

Comparação das Bases de *Wavelets* Ortonormais e Biorotogonais: Implementação, Vantagens e Desvantagens no Posicionamento com GPS¹

E.M. de SOUZA², A. PAGAMISSE³, J.F.G. MONICO⁴, W.G.C. POLEZEL⁵,
FCT, UNESP, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil.

Resumo. As bases de *wavelets* ortonormais são muito utilizadas em diversas aplicações, e mais recentemente no processamento de sinais do sistema GPS, o qual tem revolucionado a navegação como uma tecnologia de posicionamento. Entretanto, existem bases biorotogonais que possuem características muito interessantes e ainda não foram utilizadas no GPS. Nesse sentido, o objetivo desse artigo é apresentar as principais características de cada uma dessas bases, bem como os aspectos mais relevantes em relação à implementação das mesmas. As bases de *wavelets* ortonormais e biorotogonais são utilizadas para realizar uma análise de multirresolução e reduzir erros nos sinais do sistema de posicionamento por satélite GPS, principalmente em relação ao erro do multicaminho, o qual é causado pela reflexão dos sinais em objetos nas proximidades do receptor. Esse efeito é um dos erros mais difíceis de serem reduzidos e tem sido alvo de muitas investigações. Dessa forma, algumas bases ortonormais e biorotogonais na redução de erros no processamento dos sinais GPS são comparadas e analisadas. Os resultados mostraram que ambas as bases possuem um desempenho muito bom atingindo mais de 80% de melhoria.

1. Introdução

A análise *wavelet* tem sido uma técnica matemática muito útil para análise numérica e manipulação de sinais discretos em diversas áreas, e mais recentemente no processamento de sinais do sistema de posicionamento por satélite GPS. Esse sistema tem representado um verdadeiro avanço na tecnologia mundial em termos de posicionamento e navegação, trazendo muitas melhorias e facilidades. Entretanto, existem alguns efeitos que prejudicam a qualidade do posicionamento, impedindo muitas vezes que aplicações de alta precisão sejam atingidas. É nesse sentido que as *wavelets* têm mostrado seu grande potencial: na redução dos erros dos sinais GPS.

Entretanto, existem diversos tipos de *wavelets* e algumas possuem características mais adequadas a determinadas aplicações. As *wavelets* podem ser suaves ou não,

¹Trabalho financiado pela FAPESP - Processos 03/12770-3 e 04/02645-0

²eniuce@yahoo.com.br, Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas

³aylton@fct.unesp.br, Departamento de Matemática, Estatística e Computação

⁴galera@fct.unesp.br, Departamento de Cartografia

⁵wesleypolezel@hotmail.com, Departamento de Cartografia

simétricas ou não, ter suporte compacto ou não, gerar sistemas ortogonais ou não e ainda ter formulações matemáticas simples ou não.

Para determinar a regularidade ou suavidade de uma *wavelet*, o número de momentos nulos da mesma é crucial. Uma *wavelet*, denotada por $\psi(t)$, tem p momentos nulos se $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0$, para $0 \leq k < p$. Se uma *wavelet* tem p momentos nulos, então sua Transformada *Wavelet* (TW) pode ser considerada como um operador diferencial multi-escala de ordem p [7]. Assim, quanto maior p , mais suave será ψ . Entretanto, em alguns casos, pode-se obter *wavelets* com a mesma regularidade e com um número menor de momentos nulos [3].

Por outro lado, a *wavelet* é dita ser de suporte compacto se a maioria da energia desta *wavelet* está restrita a um intervalo finito, ou seja, se a função é exatamente zero fora deste intervalo. Neste caso, diz-se que as *wavelets* têm localização espacial. Tal propriedade é de fundamental interesse para aplicações em séries temporais. Nesse artigo, serão utilizadas apenas famílias de *wavelets* de suporte compacto.

Na Tabela 1 são mostradas algumas características das *wavelets* de suporte compacto geralmente mais utilizadas.

