . A Eq. (1.3) pode ser escrita como

$$h(k, 1) = \int_{\text{cone}_{j,n_j}} f(x, y) ds, \quad h = A\sigma, \quad (4.1)$$

onde  $\sigma$  e  $h$  são vetores coluna. Define-se a função erro como a diferença entre a medida experimental do detector e o calculado.

$$F = h - A\sigma \quad (4.2)$$

e a Lagrangiana

$$L_{1,r}(\sigma, \sigma_0, \lambda) = D_{1,r}(\sigma, \sigma_0) + \lambda^T F, \quad (4.3)$$

onde  $\lambda$  é um vetor coluna formado pelos multiplicadores de lagrange. Sendo  $E > K$  o problema inverso é solucionado como um problema de otimização, e deve cumprir com dois requerimentos:

1.-

$$\nabla_{\sigma} L = \nabla_{\sigma} D_{1,r} + \nabla_{\sigma}(\lambda^T F) = 0, \quad (4.4)$$

onde

$$\nabla_{\sigma}(\lambda^T F) = A^T \lambda, \quad (4.5)$$

para  $r = 1$  ou  $r \neq 1$  respectivamente temos

$$\nabla_{\sigma} D_{1,1} = \ln \sigma - \ln \sigma_0, \quad \nabla_{\sigma} D_{1,r} = \frac{r}{r-1} [\sigma^{r-1} - \sigma_0^{r-1}], \quad (4.6)$$

das Eqs. (4.4), (4.5) e (4.6) obtemos para  $r = 1$  ou  $r \neq 1$

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - A^T \lambda, \quad \sigma^{r-1} = \sigma_0^{r-1} - \frac{r-1}{r} A^T \lambda, \quad (4.7)$$

cada elemento  $e$  de  $\ln \sigma$  ou de  $\sigma^{r-1}$  respectivamente tem a forma  $\ln \sigma(e)$  ou  $(\sigma(e))^{r-1}$ , conseqüentemente os elementos de  $\sigma$  podem ser calculados sem dificuldade.

2.-

$$\nabla_{\lambda} L = \nabla_{\lambda} D_{1,r} + F + (\nabla_{\lambda} F) \lambda = 0 \quad (4.8)$$

conseqüentemente, tem-se

$$\lambda = -(\nabla_{\lambda} F)^{-1} (F - \nabla_{\lambda} D_{1,r}), \quad (4.9)$$

onde

$$\nabla_{\lambda} D_{1,r} = \nabla_{\lambda} \sigma \nabla_{\sigma} D_{1,r} \quad (4.10)$$

$$\nabla_{\lambda} F = \nabla_{\lambda} \sigma A^T. \quad (4.11)$$

Se  $r = 1$  temos

$$[\nabla_\lambda \sigma](k, e) = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \lambda_k} = -\sigma_e A(k, e) \quad (4.12)$$

caso  $r \neq 1$

$$[\nabla_\lambda \sigma](k, e) = -\frac{1}{r} \sigma_e^{2-r} A(k, e). \quad (4.13)$$

O problema é resolvido em forma iterativa, com o seguinte algoritmo:

*Para  $u = 1, 2, \dots$  ate que a convergencia seja obtida*

*Se  $u = 1$ , dado um  $\sigma_0$ , empregue as Eqs.(4.2, 4.11 e 4.12)*

*e calcule  $\lambda = -(\nabla_\lambda F)^{-1} F$*

*Se  $r = 1$ :  $\ln \sigma_1 = \ln \sigma_0 - A^T \lambda$*

*Caso contrario:  $\sigma_1^{r-1} = \sigma_0^{r-1} - \frac{r-1}{r} A^T \lambda$*

*Se  $u > 1$  empregue as Eqs.(4.2, 4.11 e 4, 12) e calcule a Eq, (4.5)*

*$\nabla_\sigma D_{1,1} = \ln \sigma_{u-1} - \ln \sigma_{u-2}$ , ou  $\nabla_\sigma D_{1,r} = \frac{r}{r-1} (\sigma_{u-1}^{r-1} - \sigma_{u-2}^{r-1})$*

*calcule  $\lambda = -(\nabla_\lambda F)^{-1} (F - \nabla_\lambda D_{1,r})$*

*logo calcule respectivamente caso seja  $r = 1$  ou  $r \neq 1$*

*$\ln \sigma_u = \ln \sigma_{u-1} - A^T \lambda$ ,  $\sigma_u^{r-1} = \sigma_{u-1}^{r-1} - \frac{r-1}{r} A^T \lambda$*

