

Acoplamento de Expressão Unidimensional de Recarga a Modelos de Elementos Analíticos

J.A.N. BATISTA,¹ E. WENDLAND, H.E. SCHULZ, Departamento de Hidráulica e Saneamento, EESC-USP, Av. Trabalhador Sancarlense 400, 13566-590 São Carlos, SP, Brasil.

Resumo. Este trabalho diz respeito à aplicação do Método de Elementos Analíticos, desenvolvido originariamente para domínios infinitos, a um problema de escoamento subterrâneo caracterizado em domínio semi-infinito. A aplicação de Elementos Analíticos a esses domínios exige a utilização de métodos auxiliares (por exemplo o método de imagens) que, em contra partida, eliminam a necessidade da utilização de elementos convencionais para a representação de efeitos regionais (por exemplo a recarga direta do aquífero) dando assim lugar à utilização de expressões unidimensionais. A modelagem de problemas em meios porosos com essa técnica reproduz com precisão o campo de escoamento em regiões semi-infinitas.

1. Introdução

As formações geológicas por onde escoam os fluidos subterrâneos ocorrem geralmente sobre áreas que se estendem muito além das regiões onde são estudados problemas de escoamento. Comumente, essas formações apresentam-se em formas alongadas, ou seja, estreitas em relação à sua direção de maior comprimento. Neste trabalho é caracterizado um problema de escoamento no aquífero Barreiras, litoral Nordeste do Brasil. O aquífero é representado em uma faixa de domínio semi-infinita e é modelado a partir do Método de Elementos Analíticos. A região abordada tem sido adotada como fonte de captação de água em projetos de abastecimento de comunidades distantes, sendo necessário avaliar as interferências desses projetos sobre o comportamento natural do manancial.

O Método de Elementos Analíticos (da literatura internacional, *Analytic Element Method*, AEM) é um método computacional para a obtenção de soluções em campos vetoriais utilizando-se para tanto a sobreposição de soluções analíticas elementares. O Método de Elementos Analíticos pode ser aplicado tanto em domínios finitos como em domínios infinitos. Os primeiros passos para o desenvolvimento do Método foram dados no início da década de setenta com o objetivo de construir um modelo de escoamento subterrâneo para a avaliação dos efeitos da construção de um canal entre os rios Tennessee e Tombigbee sobre o escoamento nos aquíferos da região. O projeto demandava do modelo a representação do escoamento tanto em escala regional (inicialmente 80 por 130 km) como em escala local [12, 13].

¹Bolsista de doutorado do CNPq, Email: nbatista@sc.usp.br.

Atualmente a aplicação mais extensa em área de abrangência territorial é o Modelo Nacional Holandês de Águas Subterrâneas atribuído a [3] e apresentado em (<http://www.taaw.nl/NL/producten/waterbeheer/nagrom/nagrom.htm>). O método permite obter informações de escala local mesmo em abordagens de grande escala como essa, devido à representação de efeitos por meio de funções analíticas.

A formulação empregada no desenvolvimento das funções utilizadas como elementos no AEM tem origem em técnicas bastante conhecidas em Águas Subterrâneas e na Teoria Linear da Elasticidade. A descrição do método e aplicações das Integrais de Cauchy e de Elementos de Contorno em teoria elástica é feita, por exemplo, por [9, 10]. Em Águas Subterrâneas, essas técnicas são apresentadas, por exemplo, por [11]. Distribuições de vórtices foram também amplamente empregadas em diversos problemas em ambas as áreas (eg., [2]).

2. Formulação do Método

Os elementos analíticos são representados matematicamente por soluções obtidas para potenciais complexos. Essas expressões contêm parâmetros que são determinados de forma a satisfazer as condições de contorno. O potencial de referência, definido pela somatória das constantes de integração presentes em cada expressão utilizada, é um dos parâmetros a serem determinados no modelo. Tais condições de contorno não são satisfeitas de forma exata, mas de forma tão precisa quanto possível para um dado número de graus de liberdade e natureza dos elementos. O escoamento irrotacional em aquíferos de uma só camada dispõe de uma formulação bastante amadurecida no AEM e a precisão dos resultados depende somente do desempenho das máquinas utilizadas [14]. Passamos a discutir de maneira breve, modelos de elementos analíticos para aquíferos de uma só camada [15, 5].

