TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **5**, No. 2 (2004), 337-345.

O Princípio de Saint-Venant em Elasticidade Não Linear

J.D. da SILVA, J.A. FERREIRA, Departamento de Matemática, UFES, 29060-900 Vitória, ES, Brasil.

I.-S. LIU, Instituto de Matemática, UFRJ, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. Neste trabalho, estendemos os resultados obtidos por Horgan e Payne [6] em 1992, e demonstramos que o Princípio de Saint-Venant é verdadeiro para um corpo ocupando a região retangular $\Omega = \{(x_1, x_2)|\ 0 < x_1 < l,\ \ -h/2 < x_2 < h/2\}$ onde $l \gg h$, do plano Cartesiano, em material elástico, cuja equação constitutiva é uma generalização da Lei de Hooke com termos não lineares em pequenas deformações. Os termos não lineares considerados pelos citados autores são pelo menos de terceira ordem. A inclusão dos termos de segunda ordem neste trabalho representa um modelo mais realístico. O resultado principal é estabelecido usando-se técnicas de desigualdades diferenciais para funcionais quadráticos.

1. Introdução

Boussinesq [1], em 1885, foi o primeiro a tentar uma formulação e uma prova rigorosa para a conjectura elaborada por Sain-Venant [10] publicada em 1853, elevando a conjectura original ao posto de "Princípio", e muitos textos até hoje, dão Boussinesq como referência para a demonstração do Princípio de Saint-Venant. Entretanto, uma prova de que o resultado vale dentro da teoria linear só foi conseguida por Toupin [11] em 1965.

Resultados semelhantes ao Princípio de Saint-Venant, dentro de uma teoria restrita da elasticidade não linear, foram obtidos por Roseman [9], Roseman e Breuer [2], Horgan e Knowles [3, 4], Horgan e Payne [5, 6], todos sob a hipótese de pequenas deformações.

O objetivo principal deste trabalho é fazer uma extensão dos resultados obtidos por Horgan e Payne [6], e demonstrar que o Princípio de Saint-Venant é verdadeiro para um material elástico ocupando uma região retangular, utilizando para isso uma equação constitutiva não linear considerando pequenas deformações como uma generalização natural da *Lei de Hooke.* Esta equação contém termos não lineares de segunda ordem; termos estes importantes e não considerados em [6].

Usaremos a convenção de somatório para simplificar expressões, ou seja, quando um par de índices aparece numa expressão significa um somatório sobre o índice de 1 a 2, no caso bidimensional. Com esta convenção, por exemplo, $[u,_{ij}],_{ij} = 0$, onde a vírgula representa a derivada parcial, é a clássica equação biharmônica.

2. Formulação do Problema

De acordo com a teoria da elasticidade linear, o estudo das deformações planas de uma região Ω, quando não existem forças de volume atuantes, se reduz a encontrar uma solução ϕ da equação biharmônica, que satisfaça às condições de contorno do problema, onde ϕ é a função de tensão de Airy, em termos da qual as tensões τ_{ij} são dadas por $\tau_{11} = \phi,_{22}$, $\tau_{22} = \phi,_{11}$, $\tau_{12} = -\phi,_{12}$. A existência de uma função de Airy implica que a equação de equilíbrio, isto é, $\tau_{ij},_j = 0$, seja satisfeita identicamente.

Estamos interessados nas deformações planas na teoria de elasticidade não linear de um corpo elástico, ocupando a região retangular Ω do plano Cartesiano definida por $\Omega = \{(x_1, x_2)|\ 0 < x_1 < l,\ -h/2 < x_2 < h/2\}$, onde $l \gg h$.

Consideraremos um modelo constitutivo não linear da seguinte forma:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\,\tau_{ij} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\,\tau_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{E}}\mathcal{H}\,(\tau_{kl})\tau_{ij}, \tag{2.1}$$

onde δ_{ij} é a função 1 e 0, E é o módulo de Yong, ν módulo de Poisson e $\mathcal{H}$ é uma função de tensão τ_{kl}, representando formalmente uma generalização da Lei de Hooke com termos não lineares ver [6] e [7].

