

Fluxo de Gases em Microcanais: um Estudo da Influência de Coeficientes de Acomodação

M. CAMARGO¹, C.H. KAMPHORST², P. RODRIGUES³, URI/FW, 98400-000
Frederico Westphalen, RS, Brasil.

Resumo. Neste trabalho, busca-se fazer uma análise referente à influência do coeficiente de acomodação no comportamento do fluxo de gases em microcanais planos. Para tanto, visando à obtenção de dados numéricos, será utilizado o método de ordenadas discretas aplicado à problemas clássicos da dinâmica de gases rarefeitos, definidos de acordo com o modelo BGK, da equação linearizada de Boltzmann.

1. Introdução

Embora sejam recentes as pesquisas voltadas ao desenvolvimento de sistemas envolvendo microcanais, são diversas as aplicações que necessitam desta tecnologia, a exemplo dos aparelhos portáteis de dosagem de colesterol e glicose no sangue, sensores das injeções eletrônicas e acelerômetros de airbags de automóveis, dispositivos de impressoras a jato-de-tinta e discos magnéticos de computadores [7]. Todos estes dispositivos caracterizam-se pelas suas microdimensões, nos quais os efeitos de superfície são mais relevantes.

Uma das formas de caracterizar tais superfícies é através dos coeficientes de acomodação, que caracterizam-se como parâmetros que buscam descrever as interações entre as moléculas e a parede. Esses coeficientes são representados por valores que variam entre 0 e 1, sendo proporcionais à quantidade de energia ou de momento dissipada durante as colisões e dependem basicamente das propriedades físicas da parede e do gás.

A necessidade do uso de coeficientes de acomodação distintos para modelar problemas envolvendo o fluxo de gases rarefeitos em microcanais foi evidenciada por Cercignani et al. [6], sendo que o método variacional foi utilizado na obtenção dos resultados numéricos para o problema de Poiseuille. No presente trabalho buscam-se soluções em ordenadas discretas para alguns problemas clássicos da dinâmica de gases rarefeitos [1], em canal plano, com o intuito de realizar uma análise para identificar possíveis conseqüências ao fluxo do gás, decorrentes do fato de se ter paredes com propriedades físicas diferentes.

¹mariza@fw.uri.br

²carmo@fw.uri.br

³patricia@fw.uri.br

2. Formulação Matemática

Visando à realização da referida análise buscam-se soluções em ordenadas discretas para os problemas de fluxo de Poiseuille, fluxo de Couette e creep térmico, em canal plano, definidos de acordo com o modelo BGK [4] da equação linearizada de Boltzmann. As formulações matemáticas para os problemas citados, apresentadas a seguir, seguem as Refs. [1] e [10], porém com a utilização de coeficientes de acomodação distintos.

2.1. Fluxo de Poiseuille

Fluxo de Poiseuille é um termo usado para descrever o movimento de um fluido que sofre influência de um gradiente de pressão. De acordo com as Refs. [1], [3] e [11], o problema do fluxo de Poiseuille para gases rarefeitos entre placas planas, situadas em $-a$ e a , pode ser definido, de forma auxiliar, a partir do modelo BGK [4] da equação de Boltzmann linearizada, do seguinte modo:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} Y(\tau, \xi) + Y(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) Y(\tau, u) du, \quad (2.1)$$

para $\tau \in (-a, a)$ e $\xi \in (-\infty, \infty)$, com condições de contorno

$$Y(-a, \xi) - (1 - \alpha_1)Y(-a, -\xi) = \alpha_1 \xi^2 + a\xi(2 - \alpha_1) \quad (2.2)$$

e

$$Y(a, -\xi) - (1 - \alpha_2)Y(a, \xi) = \alpha_2 \xi^2 + a\xi(2 - \alpha_2), \quad (2.3)$$

sendo que $\xi \in (0, \infty)$ e α_1 e α_2 representam os coeficientes de acomodação definidos em $(0, 1]$. Denota-se aqui

$$\psi(u) = \pi^{-1/2} e^{-u^2} \quad (2.4)$$

e ainda $2a$ é a espessura adimensional do canal. Usando as definições da Ref. [9], busca-se calcular o perfil de velocidade macroscópica

$$q_P(\tau) = \frac{1}{2}(1 - a^2 + \tau^2) - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) Y(\tau, u) du, \quad (2.5)$$

e a taxa de fluxo

$$Q_P = -\frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a q_P(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

