

# Simulação de Escoamentos de Fluidos Incompressíveis a Altos Reynolds

A.C. BRANDI, F.A. KUROKAWA, V.G. FERREIRA<sup>1</sup>, J.A. CUMINATO, A. CASTELO, M.F. TOMÉ, Departamento de Computação e Estatística, ICMC, USP, 13560-970 São Carlos, SP, Brasil.

**Resumo.** Neste trabalho, esquemas “upwind” modernos de alta ordem e limitados são analisados/implementados no ambiente de simulação *Freeflow-2D*. O objetivo é a simulação numérica bidimensional de escoamentos de fluidos incompressíveis a altos valores do número de Reynolds. Em conjunto com condições iniciais e de contorno, as equações de conservação são resolvidas no contexto de variáveis primitivas e pelo método de diferenças finitas. Para mostrar a capacidade do código atual, são apresentados resultados numéricos para o escoamento de Poiseuille, o escoamento numa expansão brusca e o escoamento de um jato livre sobre uma superfície rígida impermeável.

## 1. Introdução

A grande maioria dos problemas em dinâmica dos fluidos envolve altos valores do número de Reynolds, especialmente os escoamentos em regime turbulento. Conseguir soluções numéricas representativas para essa classe de problemas é difícil, em virtude da forte influência dos termos convectivos (não-lineares) nas equações diferenciais parciais de transporte. Conseqüentemente, o tema tem sido uma das principais preocupações da comunidade científica moderna em dinâmica dos fluidos computacional. Os esquemas clássicos de primeira ordem, tais como “upwind” e “hybrid”, são estáveis incondicionalmente, mas ambos tendem a atenuar os processos de transporte por meio do acúmulo de difusão numérica. Aproximações de alta ordem, tais como diferenças centrais e QUICK (“Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics”), são boas estratégias para melhorar a precisão dos cálculos. Todavia, elas introduzem oscilações nas aproximações discretas que comprometem os resultados numéricos obtidos. Em algumas aplicações, essas oscilações são toleráveis (ver, por exemplo, Ferreira et al. [4]), porém em problemas envolvendo condições severas de advecção os processos não-lineares, os erros de arredondamento ou erros nas condições de contorno podem amplificar as oscilações acarretando não-convergência da solução numérica. O objetivo do presente trabalho é a simulação numérica bidimensional de escoamentos incompressíveis a altos valores do número de Reynolds. Para tanto, os esquemas de advecção modernos VONOS [8], WACEB [6] e CUBISTA [1] e a metodologia GENSMAC são analisados/implementados

---

<sup>1</sup>Apoio financeiro da FAPESP processos 02/11774-2, 04/16064-9 e 05/50443-0.

no ambiente de simulação *Freeflow-2D*. Uma maior discussão da literatura acerca do tema e da metodologia numérica empregada neste trabalho pode ser encontrada em [4], e o estado atual do código *Freeflow-2D* está bem explicado em [3].

## 2. Formulação Matemática

As equações que modelam escoamentos incompressíveis são as equações de Navier-Stokes e a condição de incompressibilidade (continuidade)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

em que  $t$  é o tempo,  $\mathbf{g}$  é o campo gravitacional,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$  é o campo de velocidade e  $p$  a pressão.  $Re = (LU)/\nu$  e  $Fr = U/(\sqrt{L|\mathbf{g}|})$  são, respectivamente, os números adimensionais de Reynolds e Froude, sendo  $L$  e  $U$  escalas características de comprimento e velocidade, respectivamente, e  $\nu$  é a viscosidade. Em conjunto com condições iniciais e de contorno, as equações (2.1) e (2.2) são resolvidas numericamente no ambiente de simulação *Freeflow-2D*.