Tabela 1 - Características de algumas famílias de *Wavelets* de Suporte Compacto geralmente mais utilizadas (S=Sim, N=Não)

Wavelets	Haar	Daubechies	Symmlets	Coiflets	Splines	Biortogonais
Ortonormalidade	S	S	S	S	N	N
Biortogonalidade	N	N	N	N	S	S
Simetria	S	N	Quase	Quase	S	S

Pode-se notar na Tabela 1 que algumas *wavelets* são ortonormais, enquanto outras são biortogonais. A descoberta de bases ortonormais e de suporte compacto é devida a Ingrid Daubechies [3], que inspirada nos trabalhos de Mallat, estendeu o trabalho de Haar, sintetizando esta família de *wavelets* ortonormais e possibilitando uma análise e síntese mais eficiente do que a obtida com outros sistemas (como, por exemplo, o de Haar). Com relação às bases biortogonais, tais como as *splines wavelets*, a vantagem destas em relação às ortonormais é que tanto os filtros de decomposição, como os de reconstrução, podem ser simétricos. Vale ressaltar que simetria e reconstrução exata em *wavelets* ortogonais (exceto o caso de Haar) são incompatíveis se os mesmos filtros FIR (*Finite Impulse Response*) são utilizados para decomposição e reconstrução [3]. Como este é o caso das *wavelets* de Daubechies, Symmlets e Coiflets, logo, tais *wavelets* não são simétricas.

Neste artigo, os principais detalhes das *wavelets* ortonormais e biortogonais citadas com diferentes momentos nulos são apresentados, bem como os aspectos relacionados à implementação das mesmas. As bases de *wavelets* ortonormais são comparadas com as bases biortogonais no processamento de sinais de satélites GPS para determinação de coordenadas de pontos de interesse. A análise das vantagens e desvantagens de tais bases é feita em relação à qualidade dos resultados obtidos, incluindo a análise da acurácia indicada pelo Erro Médio Quadrático (EMQ) e dos resíduos do processamento.

Assim, a seção 2 trata sobre as *Wavelets* Ortonormais e os principais aspectos de sua implementação utilizando o algoritmo piramidal. Na seção 3 as *Wavelets*

Biortogonais são brevemente descritas, bem como as diferenças mais importantes em relação às bases ortonormais. Alguns aspectos da implementação, o experimento realizado, os resultados e análises são discutidos na seção 4. Finalmente, as considerações finais do trabalho são feitas na seção 5.

2. Wavelets Ortonormais

Wavelets são blocos construtores de funções localizados no tempo e no espaço. As wavelets são obtidas de translações e dilatações de uma única função $\psi(t)$, chamada de wavelet mãe, dadas por [3]

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \quad a \neq 0,$$

onde a representa o parâmetro de dilatação e b o de translação.

Para algumas escolhas especiais de ψ , a e b , $\psi_{a,b}$ constitui uma base ortonormal para o espaço de funções quadrado integrável $L_2(R)$. Em especial, considerando $a = 2^j$ e $b = k2^j$, com $j, k \in Z$, então existe ψ , tal que $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$ é uma base ortonormal [1]. Mas permanece a questão de como obter a wavelet ψ . Foi desenvolvida, por [3], uma forma para construir essa wavelet utilizando a função escala que é solução da equação

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k), \quad (2.1)$$

onde h_k é dado por

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (2.2)$$

A equação (2.1) gera uma família ortonormal em $L_2(R)$ dada por $\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k)$, $j, k \in Z$.

Nessas condições, ψ pode ser obtida por

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k), \quad (2.3)$$

onde g_k é dado por

$$g_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (2.4)$$

Assim, considerando um sistema ortonormal $\{\phi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t), j, k \in Z\}$, $f(t) \in L_2(R)$ pode ser escrito por [9]

$$f(t) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_{j \leq J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

com J inteiro representando a escala mais suave.

Entretanto, ainda permanece a questão de como calcular eficientemente os coeficientes $d_{j,k}$ e $c_{j,k}$. Utilizando a equação da função escala (2.1) e a definição da *wavelet* (2.3), tem-se

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \langle f, \phi_{j-1,2k+n} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} c_{j-1,n} \quad (2.5)$$

$$c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \langle f, \phi_{j-1,2k+n} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{j-1,n}, \quad (2.6)$$

onde h_n e g_n são dados por (2.2) e (2.4).

