

Análise Espectral de um Método Pseudo Espectral para Propagação de Onda com Condições de Fronteira Transparentes

P.C. CALEGARI¹, F.S.V. BAZÁN², Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-900 Florianópolis, SC, Brasil.

Resumo. Apresentamos uma análise espectral de um método para a simulação numérica de propagação de ondas unidimensionais, proposto recentemente por Jackiewicz e Renault em [4]. Os resultados incluem uma fórmula fechada para o auto sistema do operador associado ao problema, um resultado teórico que corrige uma conclusão errônea desses autores e um método numérico para calcular soluções aproximadas. Além disso, destacamos a importância da análise do pseudo espectro do operador do modelo contínuo, assim como o pseudo espectro das matrizes dos modelos discretos correspondentes.

1. Introdução

Problemas de propagação de ondas em domínios extensos ou provavelmente não limitados, são abordados na prática restringindo o domínio para uma região delimitada por fronteiras artificiais, na qual constroem-se soluções aproximadas usando métodos numéricos. Um aspecto crucial do processo é a escolha de condições de fronteira que atenuem as reflexões espúrias da solução numérica, que aparecem como consequência do truncamento do domínio original através de fronteiras artificiais. Condições desse tipo são chamadas de *condições de fronteira absorventes* [2]. As condições de fronteira que evitam completamente as reflexões, são ditas *transparentes* [3, 4].

Neste trabalho continuamos uma investigação de Renault [7], e Jackiewicz e Renault [4], sobre a estabilidade de um método pseudo espectral de Chebyshev para a propagação da onda unidimensional, restrita ao intervalo $[0, 1]$ e com condições de fronteira absorventes. Para tanto, usamos uma reformulação da equação da onda na forma $v_t = \mathcal{A}v$ [2, 4, 6, 12], onde \mathcal{A} é um operador diferencial que não depende de t e definido em um espaço de Hilbert apropriado. Primeiro o método discretiza o operador diferencial produzindo um sistema de EDO's da forma $\dot{v}_N = A_N v_N$, onde A_N é uma matriz associada a discretização das derivadas na variável espacial através de diferenciação de Chebyshev [10], e em seguida constrói soluções numéricas resolvendo o sistema de EDO's através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

¹priscila@mtm.ufsc.br; Mestrado em Matemática e Computação Científica

²fermin@mtm.ufsc.br; CNPq grant 201407/03-5(NV)

Enfatizamos que a estabilidade do sistema semi-discreto depende fortemente da não normalidade do operador \mathcal{A} e que análises baseadas somente no espectro de A_N podem levar a conclusões errôneas sobre a estabilidade das soluções numéricas: é conhecido que para estabilidade das soluções numéricas do sistema semi discreto com tamanho de passo Δt é suficiente que o pseudo espectro da matriz $\Delta t A_N$ pertença à região de estabilidade absoluta do método [5, 6], sendo a convergência da solução, garantida pelo teorema da equivalência de Lax [5, 6, 9].

O trabalho apresenta duas contribuições. Após uma reformulação do problema descrita na Seção 2, a primeira contribuição vem na Seção 3 na qual apresentamos *fórmulas fechadas* para o auto sistema do operador \mathcal{A} que generalizam resultados prévios de Driscoll e Trefethen [2], que consideram uma condição de fronteira Dirichlet na esquerda do domínio e outra absorvente na direita. Uma análise do pseudo espectro do operador também é incluída. A segunda contribuição vem na Seção 4, na qual primeiro descrevemos o método de Jackiewicz e Renaut, e a seguir mostramos teórica e numericamente que um resultado desses autores é incorreto. Incluímos também uma abordagem numérica que apresenta vantagens em relação a proposta desses autores. Na Seção 5, apresentamos algumas considerações finais.