## 3. Condições Iniciais e de Contorno

Para as condições iniciais, todas as variáveis são prescritas no início dos cálculos. Em contornos rígidos, a velocidade obedece a condição de não-deslizamento ( $\mathbf{u} = 0$ ). Na entrada do domínio de solução, é imposto um perfil parabólico para a velocidade, e na saída de fluido a condição homogênea de Neumann é utilizada para essa variável. Desprezando-se tensões superficiais, as condições de contorno em superfícies livres são (ver detalhes, por exemplo, em Ferreira et al. [4])

$$p - \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_y^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x n_y \right] = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{Re} \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} m_x n_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} m_y n_y + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (m_x n_y + m_y n_x) \right] = 0, \quad (3.2)$$

em que  $m_x$  e  $m_y$  são as componentes do vetor tangencial à superfície, e  $n_x$  e  $n_y$  as componentes do vetor normal.

## 4. Procedimento de Solução

Para resolver numericamente as equações (2.1) e (2.2), assume-se que no instante  $t_0$  o campo velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$  é conhecido. Além disso, assumem-se que são dadas as condições de contorno para  $\mathbf{u}$  e  $p$ . Para o cálculo dos campos  $\mathbf{u}$  e  $p$  em  $t = t_0 + \delta t$  utiliza-se o método da projeção (ver [4]) como segue:

**Passo 1:** Seja  $\tilde{p}(\mathbf{x}, t_0)$  um campo de pressão arbitrário que satisfaz as condições de contorno para a pressão na superfície livre. Esse campo é calculado pela equação (3.1) e as velocidades nas superfícies livres por (3.2).

**Passo 2:** Com um campo de pressão  $\tilde{p}$  conhecido no tempo inicial, ou num ciclo prévio, calcular um campo de velocidade intermediário  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  em  $t = t_0 + \delta t$ , com  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$ , satisfazendo a equação

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right\} \Big|_{t=t_0}.$$

**Passo 3:** Resolver a equação de Poisson  $\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  para  $\psi$ , com condições de contorno tipo Neumann homogênea na parede e entrada de fluido, e condição de Dirichlet na superfície livre e saída de fluido.

**Passo 4:** Atualizar o campo de velocidade como  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \psi$ .

**Passo 5:** Atualizar o campo de pressão como  $p = \tilde{p} + \psi/\delta t$ .

**Passo 6:** Atualizar as posições das partículas marcadoras. Essas partículas permitem a visualização do escoamento, e suas posições são atualizadas resolvendo-se as equações diferenciais ordinárias  $\dot{x} = u$  e  $\dot{y} = v$  pelo método de Euler.

**Passo 7:** Atualizar as condições de contorno necessárias para o próximo ciclo.

## 5. Discretização por Diferenças Finitas

No contexto de variáveis primitivas, as equações de conservação (2.1) e (2.2) são discretizadas pelo método de diferenças finitas numa malha deslocada. A pressão é aproximada no centro das células e as componentes da velocidade  $u$  e  $v$  são aproximadas nas faces das células (ver, por exemplo, [4]). Os termos difusivos e os gradientes de pressão são aproximados por diferenças centrais. As derivadas temporais são aproximadas por diferenças avançadas de primeira ordem (Euler explícito). A equação de Poisson é aproximada por diferenças centrais e o sistema de equações lineares resultante é resolvido pelo método de gradientes conjugados. Os termos advectivos (denotados aqui por  $CONV(\cdot)$ ) são discretizados usando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA. Em resumo, as equações discretizadas tornam-se:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} &= u_{i+\frac{1}{2},j}^n + \delta t \left\{ CONV(u) \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta x} \right. \\ &+ \frac{1}{Re} \left( \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{3}{2},j}}{\delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\delta y^2} \right) \\ &\left. + \frac{1}{Fr^2} g_x \right\}^n. \quad (\text{Movimento - } u) \\ \\ \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \delta t \left\{ CONV(v) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta y} \right. \\ &+ \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\delta x^2} + \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y^2} \right) \\ &\left. + \frac{1}{Fr^2} g_y \right\}^n. \quad (\text{Movimento - } v) \\ \\ \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} &= 0. \quad (\text{Continuidade}) \end{aligned}$$

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\delta y^2} = \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}. \quad (\text{Poisson})$$

### 5.1. Termos Advectivos

A discretização dos termos advectivos (não lineares)  $CONV(u)$  e  $CONV(v)$  nas equações discretas merece atenção especial porque tais termos são responsáveis por fenômenos complexos no escoamento e são os principais causadores de dificuldades numéricas nas simulações. Nesse trabalho, esses termos são discretizados pelas estratégias “upwind” modernas VONOS, WACEB e CUBISTA. Esta escolha foi devido ao fato de que esquemas de alta ordem reduzem oscilações numéricas, minimizam os efeitos da difusão numérica e mantém a solução dentro de regiões estáveis. Por simplicidade, somente a discretização do termo advectivo  $CONV(u)$  será apresentada. A discretização do outro termo é análoga. No ponto de discretização  $(i + \frac{1}{2}, j)$ , o termo advectivo  $CONV(u)$  é aproximado pelo esquema conservativo

$$CONV(u) \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \left[ \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{\bar{u}_{i+1,j}u_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}u_{i,j}}{\delta x} + \frac{\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\delta y}, \quad (5.1)$$

em que as velocidades advectivas em (5.1), por exemplo  $\bar{u}_{i+1,j}$  ou  $\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ , são obtidas por médias. Em resumo, calculando-se a velocidade  $u_{i,j}$  em (5.1), por exemplo, pelo esquema CUBISTA, (as outras quantidades e equações e os outros esquemas seguem procedimentos análogos), tem-se

- Para  $u_{i,j}$  quando  $\bar{u}_{i,j} > 0$ , em que  $\hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i-(1/2),j} - u_{i-(3/2),j}}{u_{i+(1/2),j} - u_{i-(3/2),j}}$

$$u_{i,j} = \begin{cases} u_{i-\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7u_{i-\frac{1}{2},j} - 3u_{i-\frac{3}{2},j}) & \text{se } 0 < \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + 6u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{3}{2},j}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}) & \text{se } 3/4 < \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} < 1. \end{cases}$$

- Para  $u_{i,j}$  quando  $\bar{u}_{i,j} < 0$ , em que  $\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+(1/2),j} - u_{i+(3/2),j}}{u_{i-(1/2),j} - u_{i+(3/2),j}}$

$$u_{i,j} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7u_{i+\frac{1}{2},j} - 3u_{i+\frac{3}{2},j}) & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3u_{i-\frac{1}{2},j} + 6u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{3}{2},j}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}) & \text{se } 3/4 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 1. \end{cases}$$

## 6. Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados numéricos para os problemas de escoamento de Poiseuille, em uma expansão brusca e o de um jato livre sobre uma superfície rígida impermeável.

### 6.1. Simulação do Escoamento de Poiseuille

Como um primeiro teste para verificar a funcionalidade do método numérico atual, considera-se o escoamento de Poiseuille entre duas placas paralelas separadas por uma distância  $l$ . Para este problema específico, a componente de velocidade  $v$  e o gradiente de pressão na direção vertical se anulam. E neste caso, as equações de Navier-Stokes admitem a seguinte solução para o comportamento transiente (ver [5])

$$u(y, t) = -4y(y-1) - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^3 \sin(\pi(2n+1)) \exp(-Re^{-1}(2n+1)^2 \pi^2 t). \quad (6.1)$$

Incrementado com os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA, o código *Freeflow-2D* foi usado para simular este problema. Em particular, escolheram-se  $Re = 1000$ ,  $L = l = 1$  m e  $U = 1.0$  ms<sup>-1</sup> tal que  $\nu = LU/Re = 0.001$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>. Três malhas foram empregadas: uma malha grossa ( $50 \times 10$  células,  $\delta x = \delta y = 0,1$  m); malha intermediária ( $100 \times 20$  células,  $\delta x = \delta y = 0,05$  m); e malha fina ( $200 \times 40$  células,  $\delta x = \delta y = 0,025$  m). Utilizou-se o domínio  $5l \times l$  e o tempo final de simulação foi 1000.0 s. A Figura 1 mostra a comparação da solução numérica utilizando-se o esquema CUBISTA e a solução analítica dada em (6.1). Embora não mostrado aqui, as comparações da solução analítica e as soluções numéricas utilizando-se os esquemas VONOS e WACEB foram feitas também, e os resultados mostraram-se bastante semelhantes ao do CUBISTA. Pode-se observar também na Fig. 1 que os resultados numéricos nas três malhas estão em boa concordância com a solução analítica. De fato, a norma  $L_2$  do erro relativo é mostrada na Tabela 1. Nota-se desta tabela que os erros decrescem com o refinamento da malha. E esses resultados confirmam a convergência do método numérico para este problema particular. Pode-se observar ainda da Tabela 1 que os resultados obtidos com os esquemas VONOS e WACEB nas malhas intermediária e fina foram melhores que o obtido com o esquema CUBISTA.

Tabela 1: Erros relativos para o escoamento de Poiseuille em três malhas.

Malha	CUBISTA	WACEB	VONOS
grossa	$1.2558 \times 10^{-5}$	$1.2579 \times 10^{-5}$	$1.2609 \times 10^{-5}$
intermediária	$1.0573 \times 10^{-6}$	$1.0571 \times 10^{-6}$	$1.0572 \times 10^{-6}$
fina	$6.9796 \times 10^{-8}$	$6.9791 \times 10^{-8}$	$6.9758 \times 10^{-8}$

### 6.2. Simulação do Escoamento numa Expansão Brusca

O segundo teste para validação do método numérico empregado neste trabalho foi o problema de uma expansão brusca [7]. O objetivo aqui é estimar o comprimento da recirculação  $x_1$  (ver modelo na Figura 2) por meio de simulações usando os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA. Este comprimento foi determinado como

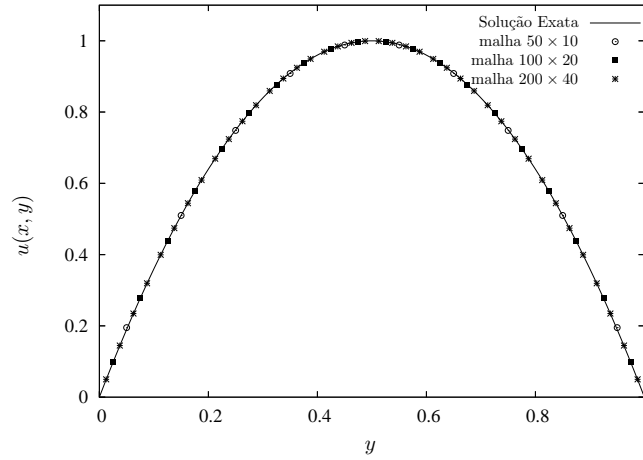


Figura 1: Comparação entre os resultados numéricos obtidos com o esquema CUBISTA e a solução analítica (6.1) nas três malhas e  $Re = 1000$ .

sendo o ponto onde a componente  $u$  de velocidade muda de sinal (ver Figura 4). Diferentes números de Reynolds foram empregados nesta simulação e resultados numéricos e experimentais foram confrontados. Na entrada do canal, o perfil de velocidade imposto foi

$$u(y) = -\frac{4U}{l^2} \left( y - \frac{l}{2} \right)^2 + U, \quad (6.2)$$

em que  $l$  é o comprimento da seção de entrada. O número de Reynolds para esse problema foi calculado como  $Re = 2s\bar{v}/\nu$ , em que  $\bar{v}$  é a velocidade média na entrada do canal, isto é

$$\bar{v} = \frac{1}{l} \int_0^l u(y) dy. \quad (6.3)$$

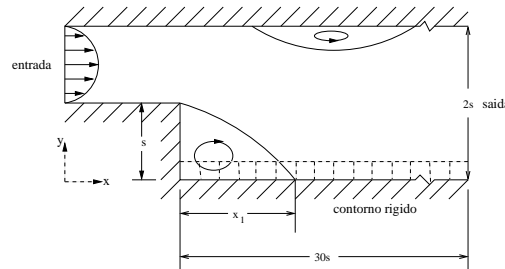


Figura 2: Geometria do problema expansão brusca.

Utilizando-se (6.2), determina-se de (6.3) que  $Re = 2U2s/3\nu$ . O número de Reynolds numérico,  $Re_{num}$ , é definido por  $Re_{num} = 2sU_{max}/\nu$ , em que  $U_{max} = 1 \text{ ms}^{-1}$  é a velocidade máxima no perfil (6.2). Relacionando-se ambos os números de Reynolds, obtém-se  $Re = (2/3)Re_{num}$ .

Para a simulação do problema em questão, utilizou-se o domínio  $4.0 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ , seção de entrada  $L = l = 0.2 \text{ m}$  e velocidade na entrada  $U = 1.0 \text{ ms}^{-1}$ . O tempo

final de simulação foi 1000.0 s e a malha  $400 \times 20$  células computacionais ( $\delta x = \delta y = 0.01$  m) foi utilizada. Para este modelo, foram simulados problemas em que  $Re_{num} = 150, 300, 600, 900$  e  $1200$  que equivalem a  $Re = 100, 200, 400, 600$  e  $800$ , respectivamente. A Tabela 2 mostra a comparação dos resultados experimentais de Armaly et al. [2] e numéricos de Stuart & Dochan [7] com os resultados numéricos do *Freeflow-2D* atual. Observa-se nessa tabela que os resultados do *Freeflow-2D* estão em boa concordância dos dados experimentais de Armaly et al.

Na Tabela 3, são confrontados os resultados numéricos obtidos com o *Freeflow-2D* utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA para números de Reynolds diferentes. Nota-se a partir dessa tabela que os esquemas WACEB e CUBISTA forneceram melhores resultados que aqueles do esquema VONOS, sendo que, no geral, o WACEB simulou melhor o comprimento da recirculação  $x_1$ .

Uma melhor visualização dos dados da Tabela 2 é mostrada na Figura 3. Pode-se observar nessa figura que para  $Re \leq 400$  os dados numéricos estão em boa concordância com os experimentais, e isto está consistente com dados da literatura (ver, por exemplo, [2, 7]). Entretanto, para  $Re > 400$  observa-se o aparecimento de uma segunda recirculação no topo do canal (ver Figura 2). Nesse caso, os resultados numéricos obtidos com o *Freeflow-2D* apresentaram discrepâncias. Essas diferenças são atribuídas aos efeitos tridimensionais e, possivelmente, ao efeito da transição para turbulência.

Tabela 2: Comparação entre resultados experimentais e numéricos.

Re	Experimental	Numérico		
	Armaly	Armaly	Stuart	Freeflow-2D
100	3.06	2.95	2.86	3.13
200	5.16	4.82	4.97	5.14
400	8.72	8.04	8.03	8.24
600	11.28	8.18	10.25	9.71
800	14.34	7.50	11.47	10.68

Tabela 3: Comparação entre resultados de VONOS, WACEB e CUBISTA.

Re	CUBISTA	VONOS	WACEB
100	3.13	3.18	3.28
200	5.14	5.14	5.15
400	8.24	8.16	8.20
600	9.71	9.55	9.80
800	10.68	10.62	10.80

Uma comparação utilizando-se as quatro malhas computacionais  $175 \times 10$ ,  $350 \times 20$ ,  $700 \times 40$  e  $875 \times 50$  foi realizada também. Neste caso,  $Re = 266$  e o esquema CUBISTA foi empregado. A Figura 4 mostra o perfil de velocidade  $u$  em função da distância  $x$  e o comprimento da recirculação. Observa-se, a partir desta figura, que ambos os perfis de velocidade e os comprimentos da recirculação variam pouco com o refino da malha (ver perfis nas malhas  $700 \times 40$  e  $875 \times 50$ ). Isto indica convergência do método numérico.

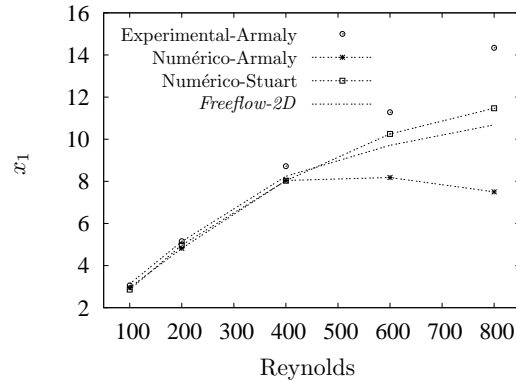


Figura 3: Problema da expansão comparando os resultados experimentais e numéricos usando o esquema CUBISTA.

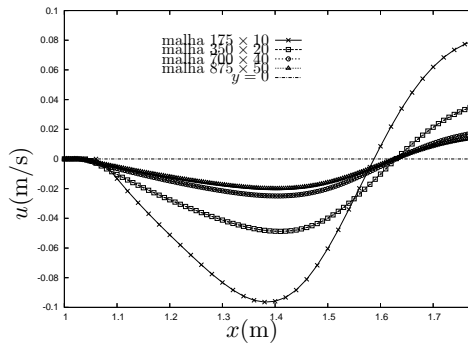


Figura 4: Perfis da componente  $u$  da velocidade do problema da expansão brusca, mostrando a convergência da solução numérica nas quatro malhas usando o esquema CUBISTA.

### 6.3. Simulação de um Jato Livre sobre Superfície Rígida

Outro problema usado para verificação do modelo numérico, estudado por Watson [9], foi o escoamento de um jato incidindo perpendicularmente sobre uma superfície rígida impermeável e sob o efeito do campo gravitacional. Desprezando os efeitos de tensão superficial, Watson obteve uma expressão analítica aproximada para a altura  $h$  entre a superfície rígida e a superfície livre do fluido (os detalhes podem ser vistos em [9]). Neste problema com superfície livre utilizou-se  $Re = 2000$  e  $Fr = 3.19275$ . O domínio considerado foi  $0.4 \text{ m} \times 0.04 \text{ m}$ , diâmetro do injetor  $L = 0.01 \text{ m}$ , velocidade de injeção  $U = 1.0 \text{ ms}^{-1}$  e altura do injetor a partir da superfície rígida  $H = 0.037 \text{ m}$ . A malha utilizada nessa simulação foi de  $800 \times 80$  células computacionais ( $\delta_x = \delta_y = 0.00050 \text{ m}$ ).

A comparação entre as soluções numéricas e a solução analítica de Watson é apresentada na Figura 5, que ilustra as superfícies teórica e computada no tempo  $t = 5.0 \text{ s}$ . Como pode-se observar, a partir dessas figuras, os esquemas apresenta-



ram resultados bastante semelhantes (difícil de identificar diferenças), mostrando discrepâncias com a solução de Watson em algumas regiões. Atribui-se essa diferença ao fato de que a solução de Watson é somente uma aproximação, e que, no caso 2D, a hipótese do perfil de velocidade ser similar ao do problema com simetria radial (ver [9], pg. 496). Seria desejável uma discussão mais elaborada sobre esses desvios. Entretanto até o presente, não é de conhecimento dos autores a existência de simulações computacionais para esse problema com superfície livre. Quanto a comparação da presente simulação com dados experimentais (validação), os autores estão em busca de bancadas experimentais na Escola de Engenharia de São Carlos - USP para tal propósito.

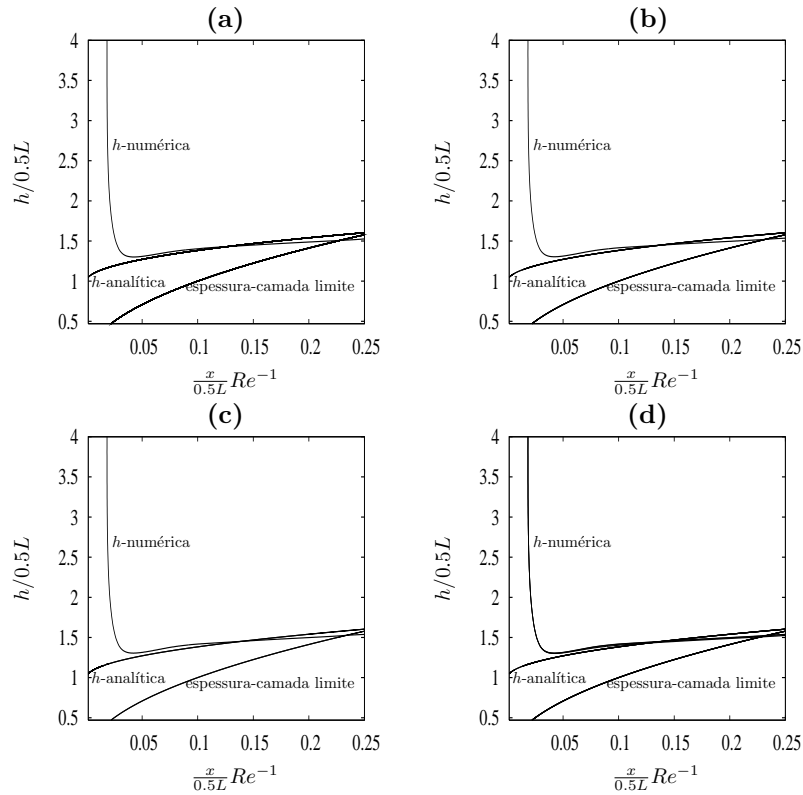


Figura 5: Comparação entre a solução numérica e a analítica de Watson: (a) VONOS, (b) WACEB e (c) CUBISTA; (d) comparação dos esquemas com a solução de Watson.

## 7. Conclusão

O objetivo deste trabalho é a análise e implementação dos esquemas “upwind” modernos VONOS, WACEB e CUBISTA para a simulação de problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis a altos Reynolds. Para verificar a robustez do método numérico, três problemas foram simulados, a saber: o problema do escoamento de Poiseuille, da expansão brusca e o de um jato livre sobre uma superfície

rígida impermeável. No caso do escoamento de Poiseuille, os resultados foram bastante encorajadores. Com relação a simulação do problema da expansão brusca, observou-se consistência com resultados da literatura para  $Re \leq 400$ . Quanto a simulação de um jato livre, os resultados numéricos foram comparados com a solução analítica de Watson. E neste caso, foram observadas algumas discrepâncias entre os resultados numéricos e o analítico. O presente trabalho abre perspectivas interessantes para os autores, e para o futuro planeja-se explorar as propriedades dos esquemas “upwind” para a simulação de escoamentos turbulentos 2D e 3D.

**Abstract.** In this work, modern high-order boundedness upwind schemes are included into the *Freeflow-2D* simulation system for numerical solution of two-dimensional incompressible fluid flows. Together with appropriate initial and boundary conditions, the conservation equations are solved by using the finite difference method. In order to demonstrate the capabilities of the current *Freeflow-2D* code, computational results for Poiseuille flow, flow over a backward facing step and jet impinging onto a solid surface are presented.

## Referências

- [1] M.A. Alves, P.J. Oliveira, F.T. Pinho, A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **41** (2003), 47-75.
- [2] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Periera, B. Schönung, Experimental and theoretical investigation of backward facing step flow, *J. Fluid Mechs.*, **127** (1983), 473.
- [3] A. Castelo, M.F. Tomé, S. Mckee, J.A. Cuminato, C.N.L. Cesar, Freeflow: an integrated simulation system for three-dimensional free surface flows, *Comput. Vizualization in Science*, **2** (2000), 1-12.
- [4] V.G. Ferreira, M.F. Tomé, N. Mangiavacchi, A. Castelo, J.A. Cuminato, A.O. Fortuna, S. McKee, High order upwinding and the hydraulic jump, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **39** (2002), 549-583.
- [5] J.P. Morris, P.J. Fox, Y. Zhu, Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *J. Comp. Physics*, **136** (1997), 214-226.
- [6] B. Song, G.R. Liu, K.Y. Lam, R.S. Amano, On a higher-order bounded discretization scheme, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **32** (2000), 881-897.
- [7] E.R. Stuart, K. Dochan, An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations, *Appl. Numer. Math.*, **8** (1991), 43-64.
- [8] A. Varonos, G. Bergeles, Development and assessment of a variable-order non-oscillatory for convection term discretization, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **26** (1998), 1-16.
- [9] E.J. Watson, The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane, *J. Fluid Mechs.*, **20** (1964), 481-499.