2.2. Fluxo de Couette

Fluxo de Couette é uma terminologia usada para descrever o movimento de um gás entre corpos que se movem. De acordo com a Ref. [1], o problema de Couette pode ser formulado, de modo auxiliar, como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} Y(\tau, \xi) + Y(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) Y(\tau, u) du, \quad (2.7)$$

para $\tau \in (-a, a)$ e $\xi \in (-\infty, \infty)$, com condições de contorno

$$Y(-a, \xi) - (1 - \alpha_1)Y(-a, -\xi) = \alpha_1 \quad (2.8)$$

e

$$Y(a, -\xi) - (1 - \alpha_2)Y(a, \xi) = -\alpha_2, \quad (2.9)$$

com $\xi \in (0, \infty)$ e α_1 e α_2 representam os coeficientes de acomodação definidos em $(0, 1]$. Para este problema deseja-se calcular o valor da tensão de cisalhamento [1]

$$P_{xz} = \pi^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)Y(\tau, u)udu. \quad (2.10)$$

2.3. Creep Térmico

Creep térmico é um termo utilizado para descrever um efeito de superfície que surge quando há um gradiente de temperatura que faz com que o fluido se movimente com relação à parede fixa. De acordo com a Ref. [1], o problema creep térmico pode ser formulado na seguinte forma auxiliar

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} Y(\tau, \xi) + Y(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)Y(\tau, u)du, \quad (2.11)$$

para $\tau \in (-a, a)$ e $\xi \in (-\infty, \infty)$, com condições de contorno

$$Y(-a, \xi) - (1 - \alpha_1)Y(-a, -\xi) = \frac{1}{2}\alpha_1(\xi^2 - \frac{1}{2}) \quad (2.12)$$

e

$$Y(a, -\xi) - (1 - \alpha_2)Y(a, \xi) = \frac{1}{2}\alpha_2(\xi^2 - \frac{1}{2}), \quad (2.13)$$

para $\xi \in (0, \infty)$ e α_1 e α_2 representam os coeficientes de acomodação definidos em $(0, 1]$. Tal como no problema do fluxo de Poiseuille, seguem-se aqui as definições da Ref. [1], em que busca-se calcular o perfil de velocidade macroscópica

$$q_T(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)Y(\tau, u)du, \quad (2.14)$$

e a taxa de fluxo

$$Q_T = -\frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a q_T(\tau)d\tau. \quad (2.15)$$

3. O Método de Ordenadas Discretas

Para obtenção de uma solução em ordenadas discretas dos problemas formulados na seção 2, observa-se, então, que a função característica dada pela equação (2.4), é uma função par e, seguindo Barichello e Siewert [3], o termo integral da equação

(2.1) pode ser reescrito como sendo uma integral no semi-intervalo. Assim, pode-se escrever as equações em ordenadas discretas na forma

$$\xi_i \frac{d}{d\tau} Y(\tau, \xi_i) + Y(\tau, \xi_i) = \sum_{k=1}^N w_k \psi(\xi_k) [Y(\tau, \xi_k) + Y(\tau, -\xi_k)] \quad (3.1)$$

e

$$-\xi_i \frac{d}{d\tau} Y(\tau, -\xi_i) + Y(\tau, -\xi_i) = \sum_{k=1}^N w_k \psi(\xi_k) [Y(\tau, \xi_k) + Y(\tau, -\xi_k)], \quad (3.2)$$

para $i = 1, \dots, N$. Nas equações (3.1) e (3.2) tem-se que os N pontos de quadratura ξ_i e os N pesos w_i estão definidos no intervalo de integração $[0, \infty)$.

