

Pavimentações Hiperbólicas Espaciais II

N.D. Allan¹, Departamento de Matemática, UNEMAT, 78200-000 Cáceres, MT, Brasil.

Resumo Nosso propósito é construir efetivamente tetraedros que são domínios fundamentais para uma classe de grupos hiperbólicos e aplicar nosso algoritmo no Mathematica na construção e visualização das constelações de vértices destas pavimentações do espaço hiperbólico.

1. Modelo da Geometria Hiperbólica Tridimensional

Um modelo para a geometria hiperbólica espacial é obtido tomando-se, como pontos do espaço H^3 , o interior da bola unitária H , i.e., o conjunto dos pontos de distância menor que um da origem. Define-se retas como sendo ou diâmetros maximais ou arcos de circunferências ortogonais a fronteira S de H , que é a esfera de centro na origem e raio unitário. Aqui, planos hiperbólicos, Π_h , serão ou discos de centro na origem e raio unitário ou a interseção com H de calotas ortogonais a S . Assim, as reflexões $R\Pi_h$ serão ou reflexões planares ou inversões em esferas ortogonais a S . O ângulo entre dois planos hiperbólicos é o ângulo entre estas duas superfícies no espaço euclidiano. Assim o grupo de simetrias da origem coincide com o correspondente grupo euclidiano. Consequentemente os tipos de poliedros regulares são os mesmo que os euclidianos. Os de centro na origem tem os mesmos vertices que os euclidianos.

No que se segue, deixamos para o leitor tratar dos casos especiais, onde as fórmulas tem problemas. Os comandos computacionais começam com

1. Coordenadas do centro e o raio da esfera ortogonal a S , passando por três pontos dados e que não estão numa mesma reta hiperbólica.

```
norma[P_] := P.P
planoH3Pt[P_, Q_, R_] := {K, r} /. Solve[{norma[P] - 2*(K.P) + 1 == 0,
norma[Q] - 2*(K.Q) + 1 == 0, norma[R] - 2*(K.R) + 1 == 0,
r == Sqrt[norma[K] - 1]}, {K, r}]
```

2. O próximo comando é a inversão numa esfera de centro K e raio r :

```
inversao3D[H_, r_][P_] := H + (r^2/norma[P-H])*(P - H)
```

De especial utilidade para nós é o comando que envia um ponto dado na origem: `inverto P` pela inversão no plano hiperbólico bissetor do segmento OP . Necessitamos dos comandos ponto médio e bissetor

```
prePlanoHOX[P_] := Module[{t1=Sqrt[norma[P]]},
{((1/2)*(t1+1/t1))*(1/t1) P, 1/2*(-t1+1/t1)}]
```

Estes são os dados do plano hiperbólico que passa por um ponto P fora da origem, e é ortogonal a OP . Observe-se que para evitar estar repetindo a mesma expressão `norma[P]` cinco vezes introduzimos através de `Module` uma variável local `t1=norma[P]`.

¹neloallan@yahoo.com

```

ptMedioH3D0[{a_,b_,c_}]:=Tanh[.5*ArcTanh[Sqrt[
  norma[{a,b,c}]]]*(1/Sqrt[norma[{a,b,c}]])*{a,b,c}
bissetorH3D[0,{a_,b_,c_}]:=prePlanoHOX[ptMedioH3D0[{a,b,c}]]
invertOX3D[P_][T_]:=inversao3D[bissetorH3D[0,P]][T]

```

Usamos este comando para, por exemplo, calcular a distância entre dois pontos, pois nossas inversões preservam distâncias:

```

distH03D[P_]:= .5 ArcTanh[Sqrt[P.P]]
distH3D[P_,Q_]:=distH3D0[invertOX3D[P][Q]]

```

3. O comando final desta serie é o principal neste nosso contexto: traçar retas no espaço. Usamos o comando auxiliar `round` para comparar números à três casas decimais.

```

round[x_]:= N[10^(-3)*Round[10^3*x]]
retaHiperbolica3D[P_,Q_]:= If[round[Cross[P,Q]]==0,
  Line[{P,Q}], Line[Map[invertOX3D[P],Table[k/50,
    *invertOX3D[P][Q],{k,0,50}]]]]]

```

2. Objetivo

Nosso objetivo é visualizar pavimentações de H^3 e constelações de pontos de centros de simetrias destas pavimentações. Vamos trabalhar com pavimentações por tetraedros, i.e., com grupos gerados por quatro reflexões nas faces de um dado tetraedro T , o qual chamaremos de tetraedro fundamental. Nossos grupos são casos especiais dos chamados grupos de Coxeter de tipo hiperbólico definidos e classificados em [4]. Vamos rever esta classificação como, também, apresentar uma versão mais geral do nosso algoritmo.