Usando a função $\rho(\phi)$ definida por $\rho(\phi) = 1 + \mathcal{H}\,(\tau_{kl})$, a equação de compatibilidade do tensor de deformação, isto é, $e_{11},_{22} + e_{22},_{11} - 2e_{12},_{12} = 0$, se reduz numa equação diferencial parcial de quarta ordem para a função de Airy ϕ,

$$[\rho(\phi)\phi,_{ij}],_{ij} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.2}$$

Neste trabalho, consideremos a não-linearidade representada pela função $\mathcal{H}(\tau_{kl})$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{H}(\tau_{kl}) = \lambda_1\tau_{kk} + \lambda_2\tau_{kk}\tau_{ll} + \lambda_3\tau_{kl}\tau_{kl}, \tag{2.3}$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são parâmetros materiais. Assim estamos considerando a relação constitutiva da seguinte forma:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\tau_{ij} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\tau_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{E}}(\lambda_1\tau_{kk} + \lambda_2\tau_{kk}\tau_{ll} + \lambda_3\tau_{kl}\tau_{kl})\tau_{ij}. \tag{2.4}$$

Observe que a relação constitutiva (2.4) que será utilizada em nossas demonstrações é uma extensão da *Lei de Hooke* contendo termos não lineares de 2^a e 3^a ordem, enquanto no trabalho de Horgan e Payne [6] a relação constitutiva utilizada é

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\tau_{ij} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\tau_{kk}\delta_{ij} + H(q), \tag{2.5}$$

onde $q = \tau_{kl}\tau_{kl}$ e $H(q) \geq 0$. Apesar da sua generalidade, $H = \mathcal{H}(\tau_{kl})$ é uma função somente de q, portanto, os termos não lineares são pelo menos de 3^a ordem. Assim, a relação constitutiva (2.4) é mais realista.

Assumiremos que uma solução ϕ da equação (2.2) satisfaz $\phi \in \mathcal{C}^4(\Omega)\bigcap\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, e usaremos a notação $\|\phi\| = \sum_{|\gamma|\leq 2}\sup\{|\partial^\gamma\phi(x)| : x \in \Omega\}$, onde ∂^γ são as derivadas de ordem γ.

O objetivo deste trabalho é demonstrar que o Princípio de Saint-Venant é verdadeiro para corpos ocupando regiões retangulares e satisfazendo à hipótese constitutiva dada por (2.4) com λ_1, λ_2 e λ_3 suficientemente pequenos.

Condições na Fronteira

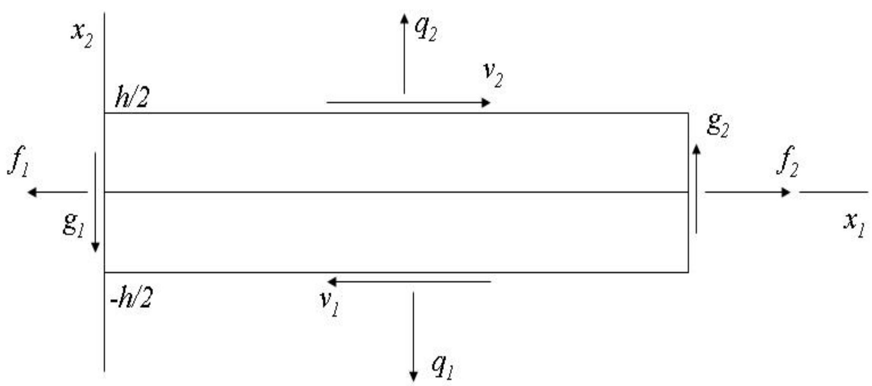
Suponhamos que um corpo elástico ocupe a região Ω em equilíbrio, sob a ação das forças sobre a sua fronteira.

• O lado longo em $x_2 = -h/2$ está sujeito a tensões normal e cisalhante determinadas respectivamente por funções q_1 e v_1 contínuas em $(0, l)$, e o lado longo em $x_2 = h/2$ por funções q_2 e v_2 também contínuas em $(0, l)$.

• A extremidade em $x_1 = 0$ está sujeita a tensão normal e cisalhante determinadas respectivamente por funções f_1 e g_1 e a extremidade $x_1 = l$ por funções f_2 e g_2. As funções f_1, g_1, f_2 e g_2 são contínuas em $[-h/2, h/2]$.