2. Modelo Contínuo

Nesta seção, apresentamos algumas características físicas do problema e a reformulação do problema em um sistema autônomo que usaremos ao longo do trabalho. Vamos considerar a equação da onda, com velocidade constante c :

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $u(x, 0)$ e $u_t(x, 0)$ são condições iniciais do problema. A solução de (2.1) é dada pela fórmula de D'Alembert: $u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct))$. Verifica-se que enquanto o primeiro termo $(x, t) \rightarrow \frac{1}{2} f(x + ct)$, se propaga para a esquerda e satisfaz

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{2} f(x + ct) = 0, \quad (2.2)$$

o segundo termo $(x, t) \rightarrow \frac{1}{2} f(x - ct)$, se propaga para a direita satisfazendo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{2} f(x - ct) = 0. \quad (2.3)$$

O comportamento da solução segundo (2.2) e (2.3) sugere que a solução de (2.1) restrita ao intervalo $[0, 1]$ pode ser encontrada adicionando-se a (2.1) as condições de fronteira

$$\begin{aligned} u_t(0, t) - cu_x(0, t) &= 0 \\ u_t(1, t) + cu_x(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

As condições de fronteira (2.4) são completamente transparentes, isto é, permitem que as ondas atravessem as fronteiras artificiais eliminando completamente o fenômeno de reflexão [3, 4, 1]. A Tabela 1 apresenta diferentes condições de

fronteira (para $x = 0$) usadas freqüentemente em conexão com a equação da onda e seus respectivos coeficientes de reflexão. As condições de fronteira de Dirichlet e Neumann são perfeitamente reflexivas, sendo que na primeira a onda refletida é invertida. Note que $\delta > 0$ define uma família de condições de fronteira absorventes e o caso $\delta < 0$ introduz um termo de fonte, impondo energia ao sistema [3, 1].

Condições de fronteira		Coeficiente de reflexão
Dirichlet	$u = 0$	$R = -1$
Neumann	$u_x = 0$	$R = 1$
Absorventes	$\delta u_t - c u_x = 0$	$R = \frac{1-\delta}{1+\delta}$
Transparentes	$u_t - c u_x = 0$	$R = 0$

Tabela 1: Condições de fronteira \times Coeficiente de reflexão.

Para nossa análise precisamos reformular o problema original. Utilizando as variáveis auxiliares $v_1 = u_t$ e $v_2 = u_x$ obtemos

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x},$$

o que nos leva ao sistema da forma

$$\begin{cases} v_t = \mathcal{A}v, & 0 \leq t \leq T \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad \text{com } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & c^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

sendo \mathcal{A} um operador linear definido em $\mathcal{A} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ e \mathcal{D} é um subespaço denso em \mathcal{H} formado por funções absolutamente contínuas $v = [v_1 \ v_2]^T$, satisfazendo as condições de fronteira absorventes

$$\begin{aligned} v_1(0, t) - c_1 v_2(0, t) &= 0 \\ v_1(1, t) + c_2 v_2(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

com c_1 e c_2 constantes positivas. Note que (2.6) torna-se (2.4) quando $c_1 = c_2 = c$. Observe também que um problema do tipo (2.5), cuja solução é $v(t) = \exp(t\mathcal{A})v(0)$, é bem posto se e somente se para cada t existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|\exp(t\mathcal{A})\| \leq C_1$ para alguma norma $\|\cdot\|$ convenientemente definida, e em particular, se todos os autovalores de \mathcal{A} tem parte real negativa, $\|\exp(t\mathcal{A})\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ [9].

3. Espectro e Pseudo Espectro

A discussão acima mostra que faz-se necessária uma análise espectral do operador \mathcal{A} , tanto para c_1, c_2 arbitrárias, bem como para c_1, c_2 tendendo a c . A seguinte proposição descreve o auto sistema de \mathcal{A} .

Proposição 3.1. *Assuma que $c_1 < c$ e $c_2 < c$. Então os autovalores de \mathcal{A} são*

$$\lambda_n = \frac{c}{2} \ln \left(\frac{(c - c_1)(c - c_2)}{(c + c_1)(c + c_2)} \right) + cn\pi i, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Demonstração. Seja λ um autovalor de \mathcal{A} e $v = [v_1 \ v_2]^T$ a autofunção correspondente. A equação $\mathcal{A}v = \lambda v$ exige que

