TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **7**, No. 1 (2006), 139-148.

T-Normas, T-Conormas, Complementos e Implicações Intervalares

A. TAKAHASHI[1], B.R.C. BEDREGAL[2], Departamento de Informática e Matemática Aplicada (DIMAp), Laboratório de Lógica e Inteligência Computacional (LabLIC), Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Campus Universitário, Lagoa Nova, 59078-970 Natal, RN, Brasil.

Resumo A lógica fuzzy modela matematicamente a imprecisão da linguagem natural, utilizando graus de pertinências (valores entre 0 e 1), contudo, nem sempre é simples especificar com precisão esses graus de pertinências. Existem infinitas formas de generalizar o comportamento dos conectivos lógicos clássicos (álgebra booleana) para valores no conjunto $[0, 1]$. As t-normas, t-conormas, implicações e complementos são operações sobre $[0, 1]$ satisfazendo certas propriedades que generalizam os conectivos lógicos de conjunção, disjunção, implicação e negação, respectivamente, de forma a preservar algumas das propriedades da lógica clássica desses conectivos.

Este trabalho consiste em introduzir uma generalização de t-norma, t-conorma, implicação e complemento, para o conjunto $\mathbb{I} = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, chamados de t-norma intervalar, t-conorma intervalar, implicação intervalar e complemento intervalar, de tal modo que, formas canônicas de se obter t-conorma intervalar, implicação intervalar e complemento intervalar a partir de uma t-norma intervalar sejam preservados.

1. Introdução

Na década de 60, Lotfi A. Zadeh em [22] propôs a teoria dos conjuntos fuzzy, cuja principal característica é considerar um grau de pertinência (um valor no intervalo [0,1]) para indicar o quanto uma informação pertence a um certo conjunto. Assim, na sua lógica subjacente, isto é, a lógica fuzzy (LF), uma proposição não é simplesmente verdadeira ou falsa, como na lógica clássica, mas pode ter graus de verdade intermediários, tipicamente valores entre 0 (falso absoluto) e 1 (verdade absoluta).

Um sistema computacional inteligente que utiliza lógica fuzzy, sistema fuzzy, é eficiente para tratar com informações incertas [4], onde, as incertezas encontradas na linguagem natural são tratadas por graus de pertinências, ou seja, considerando, por exemplo, um conjunto de pessoas “altas”, uma pessoa que possui 1,80 metro de altura e outra que possui 1,78 metro de altura serão consideradas altas, porém, a pessoa que possui 1,80 metro terá um grau de pertinência maior para o grupo

[1]adriana@ppgsc.ufrn.br. Bolsista do CNPq - Brasil;
[2]bedregal@dimap.ufrn.br. Parcialmente financiado pelo CNPq, processo 470871/2004-0.

de pessoas "altas" do que a outra pessoa deste conjunto. Contudo, a incorporação do conceito de "grau de verdade" ou grau de pertinência nem sempre é simples de definir, por exemplo, um especialista é capaz de definir o grau de pertinência em uma escala de 0 à 10 para uma determinada instrução, porém, dificilmente será capaz de definir o grau de pertinência para a mesma instrução se for aumentado essa escala para 0 à 100, ou seja, se for exigido uma maior precisão, possivelmente a resposta não seria tão precisa. Uma das alternativas pesquisadas é associar com a matemática intervalar, cujo objetivo é obter um controle automático do erro computacional e conseqüêntemente tratar da imprecisão dos dados [17].

A matemática intervalar tem sido muito utilizada para representar dados incertos e/ou valores qualitativos, seja na computação científica e tecnológica, assim como em inteligência artificial, processamento digital de imagens, entre outros [1, 3, 14]. Assim, a matemática intervalar aliada com a teoria fuzzy permite, em princípio, tratar tanto com a incerteza quanto com a imprecisão, seja no controle automático do erro computacional, tratando da imprecisão dos valores de entrada ou nos erros de arredondamento e/ou truncamento causados durante o processamento computacional [21, 6, 11, 19, 10]. Para a modelagem da incerteza e imprecisão de uma informação com respeito a uma determinada propriedade tem sido usado subintervalos de $[0, 1]$ para atribuir valores verdades às proposições fuzzy. Esta extensão da LF é conhecida como lógica fuzzy valorada intervalarmente ou simplesmente lógica fuzzy intervalar (LFI).

