TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **8**, No. 2 (2007), 309-318.

Comportamento Assintótico da Equação de Bernoulli-Euler com Dissipação Localizada e Efeito de Inércia Rotacional

C.R.A. da SILVA Jr.[1], Departamento de Acadêmico de Mecânica, UTFPR, Av. Sete de Setembro, 3165, Curitiba, PR, Brasil

R.C. CHARÃO[2], Departamento de Matemática, UFSC, Campus Universitário - Trindade, Florianópolis, SC, Brasil.

Resumo. Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico da energia do problema de valor inicial e de fronteira associado com a equa cão de Bernoulli-Euler com efeito de inércia rotacional e um termo não linear dissipativo localizado em uma vizinhança da fronteira do domínio. O comportamento assintótico da energia no tempo é obtido com taxas de decaimento explícitas. Esse resultado é obtido utilizando-se o lema de Nakao, estimativas de energia via multiplicadores localizados e um argumento de "compacidade-unicidade" baseado no princípio de continuação única. O comportamento assintótico é válido para a equação de Bernoulli-Euler sem efeito de inércia rotacional ou para a equa cão de placas com efeito de inércia rotacional.

1. Introdução

Neste trabalho estuda-se a estabilização da energia associada ao problema de valor inicial e de fronteira, para uma equação de placas do tipo Bernoulli-Euler com termo não linear dissipativo e com efeito de inércia rotacional

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \gamma \Delta u_{tt} - \beta \|\nabla u\|^2 \Delta u + \rho(x, u_t) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com fronteira regular. Os dados iniciais u_0 e u_1 são tomadas tais que $u_0 \in H_0^2(\Omega) \bigcap H^4(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^2(\Omega)$. O termo $\beta\|\nabla u\|^2 \Delta u$ para $n = 1$ descreve o problema de estabilidade elástica (flambagem) dinâmica de uma viga submetida a uma carga axial. Se $n = 2$ o modelo representa uma simplificação

[1]autor do trabalho
[2]colaborador para elaboração do trabalho

do sistema completo de von Kármán que considera apenas efeitos de vibrações transversais não lineares. O efeito de inércia rotacional é representado por $\gamma\Delta u_{tt}$. O termo $\rho = \rho(x, u_t)$ modela fisicamente uma dissipação da energia associada a esse problema. Por exemplo, se $\rho(x,t) = a(x)u_t(x,t)$ então esse termo modela uma dissipação friccional linear, localizada na parte do domínio onde a função $a = a(x)$ é efetiva. No trabalho de F. Alabau-Boussouira [1] este termo dissipativo é localizado em parte da fronteira do problema. Neste trabalho a função $\rho : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

$$
\begin{aligned}
&i)\ \rho(x,s)s \geq 0,\ \ s \in \mathbb{R},\ \ x \in \Omega;\\
&ii)\ \rho \text{ e } \tfrac{\partial\rho}{\partial s} \text{ são contınuas em } \Omega \times \mathbb{R};\\
&iii) \text{ Existem constantes } c_1,\, c_2,\, c_3,\, c_4\ > 0, \text{ e números } r, p \in \mathbb{R}, \text{ com}\\
&-1 < r < \infty \ \text{ e } -1 < p \leq \frac{2}{n-2} \text{ para } n \geq 3 \text{ ou } -1 < p < \infty \text{ se } n = 1\\
&\text{ou } n = 2, \text{tais que :}\\
&c_1\, a(x)\, |s|^{r+1} \ \leq\ |\rho(x,s)|\ \leq\ c_2\, a(x)\, [\, |s|^{r+1} + |s|\,],\ \forall s \in \mathbb{R},\ |s| \leq 1, \forall x \in \Omega,\\
&c_3\, a(x)\, |s|^{p+1} \ \leq\ |\rho(x,s)|\ \leq\ c_4\, a(x)\, [\, |s|^{p+1} + |s|\,],\ \forall s \in \mathbb{R},\ |s| > 1, \forall x \in \Omega;\\
&iv)\ \tfrac{\partial\rho}{\partial s}(x,s) \geq 0,\ \ \forall x \in \Omega,\ \ \forall s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

sendo $a : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $a \in L^\infty(\Omega)$.