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} v_1 = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} v_2 = 0,$$

e dessas equações segue que as componentes da autofunção v devem ser da forma

$$v_1(x) = A_1 \exp\left(\frac{\lambda x}{c}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{\lambda x}{c}\right), \quad \text{e} \quad v_2(x) = B_1 \exp\left(\frac{\lambda x}{c}\right) + B_2 \exp\left(-\frac{\lambda x}{c}\right) \quad (3.2)$$

com A_i e B_i a serem determinadas. Agora note que a primeira condição de fronteira em (2.6) implica que $A_1 = cB_1$, $A_2 = -cB_2$ e $B_2 = \left(\frac{c-c_1}{c+c_1}\right) B_1$. A escolha $B_1 = \frac{1}{2}$ implica então que

$$v_1(x) = \frac{c}{c+1} \left(c \sinh \frac{\lambda x}{c} + c_1 \cosh \frac{\lambda x}{c} \right), \quad v_2(x) = \frac{1}{c+c_1} \left(c \cosh \frac{\lambda x}{c} + c_1 \sinh \frac{\lambda x}{c} \right) \quad (3.3)$$

e a segunda condição de fronteira em (2.6) mostra que

$$\exp\left(2\frac{\lambda}{c}\right) = \frac{(c-c_1)(c-c_2)}{(c+c_1)(c+c_2)}, \quad (3.4)$$

o qual verifica (3.1). □

Observação 1. Podemos também transformar o problema (2.1) em um sistema de equações diferenciais ordinárias, definido da seguinte maneira,

$$\begin{cases} w_t = \mathcal{B}w \\ w(0) = w_0 \end{cases}, \quad \text{com } \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e } w = \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

A partir desta formulação, os autovalores de \mathcal{B} são dados por (3.1).

Observação 2. O espectro do operador \mathcal{A} , $\Lambda(\mathcal{A})$, é vazio quando $c_1 = c_2 = c$. Isto pode ser explicado intuitivamente notando que, como as autofunções devem ser da forma (3.3) e já que elas dependem de λ satisfazendo (3.4), conclui-se que não existem autofunções no caso $c_1 = c_2 = c$. Uma demonstração rigorosa deste resultado foge do escopo deste trabalho; ela requer uma análise do operador resolvente $(zI - \mathcal{A})^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$; o leitor interessado pode se direcionar a Driscoll e Trefethen [2].

Da observação 2 segue que análises baseadas somente no espectro de \mathcal{A} podem não ser suficientes para informar o comportamento do sistema no decorrer do tempo. Em casos como este, faz-se necessária a análise do pseudo espectro do operador, conforme segue.

Seja \mathcal{X} um espaço de Banach munido de uma norma $\|\cdot\|$, e $\mathcal{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ um operador linear fechado. Resumidamente, o pseudo espectro de um operador \mathcal{A} é o conjunto de todos os autovalores do operador $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + E$, com $\|E\| < \epsilon$. A definição 3.1 caracteriza formalmente o pseudo espectro de operadores.

Definição 3.1. Dado $\epsilon > 0$, o ϵ -pseudo espectro de \mathcal{A} , $\Lambda_\epsilon(\mathcal{A})$, é o conjunto dos números $z \in \mathbb{C}$, definido equivalentemente por uma das seguintes condições:

i. $\|(z\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}$, \mathcal{I} é o operador identidade.

ii. $z \in \wedge(\mathcal{A} + E)$ para algum operador E , com $\|E\| < \epsilon$.

iii. $z \in \wedge(\mathcal{A})$ ou $\|(z\mathcal{I} - \mathcal{A})u\| < \epsilon$ para algum $u \in D(\mathcal{A})$ com $\|u\| = 1$.

Se $\|(z\mathcal{I} - \mathcal{A})u\| < \epsilon$ como em (iii.), então z é um ϵ -pseudo autovalor de \mathcal{A} e u o ϵ -pseudo autovetor (ou ϵ -pseudo autofunção) correspondente.

Se \mathcal{A} é uma matriz ou operador normal, o ϵ -pseudo espectro $\wedge_\epsilon(\mathcal{A})$ é formado pela união de bolas de raio ϵ centradas nos pontos do espectro de \mathcal{A} . O que implica que os autovalores de \mathcal{A} são insensíveis a pequenas perturbações. Se \mathcal{A} está longe da normalidade, $\wedge_\epsilon(\mathcal{A})$ pode ser muito grande e ter um contorno muito diferente: quanto maior o pseudo espectro, maior a não normalidade do operador [11].