Existem muitas formas de estender os conectivos proposicionais clássicos para o conjunto $[0, 1]$, porém, nem sempre essas extensões preservam as propriedades lógicas dos conectivos clássicos. As normas triangulares, ou simplesmente t-normas, foram introduzidas por Menger [16] e, Schweizer e Skar [18] deram uma axiomática para as t-normas. A noção de t-normas e t-conormas conhecidas foram modeladas à partir dos conectivos de conjunção e disjunção, respectivamente. Outros conectivos proposicionais fuzzy são gerados através desses axiomas, desde que, exista uma ligação forte entre esses conectivos proposicionais fuzzy, sendo possível obter de forma canônica uma implicação fuzzy à partir de uma t-norma, ou uma negação fuzzy à partir de uma implicação [5].

Várias generizações de t-normas para conjuntos intervalares são encontradas na literatura [8, 23]. Neste trabalho, foi generalizado a noção de t-conormas, negação fuzzy e implicação fuzzy para a representação da teoria intervalar, e também foi introduzido a forma canônica de obter os conectivos fuzzy para a versão intervalar, mostrando que esses conectivos preservam as propriedades dos conectivos fuzzy.

2. T-normas e T-normas Intervalares

A norma triangular, ou também conhecida como t-norma, é uma operação binária utilizada geralmente para representar o operador **and**, ou a intersecção.

Definição 2.1 (T-norma). *Uma t-norma é uma função* $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ *que é: Simétrica, Associativa, Monotônica e* 1 *é um elemento neutro* [13, 20].

Seja $\mathbb{I}[0, 1] = \{[a, b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ o conjunto dos intervalos entre 0 e 1. Será usado por convenção que $X \in \mathbb{I}[0, 1]$ então $X = [x_i, x_s]$. Sendo possível definir diversas ordens parciais em $\mathbb{I}[0,1]$. As duas mais conhecidas são a dada por Kulisch e Miranker em [12]:

$$X \leq Y \text{ se e somente se } x_i \leq y_i \text{ e } x_s \leq y_s$$

e a ordem de inclusão dada por Moore em [17]:

$$X \subseteq Y \text{ se e somente se } y_i \leq x_i \text{ e } x_s \leq y_s.$$

Seja $\Delta \subseteq \mathbb{I}[0,1]$. O supremo de Δ, com respeito à ordem de Kulisch-Miranker é

$$\sup(\Delta) = [\sup\{x_i \mid X \in \Delta\}, \sup\{x_s \mid X \in \Delta\}].$$

Os especialistas podem descrever suas incertezas com graus de pertinências precisos, mas como dizer, por exemplo, que o grau de pertinência de uma pessoa pertence ao conjunto dos altos é $\sqrt{0.2}$. Assim, o mais correto seria usar intervalos como graus de pertinências. Portanto, a noção de t-norma deve ser estendida para intervalos.

Definição 2.2 (T-norma intervalar). *Uma função $IT : \mathbb{I}[0,1]^2 \to \mathbb{I}[0,1]$ é uma t-norma intervalar se IT for simétrica, associativa, monotônica com respeito à ordem de Kulisch-Miranker e à inclusão, e $[1,1]$ é um elemento neutro.*

Proposição 2.1. *Se $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma t-norma real, então $I[T] : \mathbb{I}[0,1]^2 \to \mathbb{I}[0,1]$ definida por*

$$I[T](X,Y) = [T(x_i, y_i), T(x_s, y_s)]. \tag{2.1}$$

é uma t-norma intervalar, denominada de t-norma intervalar derivada de T.

Demonstração: Por definição de intervalo, $x_i \leq x_s$ e $y_i \leq y_s$, então pela monotonicidade de T, temos que $T(x_i, y_i) \leq T(x_s, y_s)$. Logo, $I[T]$ está bem definida.