A estabilização ou o estudo do comportamento assintótico da energia associada ao problema de valor inicial e de fronteira dado acima é obtida apenas para o caso em que $\gamma = 0$, ou seja sem efeito de inércia rotacional, ou então no caso em que $\beta = 0$. Isso é devido ao fato de não possuir um princípio de continuação única para a equação completa, ou seja para o caso em que γ e β são ambos não nulos. O princípio de continuação única para a equação com $\gamma = 0$, é demonstrado no trabalho de Kim [4]. Para este caso são apresentados resultados sobre estabilização, ver Pazoto e Charão [2]. Para o caso $\beta = 0$ o princípio de continuação única é demonstrado por Gulliver et al [3].

2. Estabilização

Nesta seção é apresentado um teorema contendo os principais resultados sobre a estabilização da energia para o problema de Cauchy associado à equação de Bernoulli-Euler apresentada em (1.1). Esse resultado é demonstrado com base no princípio da continuação única. Para equação de Bernoulli-Euler sem termo de inércia rotacional, isto é, $\gamma = 0$ em (1.1), ou então para a equação (1.1) com $\beta = 0$, ou seja para equação linear de placas. Para a equação completa (γ, $\beta > 0$) não conhecemos na literatura resultado sobre continuação única. Se tal resultado for válido, o teorema de estabilização apresentado neste trabalho será também válido para esse caso. Para localizar a dissipação, tomamos x_o in $\mathbb{R}^n$ e definimos

$$\Gamma\left(x_o\right) = \left\{x \in \partial\Omega :\ (x - x_o) \cdot \nu\left(x\right) \geq 0\right\},$$

onde $\nu\left(x\right)$ denota a normal unitária exterior em $x \in \partial\Omega$.

Agora, seja $\omega \subset \overline{\Omega}$ uma vizinhança de $\Gamma(x_o)$. Então além da hipótese que a função $a = a(x)$ é não negativa, também assumimos que

$$a(x) \geq a_o > 0\,, \quad \text{in } \omega.$$

com a_0 uma constante. Desse modo a função $a = a(x)$ e portanto a dissipação representada pela função $\rho = \rho(x, u_t)$ na equação (1.1) é efetiva somente sobre ω, isto é, a dissipação está localizada sobre ω. Se $x_0 \in int(\Omega)$ então $\Gamma(x_0) = \Gamma$ e ω é uma vizinhança de toda fronteira de Ω.

Teorema 2.1 (Estabilização)**.** *Supor que $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$ e $x_0 \in \Omega$. Então considerando-se as hipóteses feitas em (1.2) sobre as funções $a = a(x)$ e $\rho = \rho(x, s)$, tem-se que a energia associada a solução $u = u(x, t)$ do problema (1.1) tem o seguinte comportamento assintótico no tempo:*

$$E(t) \leq C\,(1+t)^{-\,\delta_i}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

sendo C uma constante positiva (dependendo de $E(0)$) e com taxa de decaimento δ_i definida para os seguintes casos:

Caso I: *Se $r > 0$ e $0 < p \leq \frac{2}{n-2}$ então $\delta_1 = \min\left\{\frac{2}{r}, \frac{8(p+1)}{4-p(n+2)}\right\}$ e $\delta_1 = \frac{2}{r}$ se $p = 0$ ou se $n = 1$ ou 2 e $0 \leq p < +\infty$. Se $r = 0$ e $p > 0$ então $\delta_1 = \frac{8(p+1)}{4-p(n+2)}$.*