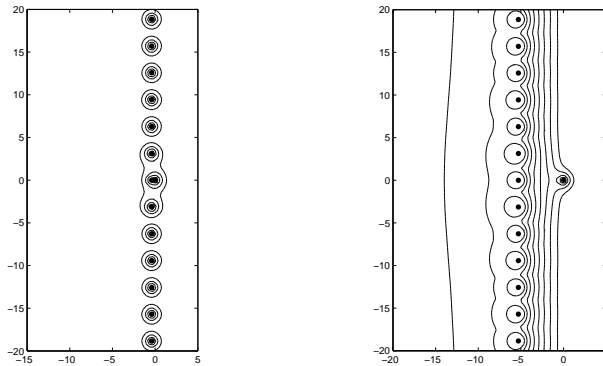


Figura 1: Fronteiras do ϵ -pseudo espectro de \mathcal{A} para $c_1 = c_2 = 0.2$ e $c_1 = c_2 = 0.99$, esquerda e direita respectivamente, com $\epsilon = 10^{-1.4}, 10^{-1.2}, \dots, 10^0$. Os autovalores de \mathcal{A} são denotados por \bullet .

O pseudo espectro de \mathcal{A} definido em (2.5) é apresentado nas Figuras 1 e 2 para o caso em que a constante da equação da onda é $c = 1$ e algumas escolhas de c_1, c_2 . Observe que a medida que $c_1, c_2 \rightarrow c$, na figura 1, o pseudo espectro torna-se mais amplo e a não normalidade do operador \mathcal{A} cresce, i.e., os autovalores do operador tornam-se mal condicionados. Já a Figura 2, apresenta o pseudo espectro do operador para $c = c_1 = c_2$. Nesse caso, os ϵ -pseudo espectros são os semi-planos à esquerda das fronteiras. Os pseudo espectros foram calculados através de um modelo semi discreto de dimensão suficientemente grande, a ser apresentado na próxima seção³.

4. Problema Semi Discreto

O objetivo da seção é analisar algumas versões semi discretas para a problema (2.1) com condições de fronteira absorventes (2.6). Todos os modelos provém de aplicar

³Todos os gráficos sobre pseudo espectro apresentados nesse trabalho, foram construídos usando o pacote EigTool [13].

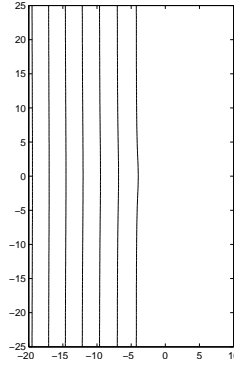


Figura 2: Fronteiras do ϵ -pseudo espectro de \mathcal{A} para $c_1 = c_2 = c = 1$, com $\epsilon = 10^{-7}, 10^{-6}, \dots, 10^{-1}$.

o método pseudo espectral de Chebyshev com pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto como pontos colocação: $x_0 = 0, \dots, x_N = 1$. Um aspecto fundamental do método é o uso da matriz de diferenciação de Chebyshev denotada por D e cujas linhas e colunas são denotadas respectivamente por d_i e l_i^T , $0 \leq i \leq N$. Detalhes sobre diferenciação discreta de Chebyshev podem ser vistos em [10].

O método de Jackiewicz e Renault [4] provém do modelo contínuo (2.5), no qual são apresentadas duas formas de incorporar as condições de fronteira, sendo $D_1 = [d_1, \dots, d_{N-1}]$ e $D_2 = [l_1, \dots, l_{N-1}]^T$. A primeira vem da observação de que se fazemos

$$v_2(x_0, t) = v_1(x_0, t)/c_1, \quad \text{e} \quad v_2(x_N, t) = -v_1(x_N, t)/c_2,$$

e se $w_1 \approx [v_1(x_0, t), \dots, v_1(x_N, t), v_2(x_1, t), \dots, v_2(x_{N-1}, t)]^T$, i.e., w_1 , é o vetor de soluções numéricas nos pontos da malha, então o modelo semi discreto é:

$$\dot{w}_1 = A_1 w_1, \quad \text{com} \quad A_1 = \begin{bmatrix} C & c^2 D_1 \\ D_2 & O_{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

mas, se escolhemos

$$v_1(x_0, t) = c_1 v_2(x_0, t), \quad \text{e} \quad v_1(x_N, t) = -c_2 v_2(x_N, t)$$

e $w_2 \approx [v_1(x_1, t), \dots, v_1(x_{N-1}, t), v_2(x_0, t), \dots, v_2(x_N, t)]^T$, o modelo discreto é

$$\dot{w}_2 = A_2 w_2, \quad \text{com} \quad A_2 = \begin{bmatrix} O_{(N-1) \times (N-1)} & c^2 D_2 \\ D_1 & C \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Em ambos os modelos (4.1) e (4.2), $C = [c d_0, 0, \dots, 0, -c d_N]$ pois $c_1 = c_2 = c$, os 0's representam vetores coluna nulos, $(N + 1) \times 1$ e as matrizes A_1 e A_2 possuem dimensão $2N$.