3. Diagramas de Coxeter

No plano hiperbólico qualquer triângulo cujos ângulos internos são $\{\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, determinam uma pavimentação do plano, i.e., uma cobertura do plano por triângulos, sem buracos e sem superposição de triângulos. Já com tetraedros no espaço isto não acontece; são muito poucos os tetraedros que fornecem pavimentações do espaço. Um tetraedro é determinado pelos seis ângulos entre suas faces. As faces de T serão indicadas por F_1, F_2, F_3 , e F_4 . Designaremos por p_{ij} a ordem da rotação produto da reflexão em F_i pela reflexão em F_j . Uma maneira eficiente de trabalharmos com estes ângulos é pelos chamados diagramas, ou grafos, de Coxeter: Representamos cada face por um ponto e ligamos F_i a F_j por um segmento onde colocamos em cima deste segmento o número p_{ij} . Para simplificar a notação omitimos os segmentos onde $p_{ij} = 2$, e omitimos o número p_{ij} quando for igual a 3. Fixado uma ordem dos planos, a possível configuração do grafo mais geral, juntamente com a dos grafos especiais, será dada na figura abaixo e indicadas por $\{p = p_{12}, q = p_{23}, r = p_{34}, w = p_{41}, u = p_{13}, v = p_{24}\}$. Nos casos especiais aqui tratados, temos respectivamente $w = u = 2$ (triangular), $u = v = 2$ (quadrangular), $u = v = 2$ (cúbico). No caso euclidiano os grupos que são gerados por três reflexões e são finitos, são os grupos que agem na esfera: $\{2, 3, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, e $\{2, 3, 5\}$. Estes são, respectivamente, os grupos de simetrias do tetraedro, do cubo e do icosaedro. Os grupos infinitos são os grupos de mosaicos $\{3, 3, 3\}$, $\{2, 4, 4\}$, e $\{2, 3, 6\}$; eles correspondem respectivamente aos grupos que contem as simetrias das pavimentações do plano por hexágonos, quadrados e triângulos equiláteros. O caso do plano hiperbólico

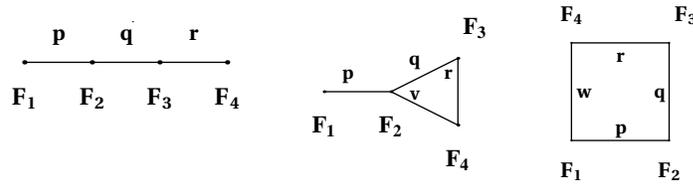


Figura 1: Diagramas linear, triangular e quadrangular.

já foi quase todo tratado em [1], ficando faltando somente os grupos que têm elementos parabólicos, i.e., onde sua região fundamental tem pelo menos um ponto no infinito. Vamos, agora, tratar os grupos gerados por quatro reflexões, e de diagrama $\{p, q, r, w, u, v\}$, que não são produto direto de dois ou mais subgrupos. Diremos que o diagrama é de tipo euclidiano se todos seus subgrupos gerados por três destas reflexões são euclidianos. Associemos a este diagrama a forma quadrática BM cuja matriz já escrita em linguagem do programa se escreve:

$$\begin{aligned}
 BM[\{p_-, q_-, r_-, w_-, u_-, v_-\}] := & \\
 & \{1, -\text{Cos}[Pi/p], -\text{Cos}[Pi/u], -\text{Cos}[Pi/w]\}, \\
 & \{-\text{Cos}[Pi/p], 1, -\text{Cos}[Pi/q], -\text{Cos}[Pi/v]\}, \\
 & \{-\text{Cos}[Pi/u], -\text{Cos}[Pi/q], 1, -\text{Cos}[Pi/r]\}, \\
 & \{-\text{Cos}[Pi/w], -\text{Cos}[Pi/v], -\text{Cos}[Pi/r], 1\}
 \end{aligned}$$

Se o diagrama for de tipo euclidiano então esta forma ou é positiva definida, ou positiva degenerada com assinatura $(n - 1, 0)$, ou ainda de assinatura $(n - 1, 1)$. O teorema de classificação se enuncia, [4].