As equações (2.5) e (2.6) representam a base do algoritmo de Mallat [7], também conhecido como algoritmo “piramidal”. Nestas equações, nota-se que o algoritmo calcula $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ a partir dos coeficientes suaves do nível $j - 1$. Além disso, as equações (2.5) e (2.6) podem ser vistas como um processo de convolução seguido de uma decimação (*downsampling*) por dois (notação: $\downarrow 2$), que ao ser aplicada em uma seqüência, significa que as amostras pares ou ímpares estão sendo eliminadas. Logo, no nível j , tem-se metade dos coeficientes do nível $j - 1$, donde o nome piramidal ou cascata.

A TWD inversa (TWDI) essencialmente realiza as mesmas operações associadas com a TWD na direção contrária. Os mesmos coeficientes são aplicados em ordem reversa utilizando o algoritmo piramidal de reconstrução. Ao invés da decimação, os sinais são interpolados: zeros são colocados entre os coeficientes da transformada (*upsampling*, $\uparrow 2$) [7].

Na realidade, h_n e g_n são os coeficientes dos filtros passa-baixo e passa-alto, respectivamente, chamados *quadrature filters*, usados para calcular a Transformada *Wavelet* Discreta (TWD). Isso significa que os componentes de alta freqüência (detalhes e ruídos) do sinal são separados dos componentes de baixa freqüência (multicaminho de baixa freqüência) em vários níveis de resolução. O nome Análise de Multirresolução (AMR) provém dessa idéia. A relação entre os níveis de resolução pode ser descrita sob a forma de um aninhamento dos espaços de função, onde cada espaço de maior resolução contém os espaços de menor resolução, ou seja, $\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$. Cada espaço V_j é coberto pela família de funções de base $\phi_{j,k}$ correspondente. As funções *wavelet* ψ_j pertencem aos espaços W_j , sendo cada espaço W_j o complemento ortogonal de V_j em relação ao espaço V_{j-1} . Desta forma, pode-se escrever a relação entre dois níveis adjacentes de resolução como $V_j \oplus W_j = V_{j-1}$, $W_j \perp V_j$ onde \oplus representa a soma direta ([7] e [3]).

Entretanto, existem diversas bases de *wavelets* ortonormais que podem ser utilizadas na AMR. Algumas das *wavelets* mais utilizadas são descritas nas seções seguintes.

2.1. *Wavelet* de Daubechies

As *wavelets* de Daubechies possuem suporte compacto e geram bases ortonormais. São construídas a partir de *conjugate mirror filters*, pois os *quadrature mirror filters* não são FIR. Em 1984, Smith, Barnwell e Mintzer encontraram condições

necessárias e suficientes para obter reconstrução perfeita utilizando filtros de FIR e chamaram tais filtros de *conjugate mirror filters*.

O filtro de Daubechies tem tamanho $2p$, assim, a *wavelet* resultante tem p momentos nulos e suporte em $[-p + 1, p]$ [7]. Quando $p = 1$, obtém-se a *wavelet* de Haar. Em [3] são apresentados os coeficientes dos filtros das *wavelets* de Daubechies h_n (filtro passa-baixo) para $2 \leq p \leq 10$.

2.2. *Symmlets*

As *Symmlets* também foram introduzidas por I. Daubechies. Da mesma forma que as *wavelets* de Daubechies, as *Symmlets* são ortonormais, têm p momentos nulos e suporte em $[-p + 1, p]$. Entretanto, são mais simétricas que as *wavelets* de Daubechies e chamadas de *least asymmetric* na literatura inglesa [3].

Em [3] são apresentados os coeficientes dos filtros passa-baixo h_n das *Symmlets* para $4 \leq p \leq 10$.

2.3. *Coiflets*

R. Coifman sugeriu em 1989 a construção de bases de *wavelets* ortonormais com momentos nulos não apenas para a *wavelet* mãe ψ , mas também para *wavelet* pai ϕ [3]. Daubechies construiu tais *wavelets* e as denominou *Coiflets* em homenagem a R. Coifman.