Define-se o vetor de descarga específica [LT^{-1}] em um aquífero plano a partir da lei de Darcy (equação (2.2)) expressa por:

$$\begin{aligned} q_x &= -K \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ q_y &= -K \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde K é a condutividade hidráulica [LT^{-1}] e ϕ é a carga hidráulica [L]. O vetor de descarga total (Q) representa a vazão [L^2T^{-1}] que atravessa a espessura de escoamento. A aproximação de Dupuit-Forchheimer considera que o vetor de descarga específica é uniforme em toda espessura do escoamento, assim as componentes Q_x e Q_y podem ser escritas como $Q_x = h q_x$ e $Q_y = h q_y$, onde h é a espessura do escoamento saturado no aquífero.

Considerando-se apenas casos onde as propriedades do aquífero são constantes em regiões de áreas finitas, o potencial de descarga [L^3T^{-1}] existe tanto para aquíferos confinados como livres na forma da equação (2.2):

$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.2)$$

$$Q_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Faz-se $\Phi = \frac{1}{2}Kh^2 = \frac{1}{2}K(\phi - b)^2$ para $\phi \leq H$ e $\Phi = KH(\phi - b) - \frac{1}{2}KH^2$ para $\phi \geq H$, onde b é a cota da base do aquífero [L], $h = \phi - b$, é a espessura saturada para aquíferos livres [L] e H , a espessura do aquífero confinado [L]. Note-se que a constante $KH^2/2$ na expressão do potencial para escoamento confinado ($\phi \geq H$) é adotada de forma que o potencial seja válido em aquíferos onde $\phi = H$, ou seja, o escoamento pode ser considerado tanto confinado como livre.

A “mola mestra” da formulação do Método de Elementos Analíticos é a definição do potencial complexo a partir de integrais singulares em linhas a serem utilizadas como elementos [15, 9, 10]. O potencial complexo (equação (2.3)) é definido por uma componente de energia potencial real (Φ), definida na equação (2.2), e uma complexa (Ψ), definida pela condição de Cauchy-Riemann (equação (2.4)), que expressa as linhas de corrente do escoamento.

$$\Omega = \Phi + i\Psi, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial x} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

As linhas de corrente são expressas em termos de descarga específica pela equação (2.5):

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \\ Q_y &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Estão caracterizados basicamente dois tipos de elementos unifilares (sejam retilíneos ou curvilíneos) na formulação do AEM: as *line-dipole* e as *line-doublet*. O potencial complexo para uma *line-doublet* apresenta uma descontinuidade na componente real de Ω , ou seja, o potencial (Ψ). Uma *line-dipole*, por sua vez, exhibe descontinuidade na componente imaginária de Ω ou seja, nas linhas de corrente (Ψ). Geometricamente, as *line-dipole* são constituídas por dipolos alinhados sobre uma mesma linha. As *line-doublets* são constituídas por dipolos dispostos lado a lado, todos com a mesma orientação (Figura 1).

Note-se que em ambos os casos, apenas uma componente apresenta descontinuidade enquanto a componente correlata permanece contínua. A discussão completa da formulação de elementos e da aproximação do intervalo deixado pela descontinuidade de Ω por intermédio de polinômios de ordem menor que três são discutidos em [15]. Janković [6] apresenta aproximações polinomiais de ordem superior por intermédio de polinômios de Chebyshev [4] introduzindo técnicas de sobreespecificação ao AEM.

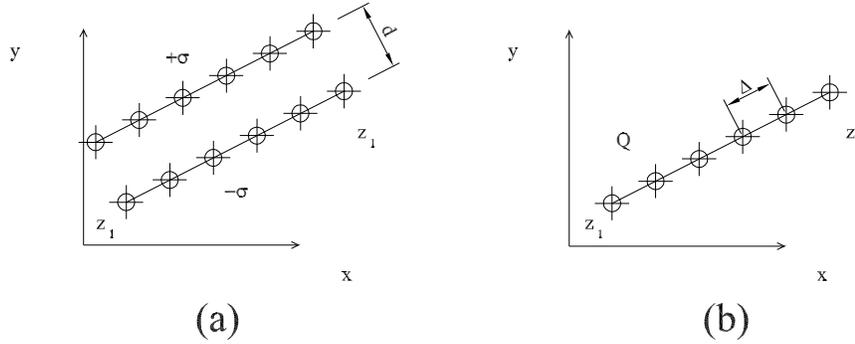


Figura 1: a) Esquema matemático do elemento *line-doublet*; b) Esquema matemático do elemento *line-sink*