Caso II: *Se $r > 0$ e $-1 < p < 0$ então $\delta_2 = \min\left\{\frac{2}{r}, \frac{4}{p(2-n)}\right\}$ e $\delta_2 = \frac{2}{r}$ se $n = 1$ ou 2. Se $r = 0$ então $\delta_2 = \frac{4}{p(2-n)}$.*

Caso III: *Se $-1 < r < 0$ e $0 < p \leq \frac{2}{n-2}$ então $\delta_3 = \min\left\{\frac{2(r+1)}{-r}, \frac{4(p+1)}{p(n-2)}\right\}$ e $\delta_3 = \frac{2(r+1)}{-r}$ se $p = 0$ ou se $n = 1$ ou 2 e $0 \leq p < +\infty$.*

Caso IV: *Se $-1 < r < 0$ e $-1 < p < 0$ então $\delta_4 = \min\left\{\frac{2(r+1)}{-r}, \frac{4}{p(n-2)}\right\}$ e $\delta_4 = \frac{2(r+1)}{-r}$ se $n = 1$ ou 2.*

Observação: Se $r = p = 0$ então a energia decai exponencialmente no tempo (para a equação de Bernoulli-Euler sem o termo de inércia rotacional ver Tucsnack [7] e [8]). O teorema acima mostra o comportamento assintótico da energia associada a solução do problema definido em (1.1) e fornece as taxas expliicitas de decaimento da energia. Para demonstrar a estabilização da energia $E(t)$ deve-se mostrar que $E(t)$ satisfaz uma desigualdade do tipo:

$$E(t)^{1+\xi_i} \;\leq\; C[E(t) - E(t+T)], \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

sendo C uma constante positiva, $T > 0$ está fixo e $\xi_i > 0$ está relacionado com δ_i dado no teorema 2.1. Então, a propriedade de decaimento seguirá do lema de Nakao (ver Nakao [6])

2.1. Identidades de Energia

Para demonstrar o comportamento assintótico da energia torna-se necessário desenvolver algumas identidades de energia. Para isso serão úteis as seguintes funções:

Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^2 tal que

$$\begin{array}{ccc} h(x) = \eta(x) & \text{em} & \Gamma(x_0) \\ h(x) \cdot \eta(x) \geq 0 & \text{em} & \Gamma \\ h(x) = 0 & \text{em} & \Omega \backslash \hat{\omega}, \end{array} \tag{2.3}$$

sendo $\hat{\omega}$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma(x_0) \subset \hat{\omega} \cap \bar{\Omega} \subset \omega$ (para a existência de tal campo h ver Lions [5]).

Seja $m \in W^{2,\infty}(\Omega)$ uma função tal que $\frac{|\nabla m|^2}{m}$ e $\frac{|\Delta m|^2}{m}$ são limitados e

$$\begin{array}{ccc} 0 \leq m \leq 1 & \text{em} & \Omega \\ m = 1 & \text{em} & \tilde{\omega} \\ m = 0 & \text{em} & \bar{\Omega} \backslash \omega, \end{array} \tag{2.4}$$

sendo $\tilde{\omega} \subset \bar{\Omega}$ um aberto em $\bar{\Omega}$ com $\Gamma(x_0) \subset \tilde{\omega} \subset \omega \subset \bar{\Omega}$. Evidentemente, uma tal função $m(x)$ existe (ver Lions [5] e Tucsnak [7], [8]).