A estabilidade das soluções numéricas dos modelos pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem foi analisada em [4] onde é determinado numericamente o tamanho de passo $\Delta t = 0.004$, que garante a estabilidade. A determinação do Δt foi

feito a partir do espectro e pseudo espectro de A_1 e A_2 . A conclusão foi que as características de estabilidade das soluções numéricas de ambas as formulações são muito semelhantes, apesar das matrizes terem espectros diferentes (com A_1 tendo autovalores no semi plano direito). Nós concordamos com a primeira afirmação, não com a segunda. A seguinte proposição mostra que essa afirmação é incorreta.

Proposição 4.1. *As matrizes A_1 e A_2 são semelhantes.*

Demonstração. Defina $S = \begin{bmatrix} O_{(N-1) \times (N+1)} & c^2 I_{N-1} \\ I_{N+1} & O_{(N+1) \times (N-1)} \end{bmatrix}$. Segue facilmente que $S^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{(N+1) \times (N-1)} & I_{N+1} \\ \frac{1}{c^2} I_{N-1} & O_{(N-1) \times (N+1)} \end{bmatrix}$ e daí que $A_1 = S^{-1} A_2 S$, como requerido. \square

Note que $c = 1$ produz uma transformação de semelhança que é ortogonal. Nesse caso o pseudo espectro de ambas as matrizes coincidem. Se $c \approx 1$, S é quase normal e nesse caso os pseudo espectros de A_1 e A_2 não devem diferir muito por causa da quase normalidade da transformação de semelhança. Ilustramos este fato na Figura 3 para $c = 0.5$ e $N = 30$.

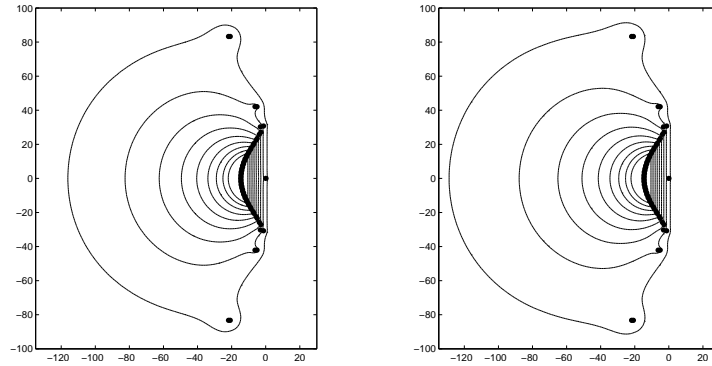


Figura 3: Pseudo espectro de A_1 e A_2 , esquerda e direita respectivamente, com $\epsilon = 10^{-8}, 10^{-7}, \dots, 10^0$.

4.1. Método Proposto

Visto que a abordagem de Jackiewicz e Renaut não calcula deslocamento e sim aproximações para u_t e u_x (que torna-se importante quando procura-se a energia do sistema), apresentamos uma formulação semi discreta que permite o cálculo direto da solução u a cada passo do tempo e que provém da reformulação (3.5) do problema. Para tal, note que a aproximação da derivada espacial de segunda ordem via matriz diferenciação de Chebyshev é $D^2 = DD = d_0 l_0^T + \dots + d_N l_N^T$. Se $\bar{u} = [u(x_0, t), \dots, u(x_N, t)]^T$, em cada ponto da malha podemos escrever

$$\bar{u}_{tt} \approx c^2 [d_0 l_0^T \bar{u} + d_1 l_1^T \bar{u} + \dots + d_{N-1} l_{N-1}^T \bar{u} + c_N d_N^T \bar{u}]. \quad (4.3)$$