O objetivo é que ψ e ϕ satisfaçam $\int x^l \psi(x) dx = 0$, $\int \phi(x) dx = 0$ e $\int x^l \phi(x) dx = 0$, $l = 0, \dots, L - 1$, onde L é a ordem da *Coiflet*. As *Coiflets* são *wavelets* ortonormais quase simétricas e seus coeficientes para $L = 2, 4, 6, 8$ e 10 são listados em [3].

3. Wavelets Biortogonais

Bases de *wavelets* biortogonais foram introduzidas por [2] com o intuito de obter *wavelets* que fossem simétricas e de suporte compacto. No caso de *wavelets* biortogonais, é permitido que os filtros de decomposição e reconstrução sejam distintos a fim de que os mesmos sejam simétricos. No entanto, com esta concessão, surgem naturalmente algumas questões relacionadas à análise de multirresolução e como as bases de *wavelets* associadas vão diferir das bases ortonormais. Na realidade, desde que os filtros satisfaçam certas condições técnicas, o que se obtém é um esquema que corresponde a duas bases de *wavelets* duais, associadas a duas diferentes multirresoluções. A seguir serão feitas algumas considerações para construir tal esquema de forma que a reconstrução exata seja possível.

Procura-se construir quatro seqüências $h = (h_n)_{n \in Z}$, $g = (g_n)_{n \in Z}$, $\tilde{h} = (\tilde{h}_n)_{n \in Z}$ e $\tilde{g} = (\tilde{g}_n)_{n \in Z}$, duas das quais serão usadas para decomposição (h, g) e duas para reconstrução (\tilde{h}, \tilde{g}) .

Iniciando a partir de uma seqüência de dados $c_{0,k}$, $k \in Z$ convolucionando-a com

h, g e retendo apenas uma amostra de cada duas para a decomposição, obtém-se

$$c_{1,n} = \sum_k h_{2n-k} c_{0,k} \quad \text{e} \quad d_{1,n} = \sum_k g_{2n-k+1} c_{0,k},$$

onde o *shift* de 1 é introduzido nos índices de g para posterior conveniência. Em cada seqüência $c_{1,n}$ e $d_{1,n}$ é feita a operação inversa (intercalar zeros e convolucionar com os filtros espelho (*mirror*) de \tilde{h} e \tilde{g}) e somados os dois resultados

$$\tilde{c}_{0,l} = \sum_n \left[\tilde{h}_{2n-l} + \tilde{g}_{2n-l+1} d_{1,n} \right].$$

Para que a reconstrução seja exata, deve-se impor $\tilde{c}_0 = c_0$, ou seja,

$$\sum_n \left[\tilde{h}_{2n-l} h_{2n-k} + \tilde{g}_{2n-l+1} g_{2n-k+1} \right] = \delta_{lk} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}.$$

Imitando a construção de ϕ e ψ no caso ortonormal obtém-se [3]

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n), & \tilde{\phi}(t) &= \sqrt{2} \sum_n \tilde{h}_n \phi(2t - n), \\ \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_n g_{n+1} \phi(2t - n), & \tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum_n \tilde{g}_{n+1} \tilde{\phi}(2t - n). \end{aligned}$$

Em [3] são apresentados critérios para verificar a biortogonalidade das bases apresentadas anteriormente.

Em relação à multirresolução, considerando que para $j \in Z$, $\{\phi_{j,n}\}_{n \in Z}$ e $\{\tilde{\phi}_{j,n}\}_{n \in Z}$ são bases dos espaços V_j e \tilde{V}_j e $\{\psi_{j,n}\}_{n \in Z}$ e $\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{n \in Z}$ são bases dos espaços de detalhes W_j e \tilde{W}_j e que as duas multirresoluções V_j e \tilde{V}_j são duais. Essa dualidade é utilizada para definir W_j e \tilde{W}_j , de modo que f pertence a W_j se f pertence a V_{j-1} e se $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mu(x) dx = 0, \forall \mu \in \tilde{V}_j$. Logo, $V_j \oplus W_j = V_{j-1}$ e $\tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j = \tilde{V}_{j-1}$.