Lema 2.1 (Identidades de Energia)**.** *Sejam $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2, $m \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $u = u(x,t)$ a solução de (1.1) e $T > 0$ fixo. Então as seguintes identidades são válidas para todo $t \geq 0$:*

$$\begin{aligned} &\left[\int_\Omega u_t u \, dx\right]_t^{t+T} + \gamma \left[\int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla u \, dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T} \int_\Omega |u_t|^2 \, dxds \\ &+ \int_t^{t+T} \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dxds - \gamma \int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dxds + \beta \int_t^{t+T} \|\nabla u\|^4 \, ds \\ &+ \int_t^{t+T} \int_\Omega \rho(x, u_t) u \, dxds = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+T} \int_\Omega m(x) \left[|\Delta u|^2 - \gamma |\nabla u_t|^2 - |u_t|^2 + \beta \|\nabla u\|^2 |\nabla u|^2 + \rho(x, u_t) u\right] dxds \\ &= \int_t^{t+T} \int_\Omega \Big(\gamma u_t \nabla u_t \cdot \nabla m - \beta \|\nabla u\|^2 u \nabla u \cdot \ \nabla m\Big) dxds \\ &-\gamma \left[\int_\Omega m(x) u \nabla u_t \cdot \nabla u \, dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T} \int_\Omega \Big(u \Delta u \Delta m + 2 \Delta u \nabla u \cdot \nabla m\Big) dxds \\ &- \left\{\int_\Omega [m(x) u u_t + \nabla u_t \cdot \nabla m] \, dx\right\}_t^{t+T}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega u_t(h\cdot\nabla u)\,dx\right]_t^{t+T}+\int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)(h\cdot\nabla u)\,dxds\\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega(\nabla\cdot h)(|u_t|^2-|\Delta u|^2-\beta\|\nabla u\|^2|\nabla u|^2)dxds\\
&+\sum_{i,j=1}^{n,n}\int_t^{t+T}\int_\Omega(2D_ih_jD_iD_ju\Delta u+\beta\|\nabla u\|^2D_ih_jD_iuD_ju)\,dxds\\
&+\gamma\sum_{i,j=1}^{n,n}\int_t^{t+T}\int_\Omega\Big(D_ih_jD_juD_iu_{tt}+h_jD_iD_juD_iu_{tt}\Big)dxds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega(\Delta h\cdot\nabla u)\Delta u\,dxds=\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma(h\cdot\eta)|\Delta u|^2\,d\Gamma ds,
\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega u_t(x-x_0)\cdot\nabla u\,dx\right]_t^{t+T}+\frac{n}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega(|u_t|^2-|\Delta u|^2-\beta\|\nabla u\|^2|\nabla u|^2)dxds\\
&\int_\Omega\rho(x,u_t)[(x-x_0)\cdot\nabla u]\,dxds+\int_t^{t+T}\int_\Omega(2|\Delta u|^2-\gamma|\nabla u_t|^2+\beta\|\nabla u\|^2|\nabla u|^2)dxds\\
&+\gamma\Big(\int_\Omega\nabla u_t\cdot\nabla u\,dxds\Big)_t^{t+T}+\sum_{i,j=1}^{n,n}\int_t^{t+T}\int_\Omega(x_i-x_{0i})D_iD_juD_ju_{tt}dxds\\
&=\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma(x-x_0)\cdot\eta|\Delta u|^2\,d\Gamma ds.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

sendo que h^k indica a k-ésima componente do campo h, $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\Delta h=(\Delta h^1,\cdots,\Delta h^n)$, $\eta=\eta(x)$ é a normal ao ponto $x\in\Gamma$ e x_0 é um ponto de $\mathbb{R}^n$ fixado arbitrariamente.

Demonstração. Essas identidades são obtidas utilizando-se os multiplicadores $M(u)=u$, $M(u)=m(x)u$, $M(u)=h\cdot\nabla u$ e $M(u)=(x-x_0)\cdot\nabla u$, respectivamente. Na identidade (2.7) não aparece o termo de fronteira da integral $\gamma\int_t^{t+T}\int_\Omega\Delta u_{tt}(h\cdot\nabla u)\,dxds$. Para o termo de fronteira tem-se a seguinte identidade,