A seguir será provado que $I[T]$ é uma t-norma intervalar, ou seja, que satisfaz as seguintes propriedades:

Simétrica: $\forall X, Y \in \mathbb{I}[0,1]$

$$\begin{aligned} I[T](X,Y) &= [T(x_i, y_i), T(x_s, y_s)] \\ &= [T(y_i, x_i), T(y_s, x_s)] \\ &= I[T](Y, X). \end{aligned}$$

Associativa: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{I}[0,1]$

$$\begin{aligned} I[T](X, I[T](Y,Z)) &= I[T](X, [T(y_i, z_i), T(y_s, z_s)]) \\ &= [T(x_i, T(y_i, z_i)), T(x_s, T(y_s, z_s))] \\ &= [T(T(x_i, y_i), z_i), T(T(x_s, y_s), z_s)] \\ &= I[T]([T(x_i, y_i), T(x_s, y_s)], Z) \\ &= I[T](I[T](X,Y), Z). \end{aligned}$$

Monotônica: Se $X \leq Z$ e $Y \leq W$ então $x_i \leq z_i$, $x_s \leq z_s$, $y_i \leq w_i$ e $y_s \leq w_s$. Logo, $T(x_i, y_i) \leq T(z_i, w_i)$ e $T(x_s, y_s) \leq T(z_s, w_s)$. Assim, $[T(x_i, y_i), T(x_s, y_s)] \leq [T(z_i, w_i), T(z_s, w_s)]$ e portanto $I[T](X,Y) \leq I[T](Z,W)$.

Inclusão monotônica: Se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq W$, então $z_i \leq x_i \leq x_s \leq z_s$ e $w_i \leq y_i \leq y_s \leq w_s$. Por definição, $I[T](X,Y) = [T(x_i,y_i), T(x_s,y_s)]$ e $I[T](Z,W) = [T(z_i,w_i), T(z_s,w_s)]$. Logo, por monotonicidade de T, $T(z_i,w_i) \leq T(x_i,y_i) \leq T(x_s,y_s) \leq T(z_s,w_s)$. Portanto, $I[T](X,Y) \subseteq I[T](Z,W)$.

Elemento Neutro: $\forall X \in \mathbb{I}[0,1]$,

$$\begin{aligned} I[T](X,[1,1]) &= [T(x_i,1), T(x_s,1)] \\ &= [x_i, x_s] \\ &= X. \end{aligned}$$

■

3. T-conormas e T-conormas Intervalares

Uma t-conorma é uma implementação da união, ou do operador **or**.

Definição 3.1 (T-conorma). *Uma conorma triangular (t-conorma ou co-norma), é uma função $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ que é: Simétrica, Associativa, Monotônica e 0 é um elemento neutro [13, 20]:*

Seja T uma t-norma, então,

$$S_T(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) \tag{3.1}$$

é uma t-conorma, denominada de t-conorma derivada de T.

A t-conorma intervalar é uma extensão da t-conorma.

Definição 3.2 (T-conorma intervalar). *Uma função $IS : \mathbb{I}[0,1]^2 \to \mathbb{I}[0,1]$ é uma t-conorma intervalar se IS for simétrica, associativa, monotônica, e $[0,0]$ é um elemento neutro.*

Proposição 3.1. *Se $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma t-conorma, então $I[S] : \mathbb{I}[0,1]^2 \to \mathbb{I}[0,1]$ definida por*

$$I[S](X,Y) = [S(x_i,y_i), S(x_s,y_s)] \tag{3.2}$$

é uma t-conorma intervalar, denominada de t-conorma intervalar derivada da t-conorma S.

Demonstração: Análoga à prova da proposição 2.1. ■

Proposição 3.2. *Seja IT uma t-norma intervalar. Então $S_{IT} : \mathbb{I}[0,1]^2 \to \mathbb{I}[0,1]$ definida por*

$$S_{IT}(X,Y) = [1,1] - IT([1,1] - X, [1,1] - Y) \tag{3.3}$$

é uma t-conorma intervalar, denominada de t-conorma intervalar derivada de IT

Demonstração: A seguir, será provado que S_{IT} satisfaz as seguintes propriedades de t-conorma intervalar.