O Método pode ser enunciado em termos de um campo vetorial qualquer descrito por intermédio de expressões que possam ser sobrepostas. Um campo vetorial Q_i é de maneira geral formulado em termos de divergência e rotacionalidade. Utilizando-se a convenção de Einstein para as coordenadas, considere que a rotacionalidade do campo seja representada por β e a divergência por $-\gamma$. Em um campo sem divergência, sua descrição é feita apenas pelo gradiente de um escalar chamado função de corrente (Ψ) expresso na equação (2.6):

$$Q_i = -\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}, \quad (2.6)$$

onde ε_{ij} é um tensor de segunda ordem. Semelhantemente, o campo irrotacional pode ser representado apenas pelo gradiente do potencial (equação (2.7)):

$$Q_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (2.7)$$

Se os valores de β e γ são conhecidos, Ψ (equação (2.8)) e Φ (equação (2.9)) serão então dados pelas seguintes equações:

$$\nabla^2 \Psi = \beta, \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \Phi = \gamma. \quad (2.9)$$

De acordo com o teorema de Helmholtz, a porção do campo que não contribui para a rotacionalidade nem para a divergência do campo é escrita em termos do gradiente de um potencial ou em termos do rotacional da função de corrente (equação (2.10)):

$$Q_i^{ha} = -\frac{\partial \Phi^{ha}}{\partial x_i} = -\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Psi^{ha}}{\partial x_j}, \quad (2.10)$$

onde ε_{ij} representa a rotação e o sobrescrito *ha* está relacionado ao termo harmônico. Finalmente, a descrição completa de um campo vetorial generalizado (equação (2.11)) é dada pela soma dos três campos:

$$Q_i = Q_i^\beta + Q_i^\gamma + Q_i^{ha}. \quad (2.11)$$

3. Escoamento Unidimensional da Recarga

Embora, os aquíferos possuam geometrias irregulares, a caracterização de aquíferos estreitos como faixa permite a abordagem de efeitos regionais de forma simplificada eliminando-se a necessidade da utilização de elementos convencionais para a representação da recarga direta do aquífero.

Além disso, considerando-se um aquífero onde uma das formações ocorre em maiores proporções, representa-se a formação de maior ocorrência de maneira homogênea (condutividade K e profundidade da base b) e a recarga (N) uniformemente distribuída. Esquematicamente, a distância entre os contornos e a distribuição de potencial são ilustrados na Figura 2.

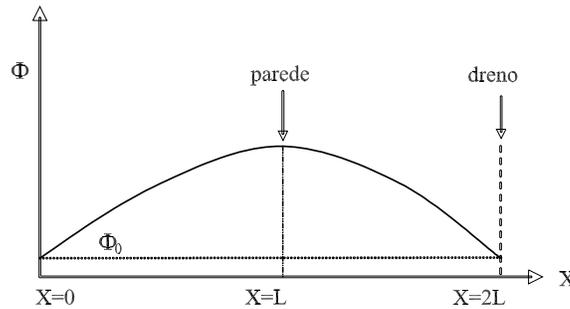


Figura 2: Perfil de potenciais devido à recarga entre dois drenos paralelos

A expressão para esse escoamento é dada pela solução do escoamento unidimensional entre dois drenos (equação (3.1)):

$$\Phi_0 = -\frac{N}{2}X^2 + NLX + \Phi_0, \quad (3.1)$$

onde L [L] é a distância entre a fronteira impermeável e a fronteira permeável; Φ_0 [L^3T^{-1}] é o potencial de descarga na fronteira permeável ($\Phi_0 = \frac{K}{2}h_0^2$), onde h_0 é a carga piezométrica; e X [L] é a posição a partir da fronteira permeável.

A expressão é utilizada no plano horizontal na forma a seguir (equação (3.2)), onde ξ e η são as componentes da distância do ponto de referência até a posição considerada no sistema de coordenadas e α , a rotação das fronteiras em relação à direção y .

$$\Phi_0 = -\frac{N}{2}(\xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha)^2 + NL(\xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha) + \Phi_0. \quad (3.2)$$

4. O Método de Imagens

A representação unidimensional da recarga de aquíferos estreitos abrange uma região semi-infinita enquanto as funções utilizadas no Método de Elementos Analíticos são soluções obtidas para um domínio infinito. A utilização desses elementos em domínios semi-infinitos, por entando, exige a utilização de métodos auxiliares (e.g. mapeamento conforme, Método de Imagens) para a imposição das condições dos contornos externos ao comportamento do elemento. Neste trabalho o Método de Imagens (MI) é utilizado para a imposição dos contornos de uma faixa infinita que contém a região a ser modelada.