A biortogonalidade das *wavelets* de decomposição e reconstrução implica que W_j não é ortogonal a V_j mas é a \tilde{V}_j enquanto \tilde{W}_j não é ortogonal a \tilde{V}_j mas é a V_j [7].

Neste artigo são utilizados dois tipos de *wavelets* biortogonais: as *wavelets splines* e as *wavelets* biortogonais próximas às bases ortonormais. *Wavelets* biortogonais construídas a partir de *splines* são atrativas devido ao seu suporte curto e regularidade, pois tais propriedades são muito úteis para redução de truncamentos na reconstrução de sinais [16]. Tem-se *wavelets splines* sempre que as funções ϕ e ψ são *splines* polinomiais de grau n . A *wavelet* de Haar pode ser considerada como o caso mais simples, ou seja, uma *spline* de grau 0 [16]. As *wavelets splines* biortogonais são descritas por filtros FIR que permitem reconstrução perfeita. Em [2] e [3] constam os coeficientes dos filtros de decomposição e reconstrução h e \tilde{h} para $p = \tilde{p} = 4$ e 5.

Uma segunda opção interessante refere-se às bases de *wavelets* biortogonais muito próximas de bases ortonormais, as quais foram sugeridas por M. Barlaud.

Tais bases conduzem a filtros simétricos que são muito parecidos com os filtros da *Coiflet*. Em [2] e [3] são listados os coeficientes dos filtros de decomposição e reconstrução para $p = \tilde{p} = 4$ e 5 das bases de *wavelets* biortogonais próximas das *Coiflets* de ordem $L = 2$ e 4.

4. Implementação, Experimentos e Resultados

Para comparar o desempenho de bases de *wavelets* ortonormais e biortogonais no posicionamento por satélite GPS, o algoritmo piramidal foi utilizado para aplicar a TWD a fim de realizar uma análise de multirresolução (seção 2.1) nos sinais GPS, detectando e reduzindo erros indesejáveis não modelados. O multicaminho é um erro causado pela reflexão dos sinais GPS em objetos nas proximidades do receptor e prejudica muito a qualidade do posicionamento. Sabe-se que as *wavelets* representam uma poderosa ferramenta para detecção e correção desse erro nos sinais GPS ([12] e [14]), entretanto, ainda é necessário determinar uma base de *wavelets* que proporcione os melhores resultados no posicionamento.

Nesse sentido, os coeficientes dos filtros h e g das bases de *wavelets* ortonormais e biortogonais apresentadas nas seções 2 e 3, respectivamente, e o algoritmo piramidal (seção 2.1) foram implementados em linguagem FORTRAN 77 e acoplados ao *software* GPSeq para processamento dos sinais GPS. O GPSeq é um *software* em desenvolvimento na FCT/UNESP de Presidente Prudente que está sendo disponibilizado para a comunidade usuária. O algoritmo piramidal implementado está baseado no algoritmo apresentado por [11], porém o mesmo foi adaptado para aplicar tanto os coeficientes das bases ortonormais como das biortogonais, os quais são diferentes na decomposição e reconstrução.

Foram implementados alguns dos filtros de cada base de *wavelets*:

- Daubechies com suporte $p = 4, 6$ e 10, representadas por Daub4, Daub6 e Daub10;
- *Symmlets* com $p = 4, 5, 6$ e 10, representadas por Sym4, Sym5, Sym6 e Sym10;
- *Coiflets* para $L = 2, 4, 8$ e 10, representadas por Coif2, Coif4, Coif8 e Coif10;
- *Wavelet Spline* com $p = \tilde{p} = 4$, representada por Spline4;
- Biortogonal próxima à *Coiflet* com $p = \tilde{p} = 4$, representada por Bior4.

Uma característica importante é que os suportes das *wavelets* devem ser centrados adequadamente para que haja reconstrução exata dos sinais decompostos. Em cada caso das bases ortonormais analisadas, as duas *wavelets* ϕ e ψ foram centradas em $-N/2$, considerando N o número de coeficientes de cada *wavelet*. As *wavelets* biortogonais próximas das ortonormais com $p = \tilde{p} = 4$ foram centradas em -2 e $N + 2$ [11]. Já as *splines wavelets* com $p = \tilde{p} = 4$ foram centradas em $-\pi$ e $-N + \pi$ [7].