Teorema 1. *Todo grupo gerado por quatro reflexões agindo num espaço ou euclidiano ou hiperbólico, e que possui um tetraedro fundamental de volume finito, é de tipo euclidiano.*

Observe-se que aqui existe a possibilidade do tetraedro fundamental ter um ou mais vértices no infinito, i.e., na esfera unitária de centro na origem. O grupo ou o diagrama é compacto se isto não acontece.

Teorema 2. *Seja dado um grupo gerado de reflexões com diagrama $\{p, q, r, w, u, v\}$ e de tipo finito.*

1. Caso euclidiano: *O grupo age em \mathbb{R}^3 se, e somente se, forma BM ou é positiva definida ou positiva degenerada. O grupo é finito se, e somente se, BM é positiva definida.*
2. Caso hiperbólico: *O grupo age no espaço hiperbólico se, e somente se, a forma BM tem assinatura $(n - 1, 1)$. O grupo é compacto se, e somente se, os subgrupos gerados por três reflexões são euclidianos finitos.*

Dado um diagrama $\{p, q, r, w, u, v\}$, o estabilizador de um vértice do tetraedro fundamental é obtido tirando-se do diagrama o plano oposto a este vértice. Eles são, respectivamente, os seguintes grupos gerados por três reflexões de grafos $\{\{q, r, v\}, \{u, r, w\}, \{p, v, w\}, \{p, q, u\}\}$. O grupo $\{3, 3, 3, 3, 3, 2\}$ é não compacto e seu tetraedro possui três vértices no infinito ao passo que $\{3, 3, 3, 3, 3, 3\}$ possui

quatro vértices no infinito, que são vértices de um tetraedro "regular". (ver [4], p.49).

Agora para obtermos a lista de todos os diagramas que são ou euclidianos ou hiperbólicos; é suficiente para cada diagrama possível, achar os autovalores de BM .

```
euclidianosInfinitos:={3,3,3,3,2,2},{4,3,2,2,2,3},{4,3,4,2,2,2}
euclidianosFinito:={3,3,3,2,2,2},{3,3,2,2,2,3},{3,3,4,2,2,2},
{3,4,3,2,2,2},{5,3,3,2,2,2},{4,3,3,2,2,2},{3,3,5,2,2,2},
{4,4,2,2,2,3}
```

Segundo [4], p.55/57, a lista dos nove possíveis diagramas para grupos onde T não tem vértice no infinito é:

```
triortogonalCompacto:={3,5,3,2,2,2},{5,3,5,2,2,2},{4,3,5,2,2,2},
{5,3,2,3,2,2}
quadrangularCompacto:={4,3,3,3,2,2},{5,3,3,3,2,2},{4,3,4,3,2,2},
{4,3,5,3,2,2}, {5,3,5,3,2,2}
```

Dividimos os diagramas não compactos em três grupos, a saber:

```
triortogonalNaoCompacto:={3,3,6,2,2,2},{4,3,6,2,2,2},{5,3,6,2,2,2},
{6,3,6,2,2,2}
quadrangularNaoCompacto:={3,3,4,4,2,2},{3,4,4,4,2,2},
{3,4,3,6,2,2}, {4,4,4,4,2,2},{3,5,3,6,2,2},{3,6,3,6,2,2}
triangularNaoCompacto:={3,3,3,2,2,3},{4,3,3,2,2,3},
{5,3,3,2,2,3}, {6,3,3,2,2,3},{4,4,2,2,2,3}
geralNaoCompacto:={3,3,3,3,3,2},{3,3,3,3,3,3}
```

Observe-se que todo diagrama hiperbólico que contém um 6 é não compacto.