Simétrica: $\forall X, Y \in \mathbb{I}[0,1]$

$$\begin{aligned} S_{IT}(X,Y) &= [1,1] - IT([1,1]-X,[1,1]-Y) \\ &= [1,1] - IT([1,1]-Y,[1,1]-X) \\ &= S_{IT}(Y,X). \end{aligned}$$

Associativa: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{I}[0,1]$

$$\begin{aligned} S_{IT}(X,S_{IT}(Y,Z)) &= S_{IT}(X,[1,1]-IT([1,1]-Y,[1,1]-Z)) \\ &= [1,1]-IT([1,1]-X,[1,1]-([1,1]-IT([1,1]-Y,[1,1]-Z))) \\ &= [1,1]-IT([1,1]-X,IT([1,1]-Y,[1,1]-Z)) \\ &= [1,1]-IT(IT([1,1]-X,[1,1]-Y),[1,1]-Z) \\ &= [1,1]-IT([1,1]-([1,1]-IT([1,1]-X,[1,1]-Y)),[1,1]-Z) \\ &= S_{IT}([1,1]-IT([1,1]-X,[1,1]-Y),Z) \\ &= S_{IT}(S_{IT}(X,Y),Z). \end{aligned}$$

Monotônica: Se $X \le Z$ e $Y \le W$ então $[1,1]-X \le [1,1]-Z$ e $[1,1]-Y \le [1,1]-W$. Logo, por monotonicidade de IT, $IT([1,1]-X,[1,1]-Y) \le IT([1,1]-Z,[1,1]-W)$. Portanto, $[1,1]-IT([1,1]-X,[1,1]-Y) \le [1,1]-IT([1,1]-Z,[1,1]-W)$. Assim, $S_{IT}(X,Y) \le S_{IT}(Z,W)$.

Inclusão monotônica: Se Se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq W$ então $[1,1]-X \subseteq [1,1]-Z$ e $[1,1]-Y \subseteq [1,1]-W$. Logo, por monotonicidade de IT, $IT([1,1]-X,[1,1]-Y) \subseteq IT([1,1]-Z,[1,1]-W)$. Portanto, $[1,1]-IT([1,1]-X,[1,1]-Y) \subseteq [1,1]-IT([1,1]-Z,[1,1]-W)$. Assim, $S_{IT}(X,Y) \subseteq S_{IT}(Z,W)$.

Elemento Neutro: $\forall X \in \mathbb{I}[0,1]$,

$$\begin{aligned} S_{IT}(X,[0,0]) &= [1,1]-IT([1,1]-X,[1,1]-[0,0]) \\ &= [1,1]-IT([1,1]-X,[1,1]) \\ &= [1,1]-([1,1]-X) \\ &= X. \end{aligned}$$

■

A seguir será provado que as construções de t-conormas intervalares à partir de t-conormas são derivadas de uma t-norma, corresponde com a de t-conorma intervalar derivada da t-norma intervalar obtida à partir da t-norma. Ou seja, que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "2.1"] \arrow[d, "3.1"'] & IT \arrow[d, "3.3"] \\ S \arrow[r, "3.2"] & IS \end{tikzcd}$$

comuta.

Teorema 3.1. *Seja T uma t-norma real, então $I[S_T] = S_{I[T]}$.*

Demonstração:

$$\begin{array}{rcl} I[S_T](X,Y) & = & [S_T(x_i,y_i), S_T(x_s,y_s)] \\ & = & [1-T(1-x_i,1-y_i), 1-T(1-x_s,1-y_s)] \\ & = & [1,1]-[T(1-x_s,1-y_s), T(1-x_i,1-y_i)] \\ & = & [1,1]-I[T]([1-x_s,1-x_i],[1-y_s,1-y_i]) \\ & = & [1,1]-I[T]([1,1]-X,[1,1]-Y) \\ & = & S_{I[T]}(X,Y). \end{array}$$

■

4. Implicação e Implicação intervalar

O operador de implicação é utilizado para modelar regras de inferência do tipo *se <premissa> então <conclusão>*.