$$\int_\Gamma\frac{\partial u_{tt}}{\partial\eta}(h\cdot\nabla u)\,d\Gamma=\frac{d}{dt}\left[\int_\Gamma\frac{\partial u_t}{\partial\eta}(h\cdot\nabla u)\,d\Gamma\right]-\int_\Gamma\frac{\partial u_t}{\partial\eta}(h\cdot\nabla u_t)\,d\Gamma=0,$$

pois $u_t(t)\in H_0^2(\Omega)$ para todo $t\in[t,\,t+T]$. A identidade (2.8) é um caso particular da equação (2.7) quando $h(x)=x-x_0$, com $x,x_0\in\mathbb{R}^n$. Em (2.6) não são usadas as propriedades definidas em (2.3) e (2.4) do campo vetorial h e da função $m=m(x)$. □

2.2. Estimativas de Energia

Nesta seção são apresentadas as estimativas necessárias para a prova do lema que será utilizado juntamente com o princípio da continuação única para prova do teorema de Estabilização apresentado na seção. É importante observar que para todas as estimativas que serão realizadas a seguir, a letra C poderá indicar diferentes constantes positivas. A primeira estimativa é dada pelo seguinte lema:

Lema 2.2. *Existe um número $T > 0$ fixo tal que a energia $E = E(t)$ associada a solução $u = u(x,t)$ do problema (1.1) satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$E(t) \leq C\Big[E(t) - E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|\Big(|u| + |\nabla u|\Big)\,dxds$$
$$+ \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2\,dxds + \int_t^{t+T}\int_\Omega\Big(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla u_{tt}|^2\Big)\,dxds\Big],\ \forall\, t > 0,$$

com C uma constante positiva.

Demonstração. Para obter esta estimativa são utilizadas as desigualdades de Young e Poincaré, as propriedades da função $m = m(x)$ e a identidade de energia (2.8). □

Lema 2.3. *Seja $u = u(x,t)$ solução de (1.1) e ΔE definido por $\Delta E \equiv E(t) - E(t+T)$. Então para $T > 0$ dado no lema 2.2 e $\rho = \rho(x,u_t)$ satisfazendo (1.2), tem-se que*

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_t)|[\,|\nabla u| + |u|\,]dxds &\leq C\ (\Delta E)^\sigma\sqrt{E(t)}\\ &+C\ (\Delta E)^\tau\ E(t)^\xi,\end{aligned} \tag{2.9}$$

Caso I: $r \geq 0,\ 0 \leq p \leq \dfrac{2}{n-2}$ *e* $n \geq 3$, *tem-se* $\sigma = \frac{1}{r+2}$, $\tau = \frac{p+1}{p+2}$, $\xi = \frac{4+p(n+2)}{8(p+2)}$.
Se $n = 2$, *a estimativa expressa na equação (2.9) serve para o caso* $r \geq 0$ *e* $p \geq 0$.

Caso II: $r \geq 0,\ -1 < p < 0$ *e* $n \geq 2$, *tem-se* $\sigma = \frac{1}{r+2}$, $\tau = \frac{2}{4+(2-n)p}$, $\xi = \frac{1}{2}$.

Caso III: $-1 < r < 0,\ 0 \leq p \leq \dfrac{2}{n-2}$ *e* $n \geq 3$, *tem-se* $\sigma = \frac{r+1}{r+2}$, $\tau = \frac{p+1}{p+2}$, $\xi = \frac{4-p(n-2)}{4+(p+2)}$. *Se* $n = 2$, *a estimativa é válida para o caso* $-1 < r < 0,\ p \geq 0$.

Caso IV: $-1 < r < 0,\ -1 < p < 0$ *e* $n \geq 2$, *tem-se* $\sigma = \frac{r+1}{r+2}$, $\tau = \frac{2}{4+p(2-n)}$, $\xi = \frac{1}{2}$.

com C uma constante positiva. Para $n = 1$ as estimativas acima são as mesmas que para $n = 2$.