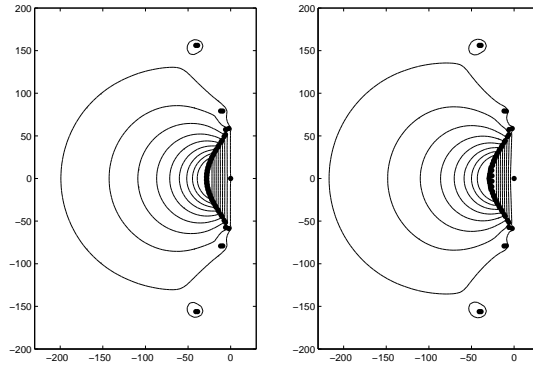


Figura 4: Fronteiras do ϵ -pseudo espectro da matrizes A_1 e L_N , esquerda e direita respectivamente, com $c = 1$, $N = 30$ e $\epsilon = 10^{-8}, 10^{-7}, \dots, 10^0$ (para A_1) e $\epsilon = 10^{-8}, 10^{-7}, \dots, 10^{-2}$ (para L_N).

Mas, já que $l_0^T \bar{u} \approx u_x(x_0, t)$ e $l_N^T \bar{u} \approx u_x(x_N, t)$, das condições de fronteira (2.4) temos que $u_x(x_0, t) = (1/c)u_t(x_0, t)$ e $u_x(x_N, t) = (1/c)u_t(x_N, t)$. Portanto, segue que (4.3) pode ser reescrito como um sistema de EDO's de segunda ordem da forma

$$\bar{u}_{tt} - C\bar{u}_t - c^2\tilde{D}\bar{u} = 0, \quad (4.4)$$

em que $\tilde{D} = d_1 l_1^T + \dots + d_{N-1} l_{N-1}^T$ com C como em (4.2). Considerando as condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$, e transformando o sistema acima para um sistema de primeira ordem, obtemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\bar{v}} = L_N \bar{v} \\ \bar{v}(0) = [f(x_0), \dots, f(x_N), 0_{1 \times N}]^T \end{cases}, \quad L_N = \begin{bmatrix} O & I \\ c^2 \tilde{D} & C \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

em que O e I representam, respectivamente, as matrizes nula e identidade de ordem $N + 1$, e $\bar{v} = [\bar{u} \quad \bar{u}_t]^T$.

Nossa proposta consiste em resolver o sistema semidiscreto (4.5) através do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Note que enquanto L_N é de ordem $2N + 2$, a ordem de A_1 e A_2 é $2N$. A seguinte proposição, cuja demonstração é encontrada em [1], mostra que o espectro de L_N contém basicamente a mesma informação do que o espectro de A_1 .

Proposição 4.2. *Assuma que $c_1 = c_2 = c$. Então o espectro da matriz L_N definida em (4.5) satisfaz*

$$\wedge(L_N) = \wedge(A_1) \cup \{0\}.$$

A Figura, 4 mostra que o pseudo espectro da matriz L_N não difere muito do pseudo espectro de A_1 ou de A_2 . Disso conclui-se que as características de estabilidade das soluções numéricas obtidas a partir de nossa proposta não devem deteriorar.

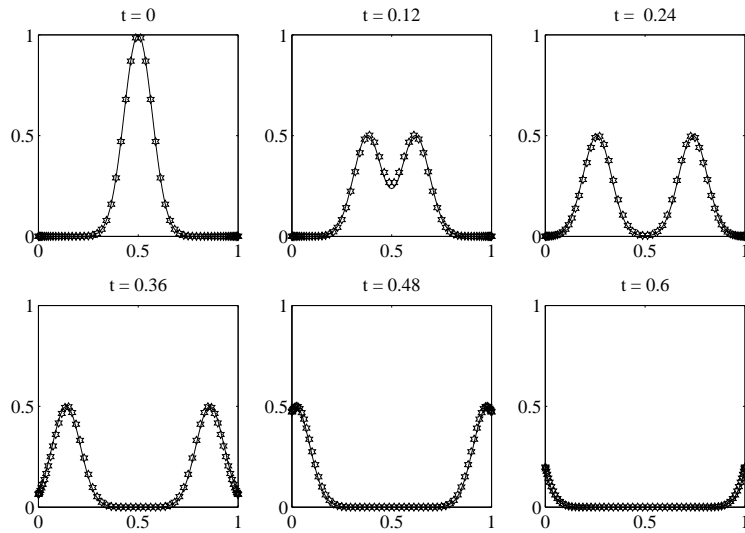


Figura 5: Solução exata u – e solução aproximada v ·, no tempo $t = 0$, $t = 0.15$, $t = 0.45$ e $t = 0.6$, respectivamente.