Keller [7] define o Método de Imagens como um método para a construção de funções de Green, para uma região delimitada por planos, em termos de funções de Green válidas em todo espaço (equação (4.1)) e determinou regiões, equações diferenciais e condições de contorno para as quais o método é aplicável.

$$G(r, r') = \sum_{r'' \in S(r)} G^*(r', r''). \quad (4.1)$$

A equação descreve a função de Green para dois pontos no espaço, r e sua imagem r' . A função G^* por sua vez é definida para “imagens de imagens” (r'') e seus pontos originais.

Keller [7] concluiu que as geometrias das regiões admissíveis ao Método de Imagens para duas e três dimensões são dadas por uma quantidade finita e determinada de planos. Tomando o caso bidimensional como exemplo, apenas os domínios unidos por ângulos da forma π/p (onde p é um inteiro) podem ser regiões admissíveis ao Método de Imagens. Dessa forma haverá no máximo quatro retas definindo o domínio.

5. Acoplamento do Modelo Unidimensional de Recarga ao AEM

Sabendo que o Método de Imagens é um método baseado no princípio da sobreposição de soluções, as equações diferenciais para as quais o método é válido devem ser lineares. Sendo o escoamento estacionário de água em meios porosos saturados linear (equações (2.8) e (2.9)), o Método tem sido amplamente empregado no estudo de suas soluções.

Em sua grande maioria o Método de Imagens é aplicado para satisfazer as condições importas ao longo de linhas equipotenciais conhecidas (primeiro tipo) e linhas impermeáveis (segundo tipo). Maxwell (1873) *apud* Muskat [8], mostra que o Método de Imagens pode também ser aplicado em fronteiras entre regiões homogêneas porém de diferentes condutividades impondo-se simultaneamente condições do primeiro e do segundo tipos. Keller [7] demonstra a aplicabilidade do Método também para condições do terceiro tipo e recentemente, Anderson [1] obteve o mesmo resultado encontrado por Keller [7] utilizando-se o caso particular de escoamento produzido por poços sujeitos a uma fronteira semi-impermeável.

O acoplamento do Método de Imagens ao Método de Elementos Analíticos é feito estabelecendo-se relações entre os parâmetros dos elementos posicionados na região imaginária e os parâmetros da região original (equações (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5)). Assim, para cada condição de contorno tem-se uma relação.

Para condições do primeiro tipo ($G = 0$):

$$\sum \sigma^{imagem} - \sum \frac{\sigma^{real}}{i} = 0. \quad (5.1)$$

Para condições de contorno do segundo tipo ($\partial G/\partial n = 0$):

$$\sum \sigma^{imagem} + \sum \frac{\sigma^{real}}{i} = 0. \quad (5.2)$$

Contornos onde são impostas condições de heterogeneidades (primeiro e segundo tipo) podem ser expressos, para r^+ , por:

$$\sum \sigma^{imagem} + \left[\frac{K^+ - K^-}{K^+ + K^-} \right] \sum \frac{\sigma^{real}}{i} = 0 \quad (5.3)$$

e para r^- , por:

$$\sum \sigma^{imagem} + \left[\frac{2K^+}{K^+ + K^-} \right] \sum \frac{\sigma^{real}}{i} = 0. \quad (5.4)$$

Em contornos onde é imposta a condição do terceiro tipo a relação entre os subdomínios é obtida introduzindo-se no subdomínio imaginário um alinhamento semi-infinito de dipolos, a partir do ponto que representa a posição refletida (imagem) do elemento real, extendendo-se para a direção contrária à fronteira (espelho). Baseado na expressão obtida por Keller [7], a relação entre os parâmetros dos elementos reais e dos elementos imagem é dada por:

$$\sum \frac{\sigma^{real}}{i} + \sum \left[\frac{i}{\lambda} \sigma^{imagem} \int_{\bar{z}}^{\bar{z}+i\infty} e^{\frac{i}{\lambda}(\delta-\bar{z})} G^* d\delta \right], \quad (5.5)$$

onde λ é o coeficiente presente na condição do terceiro tipo, \bar{z} é a posição da imagem e G^* é a função que expressa a imagem do elemento.

O acoplamento do MI ao AEM permite a representação de contornos regionais com linhas, observando-se a validade da geometria segundo Keller [7]. Os contornos regionais usualmente constituem-se nos contornos externos do domínio de problemas de hidrogeologia e sua geometria pode ser representada por planos como descrito por Keller sem perda de detalhes na região dos contornos internos. O problema caracterizado no aquífero Barreiras, abordado neste trabalho, apresenta contornos onde são conhecidas condições do primeiro e do segundo tipo.