Demonstração. Este lema é demosntrado utilzando-se as propriedades de crescimento da função ρ e as desigualdade de Hölder e Poincaré. □

Proposição 2.1. *Seja $u = u(x,t)$ solução de (1.1) e ΔE dado por $\Delta E \equiv E(t) - E(t+T)$. Para $T > 0$ dado no lema 2.2 e $\rho = \rho(x,u_t)$ satisfazendo (1.2) então a energia associada com (1.1) satisfaz*

$$\begin{aligned}E(t) &\leq C\Big[D_i(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2dxds\\ &+\int_t^{t+T}\int_\Omega\Big(|u| + |\nabla u|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla u_{tt}|^2\Big)dxds\Big],\quad \text{com}\ \ i \in \{1,2,3,4\}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Caso I: *$r \geq 0$ e $0 \leq p \leq \dfrac{2}{n-2}$ $(0 \leq p < \infty$ se $n = 2)$ tem-se* $D_1(t)^2 = \Delta E + (\Delta E)^{\frac{2}{r+2}} + (\Delta E)^{\frac{8(p+1)}{12+p(6-n)}}$;

Caso II: *$r \geq 0$ e $0 \leq p \leq \dfrac{2}{n-2}$ $(0 \leq p < \infty$ se $n = 2)$ tem-se* $D_2(t)^2 = \Delta E + (\Delta E)^{\frac{4}{3(r+2)}} + (\Delta E)^{\frac{4}{12+3p(2-n)}}$;

Caso III: *$r \geq 0$ e $-1 \leq p < 0$ tem-se* $D_3(t)^2 = \Delta E + (\Delta E)^{\frac{2(r+1)}{r+2}} + (\Delta E)^{\frac{8(p+1)}{12+p(6-n)}}$;

Caso IV: *$-1 < r < 0$ e $0 \leq p \leq \dfrac{2}{n-2}$ $(0 \leq p < \infty$ se $n = 2)$ tem-se* $D_4(t)^2 = \Delta E + (\Delta E)^{\frac{2(r+1)}{r+2}} + (\Delta E)^{\frac{4}{12+3p(2-n)}}$.

Para $n = 1$ as estimativas acima são as mesmas que para $n = 2$.

Demonstração. Estes resultados são obtidos combinando-se os lemas (2.2) e (2.3) e a desigualdade de Young. $\square$

Proposição 2.2. *Supor que $x_0 \in int(\bar{\Omega})$ e que $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$. Então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega [\,|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla u_{tt}|^2\,]dxds \\ \leq C\left[D_i(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2 dxds\right],\end{aligned} \tag{2.11}$$

sendo $u = u(x,t)$ solução de (1.1) para dados iniciais u_0 e u_1 satisfazendo $E(0) \leq R$, $R > 0$ fixado, com $C = C(R)$ e $D_i = D_i(t)$ definido na proposição 2.1.

Demonstração. A estimativa acima é obtida por contradição utilizando-se para isso o princípio de continuação única. $\square$

3. Demonstração do Teorema de Estabilização

Para provar o resultado do teorema 2.1 é suficiente considerar que $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$. Das proposições 2.1 e 2.2 tem-se

$$E(t) \leq C\left[D_i(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2 dxds\right], \tag{3.1}$$

com $D_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, dados no a proposição 2.1. Para derivar a estimativa de decaimento deve-se estimar o último termo do integrando de (3.1)

$$E(t) \leq C\left[D_i(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} \frac{a(x)}{a_0}|u_t|^2 dxds + \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} \frac{a(x)}{a_0}|u_t|^2 dxds\right], \tag{3.2}$$

com $D_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, dados na proposição 2.3 e $\Omega_1 = \{x \in \Omega \,|\, |u_t(x,0)| \leq 1\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega \,|\, |u_t(x,0)| > 1\}$. A seguir será demonstrado o **Caso II** do teorema

de estabilização, os demais casos são análogos.
Caso II: $r > 0$ e $-1 \le p < 0$.