Procurando soluções do tipo exponenciais para as equações (3.1) e (3.2), substituem-se nestas equações as soluções elementares

$$Y(\tau, \pm \xi_i) = \phi(\nu, \pm \xi_i) e^{-\tau/\nu}, \quad (3.3)$$

onde ν é a constante de separação e as funções ϕ denotam as componentes independentes da parte espacial das soluções elementares.

Substituindo nas equações (3.1) e (3.2) a expressão (3.3), obtém-se as seguintes equações em forma matricial

$$\frac{1}{\nu} \mathbf{M} \Phi_+(\nu) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}) \Phi_+(\nu) - \mathbf{W} \Phi_-(\nu) \quad (3.4)$$

e

$$-\frac{1}{\nu} \mathbf{M} \Phi_-(\nu) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}) \Phi_-(\nu) - \mathbf{W} \Phi_+(\nu), \quad (3.5)$$

sendo que

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N\}, \quad (3.6)$$

$$\Phi_{\pm}(\nu) = [\phi(\nu, \pm \xi_1), \phi(\nu, \pm \xi_2), \dots, \phi(\nu, \pm \xi_N)]^T, \quad (3.7)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $N \times N$ e os elementos da matriz \mathbf{W} , de posto um, são dados pela expressão

$$(\mathbf{W})_{i,j} = w_j \psi(\xi_j), \quad (3.8)$$

onde w_j denotam os pesos da quadratura.

Pela adição e subtração das equações (3.4) e (3.5) obtém-se ainda as equações

$$\frac{1}{\nu} \mathbf{M} [\Phi_+(\nu) - \Phi_-(\nu)] = (\mathbf{I} - 2\mathbf{W}) [\Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu)] \quad (3.9)$$

e

$$\frac{1}{\nu} \mathbf{M} [\Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu)] = \Phi_+(\nu) - \Phi_-(\nu). \quad (3.10)$$

Segundo a abordagem analítica sugerida por Barichello e Siewert [3], substitui-se a expressão (3.10) na equação (3.9), obtendo deste modo

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}\mathbf{U} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{M}\mathbf{U}, \quad (3.11)$$

onde

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{\Phi}_-(\nu) \quad (3.12)$$

e

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\xi_1^{-2}, \xi_2^{-2}, \dots, \xi_N^{-2}\}. \quad (3.13)$$

Buscando obter matrizes simétricas, define-se uma matriz \mathbf{T} cujos elementos T_i são tais que

$$T_i \sqrt{w_j \psi(\xi_j)} = T_j \sqrt{w_i \psi(\xi_i)}, \quad (3.14)$$

para $i, j = 1, \dots, N$. Multiplicando a equação (3.11) por essa matriz diagonal \mathbf{T} obtém-se

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{V})\mathbf{X} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{X}, \quad (3.15)$$

onde

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}^{-1} \quad (3.16)$$

é uma matriz simétrica de posto um, e

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{U}. \quad (3.17)$$

Assim o problema de autovalores dado pela equação (3.15), pode ser reescrito na forma

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{z}\mathbf{z}^T)\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}, \quad (3.18)$$

onde $\lambda = 1/\nu^2$ e

$$\mathbf{z} = \left[\frac{\sqrt{w_1 \psi(\xi_1)}}{\xi_1}, \frac{\sqrt{w_2 \psi(\xi_2)}}{\xi_2}, \dots, \frac{\sqrt{w_N \psi(\xi_N)}}{\xi_N} \right]^T. \quad (3.19)$$

Nota-se que o problema de autovalores definido na equação (3.18) apresenta uma forma bastante simplificada, que inclusive é utilizada no contexto do método "Divide and Conquer" [8] para matrizes tridiagonais.

Considerando que tenha-se encontrado os autovalores pela equação (3.18), impõe-se a condição de normalização

$$\sum_{\kappa=1}^N w_\kappa \psi(\xi_\kappa) [\phi(\nu, \xi_\kappa) + \phi(\nu, -\xi_\kappa)] = 1 \quad (3.20)$$

e escreve-se a solução em ordenadas discretas como

$$Y(\tau, \pm\xi_i) = \sum_{j=1}^N \left[A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \xi_i} e^{-(a+\tau)/\nu_j} + B_j \frac{\nu_j}{\nu_j \pm \xi_i} e^{-(a-\tau)/\nu_j} \right], \quad (3.21)$$

sendo que as constantes arbitrárias $\{A_j\}$ e $\{B_j\}$, podem ser determinadas pelas condições de contorno do problema e as constantes de separação $\{\nu_j\}$ são o recíproco das raízes quadradas positivas dos autovalores definidos pela equação (3.18). Nota-se ainda que as soluções elementares em (3.3) ficam analiticamente definidas. Uma abordagem numérica para esta problematização encontra-se na Ref. [10].