Definição 4.1 (Implicação). *Uma função $P : [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma função de implicação se a função satisfaz as seguintes propriedades, ver em* [2, 13, 5, 9, 7]*:*

P1: Se $x \leq z$ implica que $P(x,y) \geq P(z,y)$, $\forall x,y,z \in [0,1]$.

P2: Se $y \leq z$ implica que $P(x,y) \leq P(x,z)$, $\forall x,y,z \in [0,1]$.

P3: $P(0,y) = 1$, $\forall y \in [0,1]$.

P4: $P(x,1) = 1$, $\forall y \in [0,1]$.

P5: $P(1,0) = 0$.

Seja T uma t-norma. Então a função definida por

$$P_T(x,y) = \sup\{z \mid T(x,z) \leq y\}, \forall x,y,z \in [0,1] \tag{4.1}$$

é uma implicação, conhecida como R-implicação associada a T ou residuo de T.

Definição 4.2 (Implicação intervalar). *Uma função $IP : \mathbb{I}[0,1]^2 \to \mathbb{I}[0,1]$ é uma implicação intervalar se $\forall X,Y,Z \in \mathbb{I}[0,1]$, IP satisfazer as propriedades:*

IP1: Se $X \leq Z$ então $IP(X,Y) \geq IP(Z,Y)$.

IP2: Se $Y \leq Z$ então $IP(X,Y) \leq IP(X,Z)$.

IP3: Se $W \subseteq Y$ e $X \subseteq Z$ então $IP(W,X) \supseteq IP(Y,Z)$.

IP4: $IP([0,0],Y) = [1,1]$.

IP5: $IP(X,[1,1]) = [1,1]$.

IP6: $IP([1,1],[0,0]) = [0,0]$.

Proposição 4.1. *Se $P : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ é uma implicação real, então $I[P] : \mathbb{I}[0,1]^2 \rightarrow \mathbb{I}[0,1]$ definida por*

$$I[P](X,Y) = [P(x_s, y_i), P(x_i, y_s)] \tag{4.2}$$

é uma implicação intervalar, denominada de implicação intervalar derivada da implicação P.

Demonstração: Por definição de intervalo, $IP(X,Y)$ está bem definida, pois, $P(x_s \leq y_i) \leq P(x_i \leq x_i) \leq P(x_i \leq y_s)$.

Sejam $X, Y, Z, \in I[0,1]$.

IP1: Se $X \leq Z$ então, por P1, $P(x_s, y_i) \geq P(z_s, y_i)$ e $P(x_i, y_s) \geq P(z_i, y_s)$ então $I[P](X,Y) \geq I[P](Z,Y)$.

IP2: Se $Y \leq Z$ então, por P2, $P(x_s, y_i) \leq P(x_s, z_i)$ e $P(x_i, y_s) \leq P(x_i, z_s)$ então $I[P](X,Y) \leq I[P](Z,Y)$.

IP3: Se $W \subseteq Y$ e $X \subseteq Z$ então, por P2, $P(w_s, x_i) \geq P(w_s, z_i)$ e por P1, $P(w_s, z_i) \geq P(y_s, z_i)$. Logo, $P(w_s, x_i) \geq P(y_s, z_i)]$. Analogamente, por P2, $P(w_i, x_s) \leq P(w_i, z_s)$ e por P1, $P(w_i, z_s) \geq P(y_i, z_s)$. Então, $I[P](W,X) \subseteq I[P](Y,Z)$.

IP4: $I[P]([0,0],Y) = [P(0,y_i), P(0,y_s)] = [1,1]$.

IP5: $I[P](X,[1,1]) = [P(x_s,1), P(x_i,1)] = [1,1]$.

IP6: $I[P]([1,1],[0,0]) = [P(1,0), P(1,0)] = [0,0]$.

■

Proposição 4.2. *Seja IT uma t-norma intervalar. Então $IP_{IT} : I[0,1]^2 \rightarrow I[0,1]$ definida por*

$$IP_{IT}(X,Y) = \sup\{Z \in I[0,1] \mid IT(X,Z) \leq Y\} \tag{4.3}$$

é uma implicação intervalar.