4. Construção do Tetraedro Fundamental

Vamos construir agora um tetraedro para o diagrama $\{p, q, r, w, u, v\}$. Se ele tem um vértice fora do infinito, podemos colocar este vértice na origem e daí o tetraedro hiperbólico terá três faces planas. Tomamos a face F_1 contida no plano YZ . F_2 contendo o eixo dos Z e formando com o plano ZX um ângulo de π/p . Tomo F_4 fazendo um ângulo π/w com F_1 e fazendo um ângulo π/v com F_2 . Por último escolho F_3 contida numa esfera que é faz um ângulo π/u com F_1 , faz com F_2 um ângulo π/q e com F_4 um ângulo π/r . Seus vértices serão $\{O, A, B, C\}$ onde O é a origem e é o vértice oposto a F_3 . A está no eixo dos Z e é oposto a F_4 , B é oposto a F_2 e por último C é oposto a F_1 e está na interseção de F_2 com F_4 . No cálculo efetivo dos pontos A, B e C , pegamos pontos destes eixos e passamos um plano hiperbólico, esfera, que passa por eles, é ortogonal à esfera unitária de centro na origem e forma, com o triedro acima, os ângulos $\{\pi/u, \pi/q, \pi/r\}$. Os vetores coeficientes de F_1, F_2 e F_4 são, respectivamente,

```
face1:={1,0,0}, face2[p_]:={-Cos[Pi/p], Sin[Pi/p],0}
face4[p_,w_,v_]:={Cos[Pi/w], Sin[Pi/w]*Cos[teta],Sin[Pi/w]*
Sin[teta]}.
```

Aqui, $teta=teta[p, v, w]$ é calculado de tal forma que o ângulo F_2F_4 seja π/v :

```
teta[p_, v_, w_] := ArcCos[(Cos[Pi/v] +
Cos[Pi/p]* Cos[Pi/w])* Csc[Pi/p]* Csc[Pi/w]]
```

No caso onde $w = v = 2$, temos $teta=Pi/2$ e $face4$ é $\{0, 0, 1\}$.

Se uma circunferência tem centro $\{h, k, m\}$ e raio R , e P_l é um plano de vetor coeficiente vet , então o ângulo entre a circunferência e P_l será igual a $-vet \cdot \{h, k, m\}/R$, independentemente do ponto de interseção deles. Assim, nosso plano hiperbólico é determinado pelo comando abaixo.

Vamos usar o comando auxiliar *desp* usado para remover parêntesis.

```
desp[{a_}]:=a
planoHiperbolico[{p_,q_,r_,w_,u_,v_}]:=
  desp[Simplify[{{h,k,m},R}/.Solve[{face1 .{h,k,m}==
  R Cos[Pi/u], face2[p].{h,k,m}==R Cos[Pi/q],
  face4[p,w,v].{h,k,m}== R Cos[Pi/r],
  R==Sqrt[h^2+k^2+m^2-1 ]},{h,k,m,R}]]]
centroHip[diag_]:=planoHiperbolico[diag][[1]]
raioHip[diag_]:=planoHiperbolico[diag][[2]]
raio[1][{p_,v_,w_}]:={0,0,1};
raio[2][{p_,v_,w_}]:=Cross[face4[p,w,v],face2[p]];
raio[4][{p_,v_,w_}]:=Cross[face4[p,w,v],face1]/Sin[Pi/w];
raio[3][{p_,v_,w_}]:={0,0,0}.
```

Observe que $raio[4][p, 2, 2]$ é $\{0, 1, 0\}$.

Os pontos onde estes raios interceptam a esfera na região $y > 0$ serão:

```
pontosDG[j_][{p_,q_,r_,w_,u_,v_}]:=
  ptHip[interRE[centroHip[{p,q,r,w,u,v}]]][ raio[j][{p,v,w}]]*
  raio[j][{p,v,w}]
```

onde interceptamos um raio unitário de direção alf com uma esfera de centro cf , e escolhemos a solução que está dentro da esfera unitária, e o resultado multiplicamos pelo vetor direção $raio[j][\{p, v, w\}]$.

```
interRE[cf_,alf_]:=t/.Solve[t^2-2 alf.cf* t+1==0,t]
ptHip[{U_,V_}]:=If[Sqrt[U.U]<=1,U,V]
dataPontosDG[diagram_]:=Table[pontosDG[j][diagram],{j,4}]
```