Lembrando que os problemas apresentados aqui são conservativos, uma vez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) d\xi = 1, \quad (3.22)$$

espera-se que um dos autovalores definidos pela equação (3.18) tenda a zero quando N tender ao infinito [5]. Levando em conta este fato, negligencia-se a maior constante de separação entre as $\{\nu_j\}$ computadas, reescrevendo a equação (3.21) como

$$Y(\tau, \pm\xi_i) = A + B(\tau \mp \xi_i) + \sum_{j=1}^{N-1} \left[A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \xi_i} e^{-(a+\tau)/\nu_j} + B_j \frac{\nu_j}{\nu_j \pm \xi_i} e^{-(a-\tau)/\nu_j} \right]. \quad (3.23)$$

Para definir as constantes A , B , $\{A_j\}$ e $\{B_j\}$ substitui-se a equação (3.23) nas condições de contorno avaliadas nos pontos de quadratura $\{\mu_i\}$, gerando o seguinte sistema de equações algébricas lineares

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left\{ A_j \nu_j \left[\frac{\alpha_1 \nu_j + \xi_i(2 - \alpha_1)}{\nu_j^2 - \xi_i^2} \right] + B_j \nu_j \left[\frac{\alpha_1 \nu_j - \xi_i(2 - \alpha_1)}{\nu_j^2 - \xi_i^2} \right] e^{-2a/\nu_j} \right\} + \alpha_1 A - B[\alpha_1 a + \xi_i(2 - \alpha_1)] = F_1(\xi_i) \quad (3.24)$$

e

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left\{ A_j \nu_j \left[\frac{\alpha_2 \nu_j - \xi_i(2 - \alpha_2)}{\nu_j^2 - \xi_i^2} \right] e^{-2a/\nu_j} + B_j \nu_j \left[\frac{\alpha_2 \nu_j + \xi_i(2 - \alpha_2)}{\nu_j^2 - \xi_i^2} \right] \right\} + \alpha_2 A + B[\alpha_2 a + \xi_i(2 - \alpha_2)] = F_2(\xi_i), \quad (3.25)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Observa-se que

$$F_1(\xi_i) = \alpha_1 \xi_i^2 + a(2 - \alpha_1)\xi_i \quad \text{e} \quad F_2(\xi_i) = \alpha_2 \xi_i^2 + a(2 - \alpha_2)\xi_i \quad (3.26)$$

para o fluxo de Poiseuille,

$$F_1(\xi_i) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad F_2(\xi_i) = -\alpha_2 \quad (3.27)$$

para o fluxo de Couette e

$$F_1(\xi_i) = \frac{1}{2}\alpha_1(\xi_i^2 - \frac{1}{2}) \quad \text{e} \quad F_2(\xi_i) = \frac{1}{2}\alpha_2(\xi_i^2 - \frac{1}{2}) \quad (3.28)$$

para o Creep Térmico.

A resolução do sistema formado pelas equações (3.24) e (3.25) determina completamente a solução em ordenadas discretas para os problemas descritos.