*Se  $\sum_{e=1}^E |\sigma_u(e) - \sigma_{u-1}(e)| / |\sigma_u(e)| < \varepsilon$ , fim.*

## 5. Resultados

Procurando um número que nos indique a qualidade nas estimativas das incógnitas em cada caso teste, definimos o erro quadrático relativo médio ( $EP$ ), dado por:

$$EP = \frac{100 \sqrt{\sum_{e=1}^E \left( \frac{\sigma_{e,exato} - \sigma_{e,calculado}}{\sigma_{e,exato}} \right)^2 a_e^2}}{a_V}, \quad (5.1)$$

onde  $\sigma_e$  é o coeficiente de absorção do elemento de área  $e$ ,  $E$  o número total de elementos e  $a_V$  a área do domínio  $V$ .

Neste trabalho, para os casos testes, foram empregados como medidas experimentais dados gerados com ruído pseudo-randômicos obtido por rotinas computacionais,

$$q_{i,experimental} = q_{i,exato} + \nu_i \chi, \quad (5.2)$$

onde  $q_{i,exato}$  é o fluxo angular obtido pelo problema direto,  $\nu_i$  é o número pseudo randômico com distribuição uniforme e  $\chi$  simula o nível de ruído, com diferentes valores de  $\chi$  podem ser simulados diversos níveis de ruído. Os números randômicos são gerados com a função RAND do MATLAB.

**Partição de domínio.** Na Figura 2, apresenta-se o domínio empregado, com  $R_0 = 50$  cm, para meios heterogêneos as perturbações são círculos com  $R = 10$  cm e  $R' = 8$  cm. O coeficiente de atenuação no meio, é  $\sigma_a$  e nas perturbações  $\sigma_{a1} = 10\sigma_a$  e  $\sigma_{a2} = 5\sigma_a$  todos em  $cm^{-1}$ . O valor inicial para os coeficiente de atenuação em todos os casos testes foi  $\sigma_0 = 3$ .

O número total de elementos de área que resulta da discretização do domínio, esta relacionada com o número de cones e de rotações (vistas) que forma o sistema. A Figura 3 apresenta a relação entre o número de cones, vistas e elementos de área

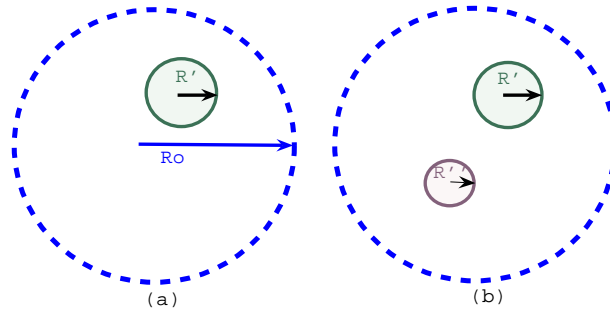


Figura 2: Configurações usadas nos casos testes. (a) Configuração 1: meio com uma deformação. (b) Configuração 2: meio com duas deformações.

gerado pela discretização. Os sistemas a serem resolvidos estão formados por  $E$  incógnitas e  $JN_j$  dados. Em uma partição de 3 vistas e 80 cones tem-se 11172 incógnitas e 240 dados.

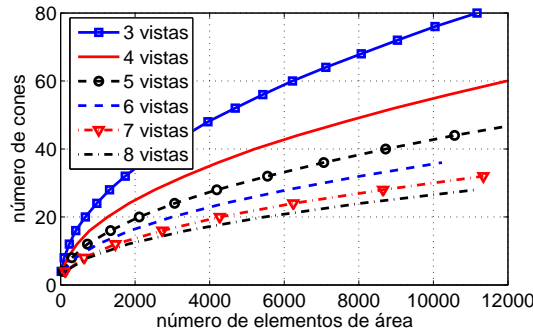
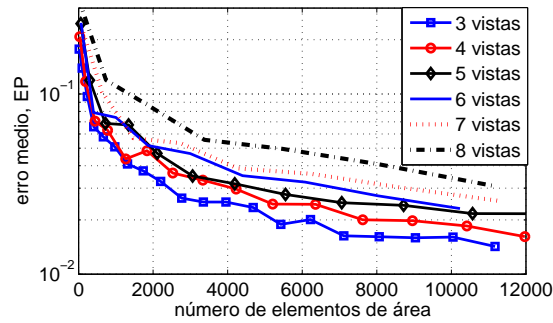