A seguir será provado que as construções implicação intervalar a partir de implicações derivadas de uma t-norma, corresponde com a de implicação intervalar derivada da t-norma intervalar obtida a partir da t-norma. Ou seja, que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "2.1"] \arrow[d, "4.1"'] & IT \arrow[d, "4.3"] \\ P \arrow[r, "4.2"] & IP \end{tikzcd}$$

comuta.

Teorema 4.1. *Seja T uma t-norma real, então $I[P_T] = P_{I[T]}$*

Demonstração: Note que claramente o conjunto $\{Z \in \mathbb{I}[0,1] \mid [T(x_i,z_i),T(x_s,z_s)] \leq Y\}$ é dirigido com respeito à ordem de Kulisch-Mikranker. Assim,

$$\begin{aligned}
P_{I[T]}(X,Y) &= \sup\{Z \in \mathbb{I}[0,1] \mid I[T](X,Z) \leq Y\} \\
&= \sup\{Z \in \mathbb{I}[0,1] \mid [T(x_i,z_i),T(x_s,z_s)] \leq Y\} \\
&= [\sup\{z \in [0,1] \mid T(x_s,z) \leq y_i\}, \sup\{z \in [0,1] \mid T(x_i,z) \leq y_s\}] \\
&= [P_T(x_i,y_i), P_(x_s,y_s)] \\
&= I[P_T].
\end{aligned}$$

■

5. Complemento e Complemento Intervalar

Na teoria dos conjuntos fuzzy temos o operador de complemento, ou negação fuzzy, para interpretar o operador lógico de negação.

Definição 5.1 (Complemento). *Uma função $C : [0,1] \to [0,1]$ é um complemento se a função satisfaz as seguintes propriedades:*

C1: $C(0) = 1$, $C(1) = 0$.

C2: Se $x \geq y$ então $C(x) \leq C(y)$, $\forall x,y \in [0,1]$.

Se C também satisfaz:

C3: $C(C(x)) = x$, $\forall x \in [0,1]$.

então é chamado de complemento forte.

O complemento intervalar é uma derivação do complemento dos conjuntos fuzzy, satisfazendo suas propriedades e também da teoria intervalar.

Definição 5.2 (Complemento intervalar). *Uma função $IC : \mathbb{I}[0,1] \to \mathbb{I}[0,1]$ é um complemento intervalar se,*

IC1: $IC([0,0]) = [1,1]$ *e* $IC([1,1]) = [0,0]$.

IC2: Se $X \geq Y$ então $IC(X) \leq IC(Y)$, $\forall X,Y \in I[0,1]$.

IC3: Se $X \subseteq Y$ então $IC(X) \subseteq IC(Y)$, $\forall X,Y \in I[0,1]$.

Um complemento intervalar IC é forte, se

IC4: $IC(IC(X)) = X$, $\forall X \in I[0,1]$.

Proposição 5.1. *Se $C : [0,1] \to [0,1]$ é um complemento, então $IC : I[0,1] \to I[0,1]$ definida por*

$$I[C](X) = [C(x_s), C(x_i)] \tag{5.1}$$

é um complemento intervalar, denominada de complemento intervalar derivado do complemento C. Se C é um complemento forte então $I[C]$ é um complemento intervalar forte.

Demonstração: Segue o mesmo formato que a prova da proposição 2.1. ■

6. Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado extensões intervalares dos modelos fuzzy para os operadores lógicos de conjunção, disjunção, implicação e negação. Ainda, foi mostrado como as formas canônicas de se obter alguns desses operadores à partir da t-norma são preservados pela construção intervalar.

A extensão proposta aqui para t-normas é diferente de outras generalizações de t-normas para intervalos, tais como as definida por [23, 8]. A primeira exige além destas propriedades que a função seja contínua e estritamente monotônica com respeito à ordem de Kulisch-Miranker, com o qual, nem toda t-norma real teria uma t-norma intervalar que estendesse ela. A segunda exige que $IT([0,1],[x_i,x_s]) = [0,x_s]$ e não requer que satisfaça a inclusão monotônica, entre outras propriedades. Nesse trabalho, cada t-norma intervalar tem associado uma única t-norma, porém, nem toda t-norma tem associada uma t-norma intervalar, com o qual, não é possível generalizar intervalarmente todas as interpretações fuzzy dos conectivos lógicos.