Tabela 1: Taxa de Fluxo de Poiseuille para $2a = 0.01$

α_1	$\alpha_2 = 0.1$	$\alpha_2 = 0.3$	$\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.9$
0.1	31.05221	16.80376	11.16105	8.015868	5.966434
0.3	16.80376	11.92066	8.918371	6.852069	5.325573
0.5	11.16105	8.918371	7.199962	5.832120	4.711458
0.7	8.015868	6.852069	5.832120	4.929036	4.122327
0.9	5.966434	5.325573	4.711458	4.122327	3.556573

Tabela 2: Taxa de Fluxo de Poiseuille para $\alpha_1 = 0.5$

a	$\alpha_2 = 0.1$	$\alpha_2 = 0.3$	$\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.9$
0.001	15.09103	11.97471	9.589257	7.693833	6.144428
0.01	9.704783	7.764542	6.284505	5.110209	4.150426
0.1	6.360911	4.997873	4.023360	3.288950	2.713651
0.5	5.673590	4.256846	3.368218	2.758588	2.314240
1.0	5.882645	4.283548	3.376574	2.791503	2.382233

4. Resultados e Conclusões

Seguindo a Ref. [1], para obtenção dos resultados numéricos faz-se necessário escolher um esquema de quadratura, calcular as constantes de separação, resolver o sistema linear e avaliar as quantidades de interesse.

As tabelas 1 a 6 mostram os resultados numéricos, obtidos através de implementações em linguagem Fortran, para as quantidades de interesse de cada problema considerado.

Observando os resultados numéricos apresentados nas tabelas 1 e 2, para o problema de Poiseuille, constata-se que as maiores taxas de fluxos ocorrem quando tem-se pequenos valores para os coeficientes de acomodação e/ou para as menores espessuras dos canais. Ainda, nota-se que menores valores de α_1 ocasionam as maiores variações da taxa de fluxo ao variar-se o valor de α_2 , mantendo-se a espessura constante.

Nas tabelas 3 e 4 constata-se que, para o fluxo de Couette, maiores valores para os coeficientes de acomodação ocasionam o surgimento de maiores valores para a tensão de cisalhamento, independentemente da espessura do canal, enquanto que o aumento da espessura do canal acarreta a diminuição do valor da tensão de cisalhamento, independentemente dos valores dos coeficientes de acomodação. Nota-se, também, que os canais de maior espessura são menos sensíveis à variação dos coeficientes de acomodação. Ainda, percebe-se que maiores valores para o coeficiente de acomodação em uma das paredes (placa plana) ocasionam as maiores variações na tensão de cisalhamento em função da variação do coeficiente de acomodação da outra parede, independentemente da espessura dos canais.

Nas tabelas 5 e 6, para o problema de creep térmico, os resultados revelam, em termos de valores absolutos, que o surgimento de maiores taxas de fluxo ocorre nos casos onde se tem menores valores para os coeficientes de acomodação e/ou

Tabela 3: Tensão de Cisalhamento de Couette para $2a = 0.01$

α_1	$\alpha_2 = 0.1$	$\alpha_2 = 0.3$	$\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.9$
0.1	0.05260717	0.08102323	0.09083642	0.09580961	0.09881519
0.3	0.08102323	0.17619721	0.23030249	0.26520427	0.28958557
0.5	0.09083642	0.23030249	0.33236202	0.41028570	0.47173050
0.7	0.09580961	0.26520427	0.41028570	0.53594014	0.64582646
0.9	0.09881519	0.28958557	0.47173050	0.64582646	0.81239939

Tabela 4: Tensão de Cisalhamento de Couette para $\alpha_1 = 0.5$

a	$\alpha_2 = 0.1$	$\alpha_2 = 0.3$	$\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.9$
0.001	0.09089447	0.23067509	0.33313706	0.41146537	0.47328827
0.01	0.09076474	0.22984416	0.33141178	0.40884328	0.46983025
0.02	0.09062380	0.22894811	0.32956215	0.40604582	0.46615619
0.05	0.09021666	0.22639016	0.32433028	0.39819131	0.45590410
0.1	0.08957716	0.22245050	0.31638851	0.38640256	0.44065706
0.3	0.08731454	0.20915726	0.29044593	0.34879019	0.39287483
0.5	0.08533434	0.19825472	0.27004025	0.32004541	0.35710906
1.0	0.08105370	0.17672915	0.23185319	0.26808677	0.29397958

para as menores espessuras do canal. Ainda, constata-se que para menores valores dos coeficientes de acomodação em uma das paredes, têm-se as maiores variações no valor da taxa de fluxo em função da variação do coeficiente de acomodação da outra placa, mantendo-se constante a espessura.