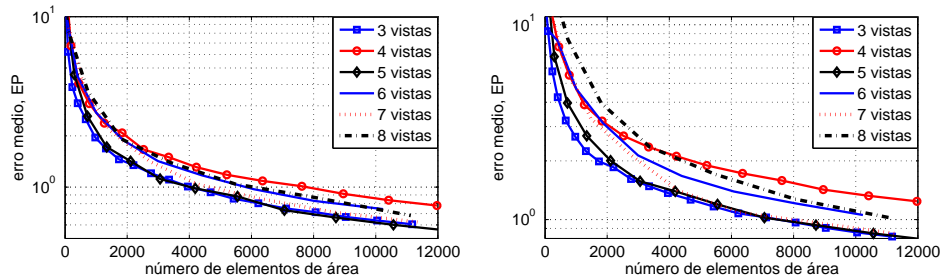
Figura 3: Número de elementos de área *versus* o número de cones e vistas

**Caso Teste 1: Meio Homogêneo.** Considerando, um meio homogêneo com  $\sigma_a = 0,2$ , valor inicial  $\sigma_0 = 3$ , dados com ruído pseudo - randômico até 1 % e empregando o funcional  $\eta_{1,r}$  com  $r = 1$ . As Figuras 4 apresentam o erro quadrático relativo médio ( $EP$ ) da solução do problema inverso calculado para diferentes números de elementos de área em que está particionado o domínio. Observa-se que a maior discretização o  $EP$  diminui. O menor  $EP$  é obtido com a discretização de 3 vistas e 80 cones. O algoritmo converge em 2 iterações para  $\varepsilon = 0.0001$ .

**Caso Teste 2: Meio Heterogêneo.** A melhor discretização. Considerando, as configurações 1 e 2 apresentadas na Figura 2,  $\sigma_a = 0,1$ ,  $\sigma_{a1} = 10\sigma_a$ ,  $\sigma_{a2} = 5\sigma_a$ , e  $\sigma_0 = 3,0$ , dados com ruído pseudo randômico até 1%, para solução do problema inverso emprega-se o funcional  $\eta_{1,r}$  com  $r = 1$ . As Figuras 5 apresentam o erro  $EP$  versus o número de elementos de área gerados para um meio com uma e duas perturbações respectivamente. Observa-se que o  $EP$  desce com o incremento do

Figura 4: Erro médio *versus* número de elementos de área e vistas

número de elementos de área no domínio. O menor  $EP$  é obtidos com 3 e 5 vistas. Para meios heterogêneos considerou-se  $\varepsilon = 0,0005$ .

Figura 5: Erro médio *versus* número de elementos de área. Meio com 1 e 2 perturbações respectivamente.

**Caso Teste 3: Meio Heterogêneo.** O melhor  $r$ . Considerando; as configurações 1 e 2 apresentadas na Figura 2, as partições que geram o maior número de elementos de áreas,  $\sigma_a = 0,1$ ,  $\sigma_{a1} = 10\sigma_a$ ,  $\sigma_{a2} = 5\sigma_a$ ,  $\sigma_0 = 3,0$ , e dados com ruído até 1%. Nas Figuras 6 apresentam-se os  $EP$  variando  $r$  no intervalo  $[0,1-2]$  para um meio com uma e duas perturbações respectivamente. Observa-se que o menor  $EP$  é obtido para  $r = 0,1$  e em um meio particionado por 3 e 5 vistas. Nas Figuras 7 para as configurações 1 e 2 respectivamente apresentam-se os  $EP$  variando  $r$  no intervalo  $[0,1-2]$ , para  $\sigma_a = 0,1, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1$ ,  $\sigma_{a1} = 10\sigma_a$ ,  $\sigma_{a2} = 5\sigma_a$ ,  $\sigma_0 = 3,0$ , dados com ruído randômico até 1% e uma partição de domínio com 3 vistas, o menor  $EP$  também é obtido para  $r = 0,1$ . Observa-se que os  $EP$  não variam com o coeficiente de atenuação a estimar, os  $EP$  variam para diferentes valores de  $r$  e com a percentagem de ruído. O algoritmo converge em 5 iterações.

**Caso Teste 4: Reconstrução com Ruído.** Considerando as configuração 1 da Figura 2,  $\sigma_a = 1,0$ ,  $\sigma_{a1} = 10$ ,  $\sigma_0 = 3,0$  e dados com ruído randômico até 5%. A Figura 8 apresentam a imagem original e a reconstruída da configuração 1 empregando  $r = 0,1$ , e uma partição de 3 vistas e 80 cones. A Figura 9 apresentam

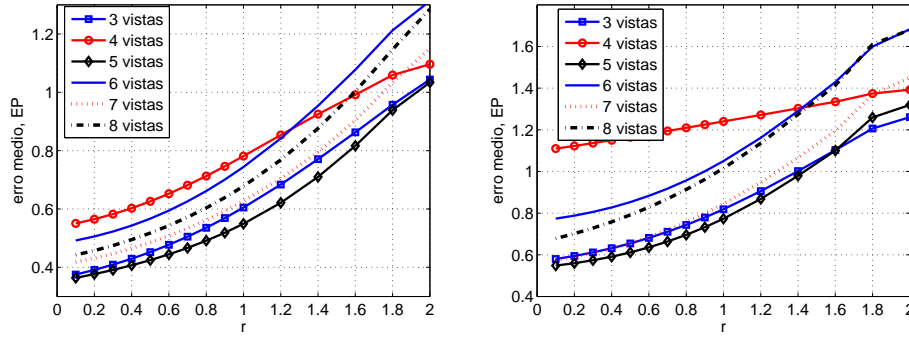


Figura 6: EP *versus*  $r$ . Meio com 1 e 2 perturbações respectivamente.

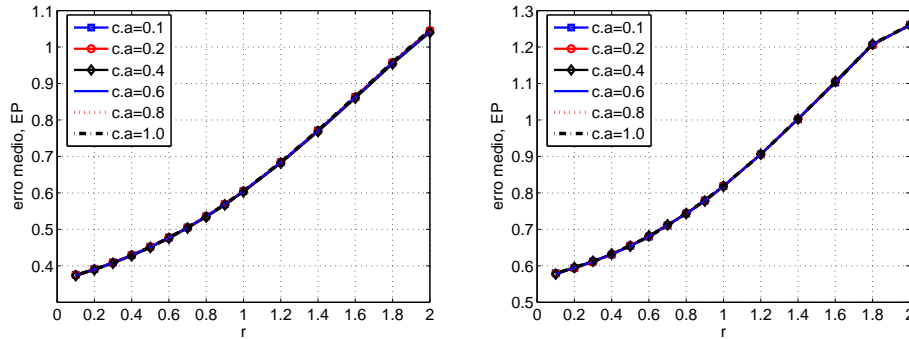


Figura 7: EP *versus*  $r$ . Meio com 1 e 2 perturbações respectivamente

a imagem original e a reconstruída para a configuração 2, considerando 5 % de ruído randômico com  $\sigma_a = 0,1$ ,  $\sigma_{a2} = 1,0$ , e  $\sigma_0 = 3,0$ ,  $r = 0,1$  e a discretização de domínio é de 3 vistas e 80 cones.

## 6. Conclusões

Neste trabalho empregamos o funcional  $\eta_{1,r}$  no algoritmos ART para a reconstrução de imagens, os parâmetros  $r = 0,1$  e  $s \rightarrow 1$  ofereceram os melhores resultados na solução do problema inverso, quando os dados apresentam ruído randômico, superando a função relacionada à entropia de Shannon para  $r = 1$  e  $s \rightarrow 1$ . A melhor partição de domínio é onde obteve-se a melhor estimativa dos coeficientes de atenuação que foi com 3 e 5 vistas. Em todos os casos heterogêneos o algoritmo converge em 5 iterações. Em futuros trabalhos usaremos dados gerados com o método de Monte Carlo.