4.2. Exemplo Numérico

Para testar o método proposto resolvemos o problema com $c = c_2 = c_1 = 1$, condição inicial $u(x, 0) = f(x) \equiv \exp(-100(x-0.5)^2)$, $0 \leq x \leq 1$, e usamos o mesmo tamanho de passo Δt determinado por Jackiewicz e Reanut [4]. Os resultados são apresentados na Figura 5. Note que neste caso, conforme esperado, as reflexões da solução são completamente eliminadas.

5. Considerações Finais

Temos apresentado uma análise espectral de um método para simular a propagação de ondas unidimensionais. Os resultados mais importantes são a descrição de fórmulas fechadas para o auto sistema de um operador associado ao problema, e uma revisão de um método descrito em [4] que permitiu: a) mostrar a falsidade de uma conclusão nesse trabalho, e b) apresentar um método para o problema com praticamente as mesmas características de estabilidade daquele em [4]. A teoria apresentada e a qualidade dos resultados do método foram ilustrados através de simulações numéricas. Nosso próximo passo será estender esses resultados para o caso bi-dimensional. Faz-se necessária uma análise teórica mais profunda sobre a estabilidade do método de Runge Kutta associado ao sistema $\bar{u}_t = L_N \bar{u}$.

Abstract. We present a spectral analysis of a method for numerical simulation of 1D wave propagation recently proposed by Jackiewicz and Renault in [4]. The results include a closed formula for the eigensystem of the operator associated with the problem, a theoretical result that corrects a wrong conclusion in [4], and a

proposal for determining a numerical solution. Numerical results are also included and the importance of a pseudospectral analysis in connection with stability issues is emphasized.

Referências

- [1] P.C. Calegari, “Método Pseudo Espectral de Chebyshev para Problemas de Propagação de Ondas com Condições de Fronteira Absorventes”, Dissertação de Mestrado em Matemática e Computação Científica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis 2007.
- [2] T.A. Driscoll, L.N. Trefethen, Pseudospectra of the wave operator with an absorbing boundary, *J. Comput. Appl. Math.*, **69** (1996), 125-142.
- [3] L. Halpern, A. Rahmouni, “One Way Operators, Absorbing boundary conditions and domain decomposition for wave propagation”, *Modern Methods in Scientific Computing and Applications*, 155-209. A. Bourliex et M.J.Gauder editeurs. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [4] Z. Jackiewicz, R.A. Renaut, A note on stability of pseudospectral methods for wave propagations, *J. Comput. Appl. Math.*, **143** (2002), 127-139.
- [5] S.C. Reddy, L.N. Trefethen, Lax-stability of fully discrete spectral methods via stability regions and pseudo-eigenvalues, *Comput. Meth Appl. Mech. Eng.*, **80** (1990), 147-164.
- [6] S.C. Reddy, L.N. Trefethen, Stability of the method of lines, *Num. Math.*, **62** (1992), 235-267.
- [7] R. Renaut, Stability of a Chebyshev pseudo-spectral solution of the wave equation with absorbing boundaries, *J. Comput. Appl. Math.*, **87** (1997), 243-259.
- [8] R.D. Richtmyer, K.W. Morton, “Difference Methods for Initial-value Problems”, 2nd ed., John Wiley, New York, 1967.
- [9] J.C. Strikwerda, “Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations”, Wadsworth & Brooks, Califórnia, 1989.
- [10] L.N. Trefethen, “Spectral Methods in Matlab”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000.
- [11] L.N. Trefethen, M. Embree, “Spectra e Pseudospectra - The behavior of Non-normal Matrices o Operators”, Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [12] K. Veselić, On linear vibrational systems with one-dimensional damping, *Applicable Anal.*, **29** (1988), 1-18.
- [13] T.G. Wright, “Matlab codes and graphical user interfaces for computation of pseudospectra”, available at <http://www.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen>