TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **7**, No. 1 (2006), 85-90.

Order Stars para os Métodos de Brown $(K, 2)$

M. MENEGUETTE Jr.[1], V.A. BOTTA[2], Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil.

Resumo. A ordem, a estabilidade e a convergência de métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias podem ser analisadas através de order stars, que são conjuntos que definem uma partição do plano complexo. Nesse trabalho, faremos essa análise para os métodos de Brown $(K, 2)$.

1. Introdução

O conceito de order stars foi introduzido, recentemente, por Wanner, Hairer e Nørsett [6]. É uma técnica desenvolvida para analisar a ordem e a estabilidade de métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias. É, em geral, muito útil para a análise de famílias de métodos e respectivas barreiras a que elas estão sujeitas principalmente em relação à estabilidade. A idéia principal é explorar diferentes características de algoritmos numéricos como propriedades de funções analíticas em várias regiões do plano complexo, ou seja, descrever ordem, estabilidade e suas relações como características de certas funções complexas.

Nesse trabalho, utilizamos a teoria de order stars para analisar a ordem, a convergência e a região de estabilidade dos métodos de Brown $(K, 2)$ para equações diferenciais ordinárias, dados por

$$\sum_{i=0}^{K} \alpha_i y_{n+i} = h\beta_1 f_{n+k} + h^2 \beta_2 f'_{n+k}, \tag{1.1}$$

onde β_1 é uma constante fixa e β_2 e α_i, $i = 0, 1, ..., K$, são constantes escolhidas para maximizar a ordem do método. Pode-se também fixar β_2 e determinar β_1. Esta família de métodos pode ser encontrada em [5]. O uso de uma derivada é relativamente comum na literatura (vide Enright [2]) e agrega informações aos métodos no sentido de melhoria da estabilidade. Os métodos de Brown $(K, 2)$ podem ser pensados como uma generalização dos métodos BDF que são próprios para problemas stiff por possuírem boa condição de estabilidade.

[1] messias@prudente.unesp.br.
[2] botta@prudente.unesp.br.

2. Order Stars

Os polinômios característicos do método (1.1) são dados por

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i \xi^i, \ \sigma_1(\xi) = \beta_1 \xi^K \text{ e } \sigma_2(\xi) = \beta_2 \xi^K.$$

É fácil ver que se (1.1) tem ordem p, então

$$\rho(e^h) - [h\sigma_1(e^h) - h^2\sigma_2(e^h)] = O(h^{p+1}).$$

Em seu artigo, Iserles [3] definiu a função geradora das order stars do método linear de K passos

$$\sum_{i=0}^{K} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{K} \beta_i f_{n+i}$$

como sendo a função

$$S(z) = \frac{\sigma(e^z)}{\rho(e^z)} - \frac{1}{z},$$

onde $\rho(z) = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i z^i$ e $\sigma(z) = \sum_{i=0}^{K} \beta_i z^i$.

Como extensão desse conceito, será considerado que as order stars para os métodos de Brown $(K, 2)$ serão geradas por

$$S(z) = \frac{\sigma_1(e^z) + z\sigma_2(e^z)}{\rho(e^z)} - \frac{1}{z}, \ z \in C$$

e representadas pelos conjuntos A_+ e A_-:

$$A_+ = \{z \in C / Re(S(z)) > 0\},$$

$$A_- = \{z \in C / Re(S(z)) < 0\},$$

$$A_0 = \{z \in C / Re(S(z)) = 0\}.$$

Esses conjuntos definem uma partição do plano complexo. Os setores formados em cada conjunto A_+ e A_- são chamadas de "dedos" de cada order stars.

A seguir, temos um resultado que relaciona a ordem do método numérico com a quantidade de setores das regiões A_+ e A_-, apresentado por Iserles [4]:

Proposição 2.1. *Se o método numérico tem ordem p, então $p-1$ setores de A_+ e $p-1$ setores de A_- aproximam-se da origem com ângulos assintóticos de $\pi/(p-1)$.*

A questão da zero-estabilidade e da consistência (ordem $p \geq 1$) de métodos numéricos é de extrema importância na teoria de equações diferenciais ordinárias, pois são condições necessárias e suficientes para a convergência do método. Como os métodos de Brown $(K, 2)$ têm ordem de consistência $p = K + 1$ (a demonstração encontra-se em [5]), faremos apenas uma análise dos métodos numéricos em relação à zero-estabilidade, já que os métodos de Brown $(K, 2)$, tendo ordem de consistência $K+1$, são sempre consistentes. Por outro lado, o aumento do passo K e conseqüentemente da ordem do método, aumenta o número de dedos das order stars e fica claro que se para um K especificado o método não é zero-estável, então outro método com passo maior que K também não o será.

A A-estabilidade dos métodos também pode ser estabelecida.

Teorema 2.1. *Um método multiderivativo de passo múltiplo genérico*

$$\sum_{i=0}^{K} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{K} \sum_{j=1}^{L} h^j \beta_{ij} f^{(j-1)}$$

de ordem p é $A-$estável somente se $p \leq 2L$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [4]. Observe, através desse resultado, que os métodos de Brown $(K, 2)$ são A-estáveis somente quando $p \leq 4$.

A A-estabilidade do método ou, equivalentemente, a A-aceitabilidade da aproximação S, pode ser analisada através de order stars pelo seguinte resultado de Iserles [4]:

Proposição 2.2. *A aproximação S é A-aceitável se, e somente se, A_- não tem intersecção com o eixo imaginário.*

Já em relação à zero-estabilidade, sabemos que o método numérico é zero-estável somente quando todas as raízes do polinômio característico $\rho(\xi)$ estão dentro do círculo unitário e as raízes de módulo 1 são simples. Assim, em Iserles [4], temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3. *O método é zero-estável quando os polos de $S(z)$ estiverem no semi-plano esquerdo fechado e quando os polos ao longo do eixo imaginário forem simples.*

As figuras a seguir representam as order stars dos métodos de Brown $(K, 2)$ para $K = 4, 5, 6, 10, 11, 12$. A área hachuriada representa A_+ e o complementar é a região A_-. Os pontos que encontram-se nas pontas de cada "dedo" da order stars A_- são os polos da aproximação S e o ponto na origem de cada figura representa a raíz principal de $\rho(z)$, ou seja, quando $h = 0$ é a raíz 1 de $\rho(z) = 0$.

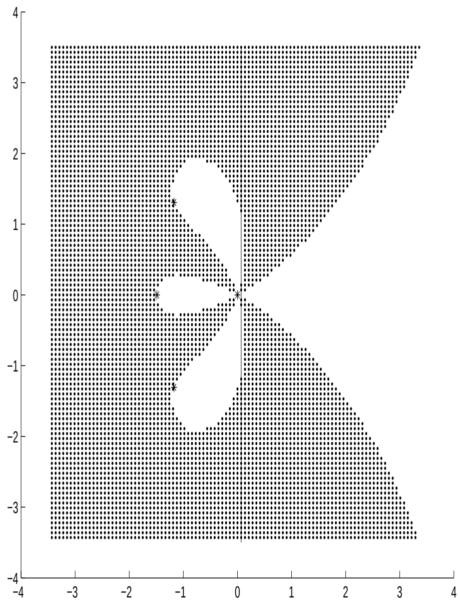

Figura 1: $K = 4$

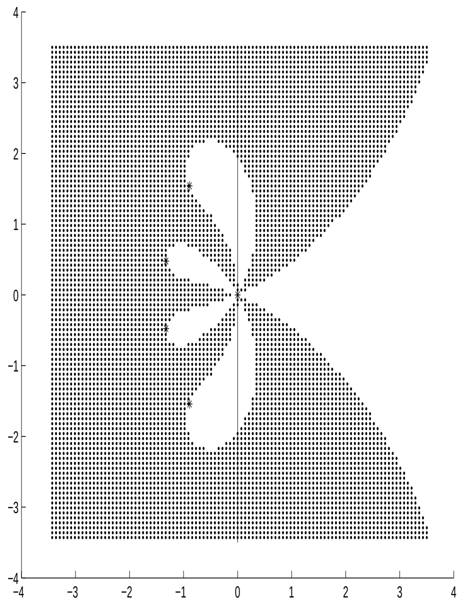

Figura 2: $K = 5$

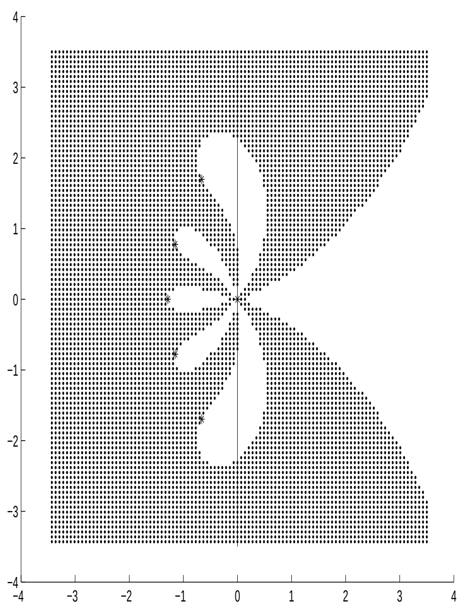

Figura 3: $K = 6$

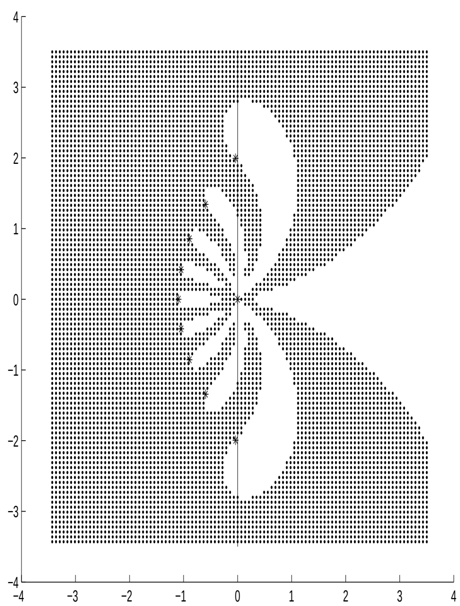

Figura 4: $K = 10$

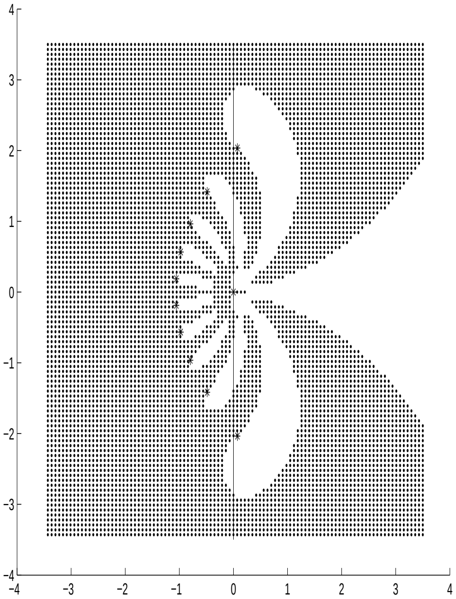

Figura 5: $K = 11$

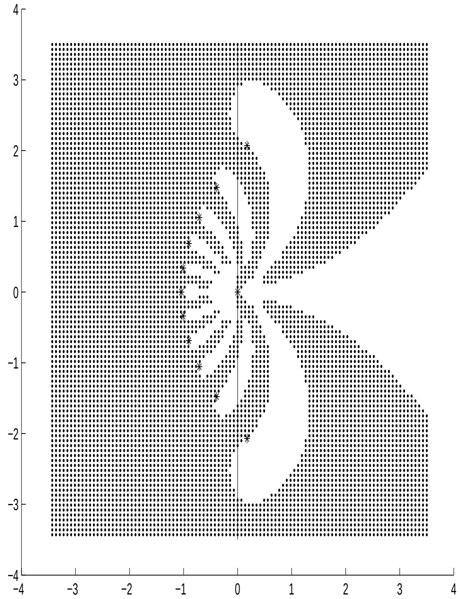

Figura 6: $K = 12$

3. Conclusão

Analisando as figuras, podemos observar que cada order stars possui $p - 1$ setores, onde p é a ordem do método. Por exemplo, cada order stars para o método de Brown $(4, 2)$, dado por

$$y_{n+4} - \frac{576}{415}y_{n+3} + \frac{216}{415}y_{n+2} - \frac{64}{415}y_{n+1} + \frac{9}{415}y_n = \frac{300}{415}hf_{n+5} - \frac{72}{415}h^2 f'_{n+5},$$

tem quatro setores, pois a ordem do método é 5.

A aproximação S para esse método é dada por

$$S(r) = \frac{\left(-\frac{72}{415}r^2 + \frac{60}{83}r - 1\right)e^{4r} + \frac{576}{415}e^{3r} - \frac{216}{415}e^{2r} + \frac{64}{415}e^{r} - \frac{9}{415}}{r\left(e^{4r} - \frac{576}{415}e^{3r} + \frac{216}{415}e^{2r} - \frac{64}{415}e^{r} + \frac{9}{415}\right)}.$$

Além disso, podemos ver que para $K = 4$, $A_- \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$ e para $K \geq 5$, $A_- \cap \{i\mathbb{R}\} \neq \emptyset$. Então, pela Proposição 2.2, os métodos de Brown $(K, 2)$ são A-estáveis somente quando $K \leq 4$, o que já era de se esperar pelo Teorema 2.1.

Em relação à zero estabilidade, a partir de $K = 11$, existem polos da aproximação S que encontram-se no semi-plano direito do sistema cartesiano. Portanto, pela Proposição 2.3, os métodos de Brown $(K, 2)$ são zero-estáveis para $K \leq 10$. Como tais métodos são consistentes e satisfazem a condição da raiz para $K \leq 10$ e praticamente estabelece que para $K \geq 11$ qualquer método não será zero-estável, segue, pelo clássico resultado de Dahlquist [1], que os métodos de Brown $(K, 2)$ são convergentes para $K \leq 10$, somente.

Abstract. The order, stability and convergency of numeric methods for ordinary differential equations can be analyzed by order stars, that are sets that define a partition of the complex plan. In this paper, we do this for the methods of Brown $(K, 2)$.

Referências

[1] G. Dahlquist, Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, *Math. Scand.*, **4** (1956), 33-53.

[2] W.H. Enright, Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations, *SIAM J. Num. Anal.*, **11** (1974), 321-331.

[3] A. Iserles e S.P. Nørsett, A proof of the first Dahlquist barrier by order stars, *BIT*, **24** (1984), 529-537.

[4] A. Iserles e S.P. Nørsett, "Order Stars", Chapman and Hall, London, 1991.

[5] M. Meneguette Jr., "Multistep multiderivative methods and related topics", Tese de Doutorado, Oxford, 1987.

[6] G. Wanner, E. Hairer e S.P. Nørsett, Order stars and stability theorems, *BIT*, **18** (1978), 475-489.