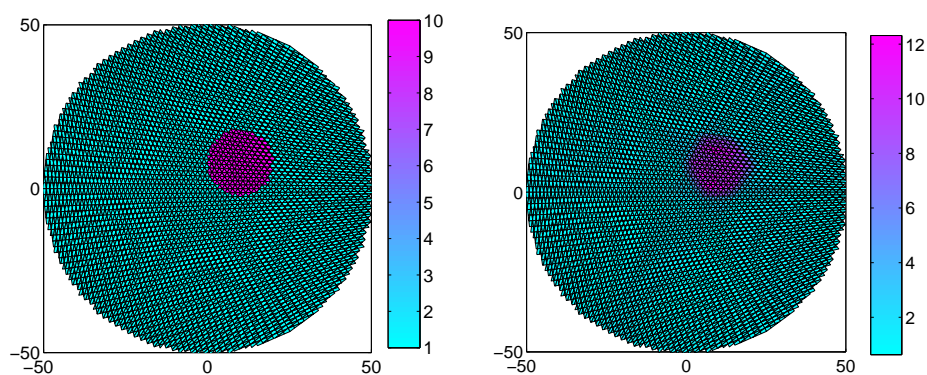


Figura 8: Reconstrução com 3 vistas. Para a configuração 1.  $EP = 0.3715$ .

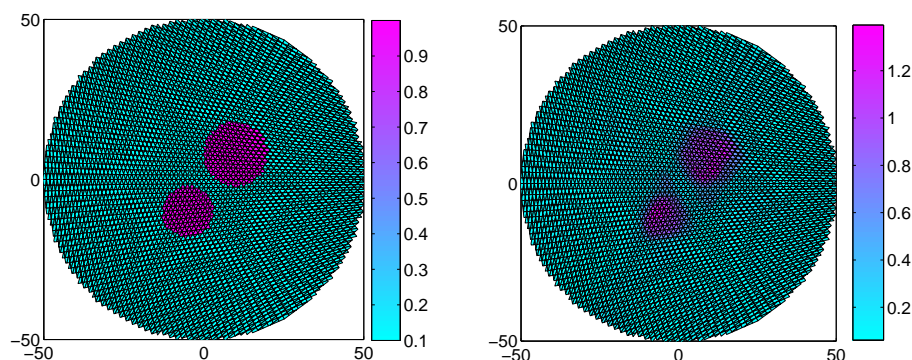


Figura 9: Reconstrução com 3 vistas. Para a configuração 2.  $EP = 0.5877$ .

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. J.P. Zubelli pelo apoio e sugestões para o desenvolvimento deste trabalho. R.F. Carita Montero agradece à CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo suporte financeiro, com o número 30.0024.

**Abstract.** We consider a class of Algebraic Reconstruction Technique (ART) algorithms for the absorption coefficient using certain Bregman functions. The Bregman functional is related to a class of entropies studied by Shannon, Harvda-Charvát and Sharma - Taneja. This functional depends on certain parameters  $r$  and  $s$  and is strictly convex. Using it we build a family of Bregman distances to be used in the ART algorithms for image reconstruction with divergent beams. In this work we seek, the optimal values for the parameter  $r$  when  $s \rightarrow 1$ , the initial guess values and an appropriate discretization of the medium that offers the best results for the absorption coefficient identification.

## Referências

- [1] L.M. Bregman, The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, *USSR Computational and Mathematical Physics Journal*, **7** (1967), 200-217.
- [2] R.F. Carita Montero, N.C. Roberty, A.J. Silva Neto, Absorption coefficient estimation in heterogeneous media using a domain partition consistent with divergent beams, *Inverse Problems in Engineering*, **9** (2001), 587-617.
- [3] D. Dicken, A new approach towards simultaneous activity and attenuation reconstruction in emission tomography, *Inverse Problems*, **15** (1999), 931-960.
- [4] J. Havdra, F. Charvát, Concept of Structural  $\alpha$ -Entropy, *Kybernetika*, **3** (1967), 30-35.
- [5] A.C. Kak, M. Slaney, "Principles of Computerized Tomographic Imaging", IEEE Press, 1988.
- [6] W.A. Kalender, X-Ray computed tomography - State of the art, em "Medical Optical Tomography: Functional Imaging and Monitoring" (R.F. Potter ed.), pp. 11-27, IS11 SPIE Bellingham, Washington, 1993.
- [7] M.L. Reis, N.C. Roberty, Maximum entropy algorithms for image reconstruction from projections, *Inverse Problems*, **8** (1992), 623-644.
- [8] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication. Bell, *System Tech. J.*, **27** (1948), 379-423.
- [9] B.D. Sharma, I.J. Taneja, Entropy of type  $(\alpha, \beta)$  and other generalized measures in information theory, *Metrika*, **22** (1975), 205-215.