Ressalta-se, ainda, que os resultados apresentados nas tabelas 1 e 2, referentes ao problema do fluxo de Poiseuille, concordam, em todos os dígitos, com os correspondentes resultados apresentados na Ref. [6].

O uso do método de ordenadas discreta [2] tem possibilitado a resolução de uma ampla classe de problemas da dinâmica da gases rarefeitos, considerando condições de contorno com o mesmo coeficiente de acomodação [1]. Neste trabalho pode-se comprovar que esta mesma metodologia também pode ser usada no caso de se considerar condições de contorno com diferentes coeficientes de acomodação.

Abstract. In this work, the effects of different accommodation coefficients in the behavior of rarefied gas flow in microchannels, are analyzed. The discrete-ordinates method is used to establish a solution for the BGK model. Numerical results are presented.

Referências

- [1] L.B. Barichello, M. Camargo, P. Rodrigues, C.E. Siewert, Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model, *Z. Angew. Math. Phys.*, **52** (2001), 517-534.

Tabela 5: Taxa de Fluxo do Creep Térmico, para $2a = 0.01$

α_1	$\alpha_2 = 0.1$	$\alpha_2 = 0.3$	$\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.9$
0.1	-9.403892	-5.714671	-4.020814	-3.003226	-2.307244
0.3	-5.714671	-4.250777	-3.291306	-2.600997	-2.073684
0.5	-4.020814	-3.291306	-2.714488	-2.243398	-1.849014
0.7	-3.003226	-2.600997	-2.243398	-1.922632	-1.632678
0.9	-2.307244	-2.073684	-1.849014	-1.632678	-1.424169

Tabela 6: Taxa de Fluxo do Creep Térmico para $\alpha_1 = 0.5$

a	$\alpha_2 = 0.1$	$\alpha_2 = 0.3$	$\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.9$
0.001	-6.052639	-4.861658	-3.936450	-3.192240	-2.577495
0.01	-3.237639	-2.678864	-2.233130	-1.866361	-1.557318
0.02	-2.525925	-2.117189	-1.788143	-1.515262	-1.283771
0.05	-1.712259	-1.466325	-1.266442	-1.099149	-0.9560374
0.1	-1.205322	-1.053013	-0.9295956	-0.8261860	-0.7374617
0.3	-0.6124973	-0.5547100	-0.5115729	-0.4771984	-0.4486114
0.5	-0.4242726	-0.3907017	-0.3685435	-0.3525026	-0.3401515
1.0	-0.2454559	-0.2309757	-0.2245046	-0.2216870	-0.2208079

- [2] L.B. Barichello, C.E. Siewert, A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **62** (1999), 665-675.
- [3] L.B. Barichello, C.E. Siewert, A discrete-ordinates solution for Poiseuille flow in a plane channel, *Z. Angew. Math. Phys.*, **50** (1999), 972-981.
- [4] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook, A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, *Phys. Rev.*, **94** (1954), 511-525.
- [5] K.M. Case, Elementary solutions of the transport equation and their application, *Ann. Phys.*, **9** (1960), 1-23.
- [6] C. Cercignani, M. Lampis, S. Lorenzani, Variational approach to gas flows in microchannels, *Physics of Fluids*, **16**, No. 9 (2004), 3426-3437.
- [7] M. Gad-el-Hak, "The MEMS Handbook. Mechanical Engineering Handbook Series", Second Edition, vol. 1, 2005.
- [8] G.H. Golub, C.F. Van Loan, "Matrix Computations", Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [9] S.K. Loyalka, N. Petrellis, T.S. Storvick, Some exact numerical results for the BGK model: Couette, Poiseuille and thermal creep flow between parallel plates, *Z. Angew. Math. Phys.*, **30** (1979), 514-521.

- [10] P. Rodrigues, “Aspectos Analíticos e Computacionais do Método de Ordenadas Discretas para o Modelo BGK linearizado”, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1998.
- [11] M.M.R. Williams, A review of the rarefied gas dynamics theory associated with some classical problems in flow and heat transfer, *Z. Angew. Math. Phys.*, **52** (2001), 500-516.