Estes comandos nos permite calcular as coordenadas dos vértices de todos os tetraedros fundamentais dos grupos hiperbolicos listados acima com exceção dos sete seguintes diagramas não compactos:

```
{3,4,3,6,2,2},{4,4,4,4,2,2},{3,5,3,6,2,2},{3,6,3,6,2,2},
{6,3,3,2,2,3},{3,3,3,3,3,2},{3,3,3,3,3,3}}
```

5. Reflexões

A equação de uma reflexão num plano passando pela origem e de vetor coeficiente V é dada por

```
ref13D0[V_][P_]:=P-2*(P.V) V
```

e a reflexão num plano hiperbólico é dada pelo comando *inversao*. Assim, temos as seguintes reflexões nas faces de T :

```
ref1DG[1][diagr_][{x1_, y1_,z1_}]:= {-x1, y1, z1}
ref1DG[2][diagr_][{x1_, y1_,z1_}]:=
  ref13D0[face2[diagr][[1]]][{x1,y1,z1}]
ref1DG[3][diagr_][P_]:= inversao3D[planoHiperbolico[diagr]][P]
ref1DG[4][{p_, q_,r_,w_, u_,v_}][{x1_, y1_, z1_}]:=
  ref13D0[face4[p,w,v]][{x1, y1,z1}] // N
listaRef1DG[diagr_]:=Table[ref1DG[j][diagr], {j,4}]
```

6. Configurações de Vértices

Vamos, agora, tratar do caso mais simples que é o do grupo $\{p, q, r, 2, 2, 2\}$. A origem é oposta à face F_3 e seu estabilizador é $\{p, 2, 2\}$, que é o produto de um grupo de ordem dois por um grupo de ordem $2p$, e é o grupo de simetrias de um p -ágono. Agora, cobrimos a origem com todas as imagens possíveis de T pelas reflexões de $G(T)$ que deixam a origem

fixa. Temos uma dipirâmide P formada pela colagem de duas pirâmides de base p -gonal e de mesma aresta lateral. A base comum, B_0 , destes tetraedros está contida no plano XY . O estabilizador dos vértices comuns as duas pirâmides é o grupo simétrico S_p . Os dois ápices $\{U = A, V\}$ são pontos do eixo Z , simétricos relativos ao plano XY . Os estabilizadores de U e de V são grupos de ordem $4p$. Daí, segue-se que o p -ágono central de P é a face de dois poliedros regulares, p -poliedros, cujas faces são p -ágonos, e cujos centros estão em U e V . Obtemos duas constelações de vértices congruentes. A primeira, a que contém U , é de centros de p -poliedros e, a outra, é a constelação dos vértices das faces dos p -poliedros. Obtemos duas pavimentações do espaço hiperbólico: uma por p -poliedros e outra por dipirâmides de base p -gonal. Olhemos a um ponto da constelação de A . No caso já mencionado em [2], do grupo $\{4, 3, 5, 2, 2, 2\}$, este ponto é vértice de um octaedro e sua seção central é um quadrado. O vértice C é comum a estas duas figuras. Se olharmos aos vértices do cubo que são mais próximos a B obtemos os vértices de um triângulo equilátero, então a configuração de vértices ou é um tetraedro, um octaedro ou um icosaedro. Como o estabilizador de C é o grupo $\{2, 3, 5\}$, e um cálculo direto mostra que temos vinte pontos da constelação de A que estão mais próximo de C , obteremos um icosaedro, ou seja temos vinte cubos incidindo em C . Obtemos, também, a outra pavimentação formada por icosaedros, quatro em cada vértice.