6. Implementação

No presente estudo, utiliza-se a biblioteca AEM TimSL 0.3 (disponível na página <http://www.engr.uga.edu/~mbakker>). A implementação do Método de Imagens é

desenvolvida de forma a impor a presença dos contornos regionais aos elementos implementados na biblioteca AEM. Dois módulos são para tanto assim especificados: o primeiro para a especificação e verificação dos espelhos segundo os critérios de aplicabilidade definidos por Keller [7]; o segundo para a construção dinâmica das imagens dos elementos de acordo com o elemento real e a condição de contorno especificada. A implementação do modelo de recarga, por sua vez, é feita definindo-se um módulo adicional internamente ao TimSL onde são especificadas as características da faixa de domínio, as propriedades do meio e a taxa de recarga regional.

7. Aplicação

O aquífero Barreiras estende-se por uma longa faixa com largura de aproximadamente 30km ao longo de grande parte da costa brasileira. A área de aplicação do modelo encontra-se na faixa litoral leste do Estado do Rio Grande do Norte onde encontra-se instalado um importante projeto de captação de água (Figura 3). Observa-se o fato de que a geometria da costa e do afloramento segue uma tendência retilínea durante um trecho bastante longo. Essas fronteiras podem, portanto ser aproximadas por linhas retas paralelas que definem a faixa onde é aplicado o modelo global definido pela equação (3.2). Na Figura 3, a região em branco define a oeste a região rochosa e a leste a costa. As fronteiras a oeste do aquífero definem a parede impermeável e a leste a linha drenante.

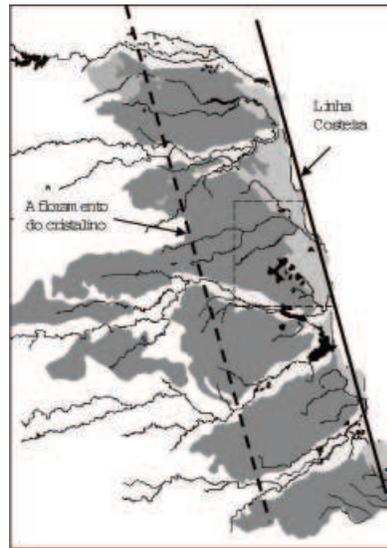


Figura 3: Aproximação dos contornos regionais do aquífero Barreiras. A linha tracejada aproxima a parede impermeável, a linha cheia, indica fronteira drenante.

Observa-se na região duas formações predominantes: a Formação Barreiras (a oeste) e a Formação Dunas (próxima ao litoral). A Formação Dunas e a rede

hidrográfica utilizadas representadas no modelo são representadas por Elementos Analíticos enquanto a recarga da Formação Barreiras e seus parâmetros hidráulicos são representada pela equação (3.2). Para o acoplamento de ambos modelos (Elementos Analíticos e recarga unidimensional), são aplicados elementos na região externa à faixa de domínio utilizando-se o Método de Imagens. Na Figura 4 é ilustrado o posicionamento desses elementos no modelo.

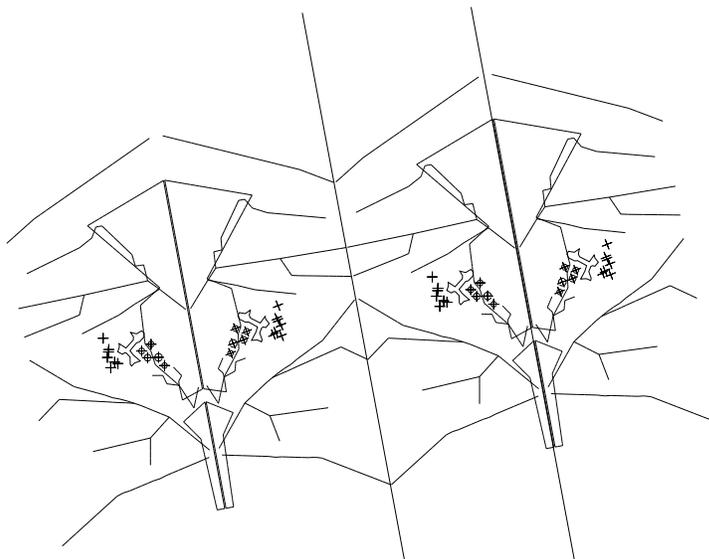


Figura 4: Posicionamento de elementos para o modelo. Linhas escuras (interior da faixa) correspondem ao domínio real da aplicação. As demais linhas representam as imagens utilizadas na solução

A distribuição de potenciais hidráulicos originalmente observada na região é apresentada na Figura 5 com linhas tracejadas. A distribuição resultante da instalação da captação no local é representada com linhas cheias. Os impactos na distribuição de potenciais são observados principalmente em torno da região a leste da lagoa, onde observa-se o rebaixamento de aproximadamente três metros.