Os filtros implementados são utilizados no algoritmo piramidal para aplicar a TWD e a TWDI, realizando a AMR. Nesse processo são aplicados métodos de limiarização desenvolvidos por [6] e [5] para reduzir os erros nos sinais GPS, principalmente os relacionados ao multicaminho. Tais métodos já foram analisados no sistema de posicionamento GPS e detalhes do procedimento são apresentados por [14].

Nesse sentido, para coletar os dados (sinais) a serem analisados, foi realizado um experimento em Presidente Prudente. Nos dias 16 e 17/09/2003, objetos refletorantes foram colocados propositalmente perto de um receptor Astech ZXII para causar erros de multicaminho. Nos dias 20 e 21/09/2003, os objetos foram removidos para que as coordenadas “verdadeiras” sem erros de multicaminho pudessem ser estimadas.

Todos os sinais GPS coletados nos quatro dias do experimento foram processadas no *software* GPSeq. Em um primeiro momento, foi realizado o processamento convencional sem aplicar a AMR. Posteriormente, a AMR foi aplicada em todos os sinais GPS utilizando cada uma das bases de *wavelets* indicadas nas seções 2 e 3. Nesse passo, os erros nos sinais GPS, principalmente os relacionados ao multicaminho, são reduzidos por técnicas de limiarização [14]. Para comparar o desempenho de cada uma das bases em relação ao processamento convencional sem a AMR, foi analisada a acurácia de cada coordenada em relação às coordenadas “verdadeiras”, o EMQ dos resíduos de cada um dos processamentos e o teste estatístico GOM (*Global Overall Model*) [15], o qual propicia indicativos da qualidade dos sinais GPS.

Devido à grande quantidade de dados analisados e diferentes tipos de análises, foi calculada a porcentagem de melhoria do uso de cada uma das bases de *wavelets* em relação ao processamento convencional. Logo, obteve-se uma porcentagem em relação às coordenadas, outra para o EMQ dos resíduos e uma terceira para teste GOM. Para facilitar a visualização, na figura 1 é apresentada uma média dessas três porcentagens de melhoria para cada base de *wavelet*.

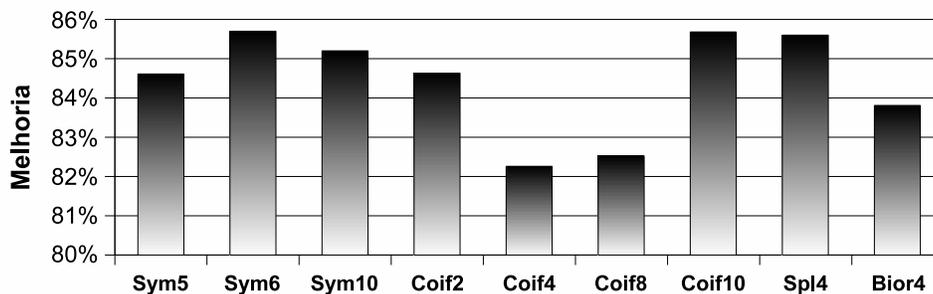


Figura 1: Porcentagem de melhoria considerando análise da acurácia das coordenadas, EMQ dos resíduos e o Teste Estatístico GOM

Verifica-se na figura 1 em relação às bases ortonormais, que a Daub4, Sym6 e Sym10 proporcionaram os melhores resultados, ou seja, reduziram mais erros, principalmente de multicaminho, e conseqüentemente, melhoraram os resultados em mais de 85%. Em termos de acurácia, os resultados variaram de 3 a 8 mm de melhoria. Por outro lado, a Spline4 mostrou melhor desempenho que a Bior4. Entretanto, independentemente da base escolhida, os resultados melhoraram mais que 80%, indicando que a escolha da base de *wavelets* para redução do efeito do multicaminho no GPS pode não ser tão significativa. Mas, dependendo da aplicação, principalmente nas de alta precisão, essa escolha pode ser muito importante.