7. Cálculo de Imagens

Tratemos agora do cálculo efetivo da imagem do tetraedro fundamental por uma composição de reflexões. Por conveniência temos aqui quatro reflexões que indicadas formalmente por $\{a, b, c, d\}$, e nossa lista W_n de palavras de comprimento n , será composta de palavras nestas quatro letras. Nosso primeiro problema é listar todas as palavras de comprimento n . W_n teria 4^n elementos se não houvesse relações entre as letras. O problema é geração de palavras e ele é simples, porém existem muitas palavras que representam o mesmo elemento do grupo gerado pelas reflexões. Como já vimos no caso do plano, existe muita redundância na lista W_n de comprimento n e para eliminá-las usamos o fato que na geometria do absoluto no espaço uma congruência é determinada por sua ação nos vértices de qualquer tetraedro. O processo é descrito em cinco etapas:

1. Determino a lista de vértices e reflexões.
2. Escrevo as primeiras palavras: W_1 a qual denominamos por `prePalavrasFin`
3. Dado uma lista de palavras L_n de n elementos faço a expansão de L_n para calcular L_{n+1} . Uso o comando `expandList`.
4. Calculo as imagens de T por todas os produtos de reflexões correspondentes aos elementos desta lista L_n . Obtemos uma lista de pares composta de imagens de vértices e palavras. Uso o comando `calculoDeImagens`.
5. Usando o comando `selecionar` elimino os elementos supérfluos ficando com a nova lista estendida que em princípio será ou `dadosFinais` dando coordenadas das imagens de T ou a nova listas `palavrasFinais`.

A primeira etapa já foi desenvolvida acima e a seguir trataremos a etapa 4. Começemos com o comando `substituir` o qual substitui, numa dada palavra, as letras por respectivas reflexões, preparando-as para seu cálculo nos pontos dados. O comando `imagens` faz este cálculo; o comando `ComposeList` do programa nos fornece passo a passo as composições das reflexões que aparecem na palavra calculada num ponto; a última é que desejamos. O cálculo em listas de reflexões, de pontos e de palavras é dado por `calculoDeImagens`; aqui temos que fornecer a lista de reflexões associadas ao diagrama, bem como a lista de pontos que em princípio serão os vértices do tetraedro fundamental. Em princípio ele nos dá uma lista dupla composta de uma palavra juntamente com sua imagem nos vértices do tetraedro, cujas coordenadas estão aproximadas a três casa decimais com o auxílio de comando `round`; o comando `Sort` bem ordena a lista.

```

substituir[listaLetras_][reflexoes_][palavra_]:= palavra/.Table
  [listaLetras[[i]]->reflexoes[[i]],{i,Length[listaLetras]}]
imagens[listaLetras_][reflexoes_,palavra_][P_]:=
  Last[composeList[substituir[listaLetras][reflexoes][palavra],P]]//N
calculoDeImagens[listaLetras_][diagrama_][listaDePalavras_]:=
  calculoDeImagens[listaLetras][diagrama][listaDePalavras]=
  Sort[Table[{MapAll[round,imagens[listaLetras][listaRef1DG[diagrama],
  listaDePalavras[[j]]]/@dataPontosDG[diagrama]],
  listaDePalavras[[j]]},{j,Length[listaDePalavras]}]]]

```

Observe-se que a repetição de uma linha de um comando, como por exemplo `calculoDeImagens` envia a resultante lista para a memória.

8. Palavras do Grupo

Nosso objetivo agora é fazer uma tabela de palavras reduzidas de comprimento menor que um dado número. Podemos proceder como em [2], porém existe uma outra maneira mais simples de se construir a tabela de elementos sem repetição consecutiva de dois elementos. Procedemos da seguinte maneira: Suponhamos dada a tabela de letras $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, W_n ; para cada a_i selecionamos o conjunto W_{n_i} que consiste de todas as palavras de W_n que terminam em a_i . A nova lista W_{n+1} será obtida adicionando-se a_j a cada palavra de W_{n_i} com $\{i, j\}$ distintos. Este processo é feito através de dois comandos: `adicionar` e `expandirLista` que fazem exatamente o que o nome está dizendo.

```

adicionar[listaLetras_][k_][palavra_]:= If[SameQ[{Last[palavra]},
  { listaLetras [[k]]}]==True,{}, Join[palavra,
  {Evaluate[listaLetras [[k]]}]]]
expandirLista[listaLetras_][listaPalavras_]:=
  DeleteCases[
  Flatten[Table[Map[adicionar[listaLetras][j], listaPalavras],
  {j,Length[listaLetras]}],1],{}]