Assim, as generalizações aqui apresentadas demarcam o início de um estudo sobre lógica fuzzy intervalar no sentido estreito [15], na qual as construções e conceitos usuais para o caso pontual sejam estendidas, preservando o máximo possível, as relações entre eles.

Referências

[1] M.S. Aguiar, A.C.R. Costa e G.P. Dimuro, ICTM: An interval tessellation-based model for reliable topographic segmentation. *Numerical Algorithms*, **36** (2004), 1-10.

[2] M. Baczynski, Residual implications revisited. notes on the Smets-Magrez. *Fuzzy Sets and Systems*, **145**, No. 2 (2004), 267-277.

[3] L.V. Barboza, G.P. Dimuro e R.H.S. Reiser, Power flow with load uncertainty. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **5** (2004), 27-36.

[4] G. Bojadziev e M. Bojadziev, "Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications", volume 5. World Scientific, 1995.

[5] H. Bustince, P. Burilo e F. Soria, Automorphism, negations and implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **134** (2003), 209-229.

[6] D. Dubois e H. Prade, Random sets and fuzzy interval analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, **42** (1991), 87-101.

[7] J.C. Fodor, On fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **42** (1991), 293-300.

[8] M. Gehrke, C. Walker e E. Walker, Algebraic aspects of fuzzy sets and fuzzy logic. *Proceedings of Workshop on Current Trends and Develoments in Fuzzy Logic*, pp. 101-170, 1999.

[9] R. Horcik e M. Navara, Validation sets in fuzzy logics. *Kybernetika*, **38** No. 3 (2002), 319-326.

[10] L.J. Kohout e E. Kim, Characterization ofinterval fuzzy logic systems of connectives by group transformation. *Reliable Computing*, **10** (2004), 299-334.

[11] V. Kreinovich e M. Mukaidono, Interval (pairs of fuzzy values), triples, etc.: Can we thus get an arbitrary ordering? *Proceedings of the* 9^{th} *IEEE International Conference on Fuzzy Systems.* San Antonio, Texas, **1** (2000), 234-238.

[12] U.B. Kulisch e W.L. Miranker, "Computer Arithmetic Theory and Pratice", Academic Press, San Diego, 1981.

[13] J.M. Leski, Insensitive learning techniques for approximate reasoning system. *Int. J. Computational Cognition*, **1**, No. 1 (2003), 21-77.

[14] A. Lyra, B.R.C. Bedregal, R. Callejas-Bedregal e A.D. Doria Neto, The interval digital images processing. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, **3**, No. 2 (2004), 229-233.

[15] R.J. Marks-II, "Fuzzy logic technology and applications", chapter Preface by L.A. Zadeh. IEEE Technical Activities Board, 1994.

[16] K. Menger, Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad.*, pp. 535-537, 1942.

[17] R.E. Moore, *Methods and Applications of Interval Arithmetic.* PhD thesis, Studies in Applied Mathematics - SIAM, 1979.

[18] B. Schweizer e A. Sklar, Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, pp. 168-186, 1961.

[19] M.M.M.T. Silveira e B.R.C. Bedregal, A method of inference and defuzzyfication fuzzy interval. *Proceeding of the IASTED International Conference on Artificial Intelligence e Applications*, pp. 242-247, 2001.

[20] L.H. Tsoukalas e R.E. Uhrig, *Fuzzy e Neural Approaches in Engineering.* Wiley Interscience, 1997.

[21] I.B. Turksen, Interval valued fuzzy sets based on normal forms. *Fuzzy Sets and Systems*, **20** (1986), 191-210.

[22] L.A. Zadeh, Fuzzy sets. *Proc. Nat. Acad.*, pp. 535-537, 1942.

[23] Q. Zuo, Description of strictly monotonic interval AND/OR operations. *APIC'S Proceedings: International Workshop on Applications of Interval Computations*, pp. 232-235, 1995.