$$\int_t^{t+T}\int_\omega a(x)|u_t|^2 dxds = \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2 dxds + \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^2 dxds. \quad (3.3)$$

Para a primeira integral dada na equação (3.3) pode-se obter uma estimativa utilizando-se a desigualdade de Hölder

$$\int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2 dxds \le \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} \frac{a(x)}{a_0}|u_t|^2 dxds + \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} \frac{a(x)}{a_0}|u_t|^2 dxds. \quad (3.4)$$

A integral $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2 dxds$ pode ser estimada utilizando-se da estimativa expressa em (3.4)

$$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1} a(x)|u_t|^2 dxds \le C(\Delta E)^{\frac{2}{r+2}}, \quad (3.5)$$

com $C > 0$ dependendo de $|\Omega|$, r, $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ e c_1. Para estimar a segunda integral da equação (3.4) será utilizado o fato de que $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^\alpha(\Omega))$. Para obter α será utilizado resultados de imersão $m = 1$, $p = 2$ e $n \ge 3$ $mp = 1.2 < 3 \;\to\; \alpha = \dfrac{2n}{n-2}$. Desta forma tem-se que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \Rightarrow L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega))$.

$$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^2 dxds = \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^\lambda |u_t|^{2-\lambda} dxds. \quad (3.6)$$

A desigualdade de Hölder será utilizada na equação (3.6), com $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 1$ e fazendo-se $l' = \frac{p+2}{\lambda}$ e $l = \frac{2n}{(2-\lambda)(n-2)}$.

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} a(x)|u_t|^\lambda |u_t|^{2-\lambda} dxds \le \\ &\left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |a(x)u_t^\lambda|^{l'} dxds\right]^{\frac{1}{l'}} \left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |u_t|^{(2-\lambda)l} dxds\right]^{\frac{1}{l}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Observando que $\lambda l' = p + 2$ a primeira integral de (3.7)

$$\left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |a(x)u_t^\lambda|^{l'} dxds\right]^{\frac{1}{l'}} = \left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2} |a(x)|^{l'} |u_t|^{p+2} dxds\right]^{\frac{1}{l'}}. \quad (3.8)$$

Notando que

$$|a(x)|^{l'} = |a(x)|^{\frac{p+2}{\lambda}} \frac{|a(x)|}{|a(x)|} \le \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)}^{p+2}}{a_0} |a(x)|. \quad (3.9)$$

Substituindo-se a estimativa expressa em (3.8) na desigualadade (3.9) tem-se

$$\left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}|a(x)u_t^{\lambda}|^{l'}dxds\right]^{\frac{1}{l'}} \leq C\left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}|a(x)||u_t|^{p+2}dxds\right]^{\frac{1}{l'}}, \tag{3.10}$$

a constante C depende de $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$, a_0, p, l' e λ. A segunda integral de (3.8) é estimada observando-se que $(2-\lambda)l = \frac{2n}{n-2}$ e utilizando-se o seguinte resultado de imersão com $m.p = 1.2 < 3$ então $H_0^1(\Omega_2) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_2)$

$$\begin{aligned} \|u_t(t)\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_2)} &\leq C\,\|u_t(t)\|_{H_0^1(\Omega_2)} = \left[\int_{\Omega_2}(|u_t|^2+|\nabla u_t|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{\Omega}(|u_t|^2+|\nabla u_t|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq CE(t)^{\frac{1}{2}} \leq CE(0)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Integrando-se a estimativa dada em (3.11) no intervalo $(t,\, t+T)$ tem-se

$$\int_t^{t+T}\|u_t(s)\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_2)}\,ds \leq CTE(0)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

A segunda integral da equação (3.3) é estimada como

$$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)|u_t|^2dxds \leq CTE(0)^{\frac{1}{2}}\left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)|u_t|^{\lambda l'}dxds\right]^{\frac{1}{l'}}. \tag{3.13}$$