5. Conclusão

Foram apresentados os principais conceitos relacionados às bases de *wavelets* ortonormais e biortogonais, bem como algumas características importantes da implementação das mesmas. O resultado da aplicação de tais bases foi comparado e verificou-se que ambas as bases trazem vantagens ao processamento de sinais GPS, mas, com maior destaque para as *wavelets* Daub4, Sym6, Sym10 e Spline4, as quais proporcionaram mais que 85% de melhoria nos resultados analisados. Apenas duas bases biortogonais foram apresentadas neste artigo. Logo, futuramente, outras também podem ser analisadas. Uma pequena desvantagem na implementação das bases biortogonais é que os filtros de decomposição e reconstrução são diferentes e o centro do suporte das mesmas é mais difícil de ser determinado, merecendo mais pesquisas.

Abstract. Orthonormal wavelet bases are very frequently used in several applications, and more recently in signal processing of GPS positioning system, which has revolutionized the navigation as a technology of positioning. However, there are biorthogonal bases that have very interesting characteristics and are not used in GPS yet. Thus, the objective of this paper is to present the main characteristics of these bases as well as the essential aspects of their implementation. The wavelet orthonormal and biorthogonal bases were used to perform a multiresolution analysis and to reduce errors in the signals of the GPS satellite positioning system, mainly of multipath, that is the error due to reflections of the signal in objects surrounding the receiver. This effect is one of the most difficult to be reduced and has been focus of several investigations. In that way, some orthonormal and biorthogonal bases are compared and analyzed in the reduction of errors from GPS signal processing. The results showed that both bases have very good performance reaching more than 80% of improvement.

Referências

- [1] C. K. Chui, “An Introduction to Wavelets”, Academic Press, Boston, 1992.
- [2] A. Cohen, I. Daubechies, J.C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **55** (1992), 458-560.
- [3] I. Daubechies, “Ten Lectures on Wavelets”, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [4] I. Daubechies, Orthonormal bases of compact supported wavelets, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **41** (1998), 909-996.
- [5] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, Ideal spatial adaptation by Wavelet Shrinkage, *Biometrika*, **81** (1994), 425-455.
- [6] D. L. Donoho et al., Wavelet Shrinkage: Asymptopia? (with discussion), *Journal Royal Statistical Society*, **57** (1995), 301-369.
- [7] S. Mallat, “A Wavelet Tour of Signal Processing”, Academic Press, San Diego, CA, 1998.

- [8] J.F.G. Monico, “Posicionamento pelo NAVSTAR - GPS: Descrição, Fundamentos e Aplicações”, UNESP, São Paulo, 2000.
- [9] P.A. Morettin, “Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas”, EDUSP, São Paulo, 1999.
- [10] G. P. Nason, “Wavelet Regression by Cross-Validation”. TR 447, Dept. Statistics, Stanford University, 1994.
- [11] Press et al., “Numerical Recipes in Fortran 77”, Cambridge, 1992.
- [12] E.M. Souza, “Efeito de Multicaminho de Alta Frequência no Posicionamento Relativo GPS Estático: Detecção e atenuação utilizando Wavelets”. Dissertação de Mestrado, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP, 2004.
- [13] E.M. Souza, J.F.G. Monico, Wavelet Shrinkage: high frequency multipath reduction from GPS relative positioning, *GPS Solutions*, **8** (2004), 152-159.
- [14] E.M. Souza, A. Pagamisse, M. Meneguette Jr, J.F.G. Monico, Processamento de sinais com *Wavelets*: redução do efeito do multicaminho do sinal GPS, em “Seleta do XXVII CNMAC” (E.X.L. de Andrade, J.M. Balthazar, S.M. Gomes, G.N. Siva e A. Sri Ranga, eds.), TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 6, No. 1, pp. 177-186, SBMAC, 2005.
- [15] P.J.G. Teunissen, Quality Control and GPS, in “GPS for Geodesy” (P.J.G. Teunissen and A. Kleusberg, eds.), 2 ed., pp. 271-318, Berlin, Springer Verlag, 1998.
- [16] M. Unser, Ten Good Reasons for using Spline Wavelets. *Wavelets Applications in Signal and Image Processing*, **3169** (1997), 422-431.