```

9. Preparo da Lista

O comando `selecionar` é para construir a partir de uma lista dada, uma nova lista dupla bem ordenada pela ordem lexicográfica contendo somente os pares onde os primeiros elementos são distintos. Para melhor entendimento vamos separá-lo em dois comandos. O primeiro, o seu núcleo,

```

selecionar00[listaDupla_]:=Table[{SameQ[MapAll[round,
  listaDupla [[i,1]]], MapAll[round, listaDupla [[i+1,1]]]],
  listaDupla [[i]]}, Length[listaDupla]-1]

```

`SameQ` nos diz se dois pares consecutivos com primeiros elementos arredondados a três casas decimais, têm estes primeiros elementos iguais. A resposta será dada por um `True` ou `False` seguido do par. O `selecionar` mantém os pares `False`, porém temos que adicionar, via `Join`, o último par.

```

selecionar[listaDupla_]:=selecionar[listaDupla]=
  Join[Map[Last,Cases[selecionar00[listaDupla],{False,{_,_}}]],
  {Last[listaDupla]}]

```

10. O Algoritmo

Agora, estamos prontos para escrever o algoritmo de palavras de nossos grupos.

```

parenteses[x_]:= {x}
prePalavrasFinais [listaLetras_] [1] [diagrama_] :=
  Map[parenteses, listaLetras]
prePalavrasFinais [listaLetras_] [n_] [diagrama_] :=
  expandirLista [listaLetras] [ palavrasFinais
    [listaLetras] [n-1] [diagrama]]
dadosPalavrasFinais [listaLetras_] [n_] [diagrama_] :=
  dadosPalavrasFinais [listaLetras] [n] [diagrama] =
  selecionar [calculoDeImagens [listaLetras] [diagrama]
    [prePalavrasFinais [listaLetras] [n] [diagrama]]]
palavrasFinais [listaLetras_] [n_] [diagrama_] :=
  Map[Last, dadosPalavrasFinais [listaLetras] [n] [diagrama]]

```

Aqui tanto `selecionar` quanto `dadosPalavrasFinais` vão para a memória.

11. Considerações Finais

Agora, partindo de T , os comandos abaixo mencionados nos fornecem uma lista das imagens de T . As imagens da origem vão nos mostrar parte da constelação do grupo. Uma observação final sobre o algoritmo é que ele está escrito somente em função do diagrama, pois `listaLetras` é determinada pelo tamanho da lista de reflexões que estamos usando.

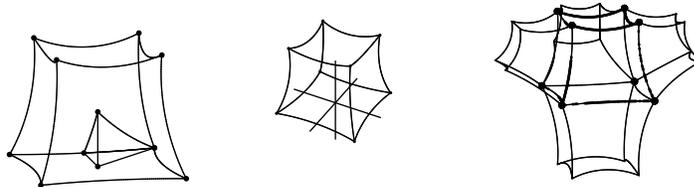


Figura 2: Configuração $\{4,3,5,2,2,2\}$

Cada um destes grupos $G(T)$ possui um subgrupo G_0 gerado em geral por de nove a doze rotações que são os produtos duas a duas das reflexões nos vértices de T ; estas rotações são rotações que têm como eixo as arestas de T . Como já mencionado em [2], no caso $\{4,3,5,2,2,2\}$ a pavimentação por estes tetraedros contém uma pavimentação por cubos. Vemos, na Figura 2, um cubo com o tetraedro fundamental inscrito nele, um cubo fundamental e alguns cubos na pavimentação.

Referências

- [1] N. Allan, Pavimentações Hiperbólicas, em “Seleta do XXIII CNMAC” (E.X.L de Andrade, J.M. Balthazar, S.M. Gomes, G.N. Silva e A. Sri Ranga, eds.), Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 2, pp 13-22, SBMAC, 2001.
- [2] N. Allan, Pavimentações Hiperbólicas Espaciais, Resumos de XXV CNMAC (2002), Resumos de XXVI CNMAC (2003) e Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Belem (2004).
- [3] H.S.M. Coxeter, “Regular Polytopes”, Cambridge, 1956.
- [4] J.L. Koszul, “Lectures on Hyperbolic Coxeter Groups”, Notre Dame University, 1967.
- [5] R.E. Maeder, “Programming in Mathematica”, Addison-Wesley, New York, 1991.