8. Conclusão

Neste trabalho, o Método de Elementos Analíticos (AEM) foi empregado com o auxílio do Método de Imagens em um problema tipicamente encontrado em aquíferos. O uso do Método de Imagens permite ao AEM ser utilizado com facilidade em domínios semi-infinitos, por exemplo na forma de faixa retilínea. Nesse caso, a recarga regional do aquífero Barreiras foi aproximada utilizando-se uma expressão unidimensional bastante simples.

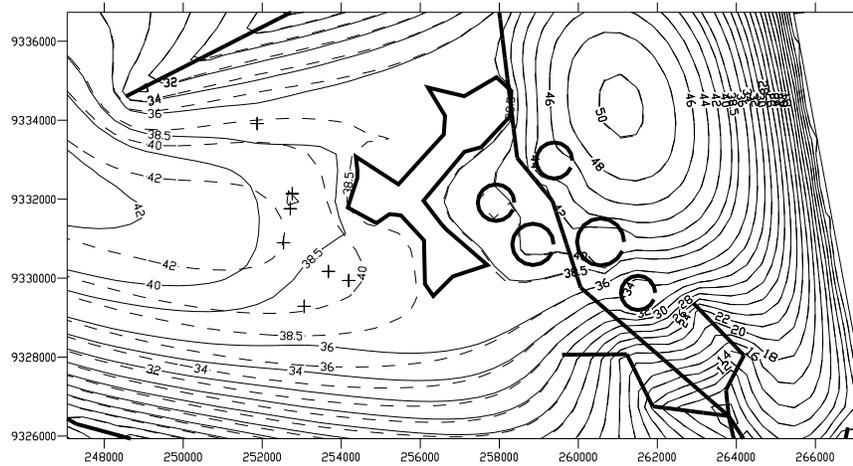


Figura 5: Distribuição de cargas hidráulicas na região da Lagoa do Bonfim. A linha tracejada indica condições naturais e a linha contínua, situação com bombeamento.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à FAPESP (processo 02/09696-3) pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] E.I. Anderson, The method of images for leaky boundaries. *Adv. Water Resour.*, **23** (2000), 461-74.
- [2] G. De Josselin de Jong, Singularity distribution for the analysis of multiple fluid flow through porous media, *J. Geophys. Res.*, **65** (1960) 67-74.
- [3] W.J. De Lange, NAGROM, a model for national groundwater management and regional and local studies, *Eur. Water Pollut. Control*, **6** (1996), 63-67.
- [4] L. Fox e I.B. Parker, "Chebyshev Polynomials in Numerical Approximation", Oxford University Press, New York, 1968.
- [5] H.M. Haitjema, "Analytic Element Modeling in Groundwater Flow", Academic, San Diego, 1995.
- [6] I. Janković, "High-order analytic elements in modeling groundwater flow", Tese de Doutorado, Univ. of Minn., Minneapolis, 1997.
- [7] J.B. Keller, The scope of the Image Method, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, **4** (1953), 505-512.
- [8] M. Muskat, "The flow of homogeneous flow through porous media". McGraw-Hill, Ann Arbor., 1937

- [9] N.I. Muskhelishvili, “Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity”, Noordhoff, Groningen, 1953a.
- [10] N.I. Muskhelishvili, “Singular Integral Equations”, Noordhoff, Groningen, 1953b.
- [11] P.Y. Polubarinova-Kochina, “Theory of the groundwater movement”, Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.
- [12] O.D.L. Strack e H.M. Haitjema, Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities 1. Solution for homogeneous permeability, *Water Resour. Res.* , **17** (1981), 1535-1549;
- [13] O.D.L. Strack e H.M. Haitjema, Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities 2. Solution for inhomogeneous permeabilities, *Water Resour. Res.*, **17** (1981), 1551-1560;
- [14] O.D.L. Strack, The theory and applications of the analytic element method, *Reviews of Geophysics*, **41** (2003), 1005-1020;
- [15] O.D.L. Strack. “Groundwater mechanics”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.