Notando que $l' = \frac{p+2}{\lambda}$ e $\lambda = \frac{4(p+2)}{4+p(2-n)}$ então $l' = \frac{4+p(2-n)}{4}$,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)|u_t|^2dxds &\leq CTE(0)^{\frac{1}{2}}\left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}a(x)|u_t|^{p+2}dxds\right]^{\frac{4}{4+p(2-n)}} \\ &\leq C\left[\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2}\rho(x,u_t)u_tdxds\right]^{\frac{4}{4+p(2-n)}} = C\Delta E^{\frac{4}{4+p(2-n)}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Substituindo-se as estimativas dadas em (3.5) e (3.14) na estimativa expressa em (3.2) obtém-se

$$E(t) \leq C\left[D_2(t)^2 + (\Delta E)^{\frac{2}{r+2}} + (\Delta E)^{\frac{4}{4+p(2-n)}}\right]. \tag{3.15}$$

Para $r \leq 0$, $-1 \leq p \leq 0$ e $n > 2$ da proposição 2.3 tem-se

$$D_2(t)^2 = \Delta E + (\Delta E)^{\frac{2}{r+2}} + (\Delta E)^{\frac{4}{4+p(2-n)}}. \tag{3.16}$$

Colocando-se a equação (3.16) na estimativa (3.14)

$$E(t) \leq C\left[\Delta E + (\Delta E)^{\frac{2}{r+2}} + (\Delta E)^{\frac{4}{4+p(2-n)}}\right]. \tag{3.17}$$

Definindo-se $K_2 = min\left\{\dfrac{2}{r+2}, \dfrac{4}{4+p(2-n)}\right\}$ e da estimativa acima tem-se que

$$\sup_{t\leq s\leq t+T} E(s)^{\frac{1}{K_2}} \leq C\Delta E. \tag{3.18}$$

Observando-se que $\dfrac{1}{K_2} > 1 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{K_2} = 1+\xi$, resolvendo-se para ξ tem-se $\xi = \dfrac{1-K_2}{K_2}$. Fazendo-se $\delta_2 = \dfrac{1}{\xi}$ e aplicando-se o lema de Nakao obtém-se a prova do teorema para o **Caso II** com a seguinte taxa de decaimento de energia $\delta_2 = min\left\{\dfrac{2}{r}, \dfrac{4}{p(2-n)}\right\}$.

Referências

[1] F. Alabau-Boussouira, Convexity and Weighted Integral Inequalities for Energy Decay Rates of Nonlinear Dissipative Hyperbolic Systems, *Applied Mathematics and Optimization*, **51**, (2005), 67-91.

[2] R.C. Charão, E. Bisognin, V. Bisognin, A.F. Pazoto, Asymptotic behavior of a Bernoulli-Euler type equation with nonlinear localized damping, *Contributions to Nonlinear Analysis - Progress in nonlinear partial differential equations and their applications*, **66**, (2005), 67-91.

[3] R. Gulliver, I. Lasiecka, W. Littman, R. Triggiani, The Case for Differential Geometry in the Control of Single and Coupled PDES: The Structural Acoustic Chamber, *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, **137**, (2004), 73-182.

[4] J.U. Kim, A unique continuation property of a beam equation with variable coefficients, in estimation and control of distributed parameter sustems, *International Series of Numerical Mathematics*, **100**, (1991), 197-205.

[5] J.L. Lions, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.*, **30**,(1988), 1-68.

[6] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, *Math. Ann.*, **305**, (1996), 403-417.

[7] M. Tucsnak, Semi-internal stabilization for a non-linear Bernoulli-Euler equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **19**, (1996), 897-907.

[8] M. Tucsnak, Stabilization of Bernoulli-Euler beam by means of a pointwise feedback force, *SIAM J. Control Optim.*, **39**, (2000) 1160-1181.