Temos, portanto, as seguintes condições na fronteira:

$$\tau_{12}(x_1, -h/2) = v_1(x_1), \quad \tau_{22}(x_1, -h/2) = q_1(x_1), \quad 0 < x_1 < l, \tag{2.6}$$
$$\tau_{12}(x_1, h/2) = v_2(x_1), \quad \tau_{22}(x_1, h/2) = q_2(x_1), \quad 0 < x_1 < l, \tag{2.7}$$
$$\tau_{11}(l, x_2) = f_2(x_2), \quad \tau_{12}(l, x_2) = g_2(x_2), \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2, \tag{2.8}$$
$$\tau_{11}(0, x_2) = f_1(x_2), \quad \tau_{12}(0, x_2) = g_1(x_2), \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2. \tag{2.9}$$



Para garantir a continuidade das tensões na fronteira, exigiremos que

$$\lim_{x_1 \to 0} v_2(x_1) = g_1(h/2), \qquad \lim_{x_1 \to l} v_2(x_1) = g_2(h/2), \tag{2.10}$$

$$\lim_{x_1 \to 0} v_1(x_1) = g_1(-h/2), \qquad \lim_{x_1 \to 0} v_1(x_1) = g_2(-h/2). \tag{2.11}$$

As condições de fronteira (2.6)-(2.9) em termos da função de Airy são dadas por

$$\phi,_{11}(x_1, -h/2) = q_1(x_1), \quad \phi,_{12}(x_1, -h/2) = -v_1(x_1), \quad 0 < x_1 < l, \tag{2.12}$$
$$\phi,_{11}(x_1, h/2) = q_2(x_1), \quad \phi,_{12}(x_1, h/2) = -v_2(x_1), \quad 0 < x_1 < l, \tag{2.13}$$
$$\phi,_{22} = f_2(x_2), \quad \phi,_{12} = -g_2(x_2), \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2, \tag{2.14}$$
$$\phi,_{22} = f_1(x_2), \quad \phi,_{12} = -g_1(x_2), \quad -h/2 \leq x_2 \leq h/2. \tag{2.15}$$

Observamos que não serão necessárias as formas explícitas das forças q_1, q_2, v_1, v_2, f_1, f_2, g_1 e g_2 para obter os resultados neste trabalho. Porém, as forças aplicadas sobre a fronteira têm que manter o corpo em equilíbrio.

Problema de Valores na Fronteira

Supondo a continuidade de ϕ, $\partial\phi/\partial x_i$ e $\partial^2\phi/\partial x_i^2$ até à fronteira, concluimos que a distribuição de tensões na região Ω, com as condições apresentadas, é dada pela solução do problema a seguir:

$$[\rho(\phi)\phi,_{ij}],_{ij} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
&\phi(x_1,-h/2) = F_1(x_1), && \phi,_{22}(x_1,-h/2) = G_1(x_1), && 0 < x_1 < l, && (2.17)\\
&\phi(x_1,h/2) = F_2(x_1), && \phi,_{22}(x_1,h/2) = G_2(x_1), && 0 < x_1 < l, && (2.18)\\
&\phi(l,x_2) = F_3(x_1), && \phi,_{1}(l,x_2) = G_3(x_2), && -h/2 \le x_2 \le h/2, && (2.19)\\
&\phi(0,x_2) = F_4(x_2), && \phi,_{1}(0,x_2) = G_4(x_2), && -h/2 \le x_2 \le h/2, && (2.20)
\end{aligned}$$

onde as funções de F_1 a G_4 são obtidas de (2.12)-(2.15) por integração.

3. O Princípio de Saint-Venant

Problema Referencial

Daqui em diante denominaremos $u(x_1, x_2)$ uma solução conhecida do problema de valores na fronteira (2.16), (2.17)-(2.20), que pasaremos a denominar *Problema referencial*.

A forma explicita da solução $u(x_1, x_2)$ não será exigida para obter os resultados principais neste trabalho. Porém, vamos supor que a solução seja limitada por uma constante positiva M_1, ou seja,

$$\|u\| \le M_1. \tag{3.1}$$

Observe que em [6], a prova depende de uma solução explicita, especificamente, no caso de tração uniforme, $u(x_1, x_2) = \tau(x_2)^2 h/2$ e no caso do cisalhamento uniforme, $u(x_1, x_2) = \tau x_1 x_2$. Nestes exemplos, as soluções são limitadas em Ω.

Problema Modificado

Consideremos agora uma outra situação, em que a região Ω é submetida à mesma distribuição de tensões no trecho da fronteira $\partial\Omega \setminus L_0$, onde $L_0 = \{(x_1, x_2)|\ x_1 = 0,\ -h/2 < x_2 < h/2\}$; mas em L_0, temos agora, uma distribuição de tensões modificadas f e g em lugar de f_1 e g_1 que mantém o corpo em equilíbrio. Portanto, as condições (2.17) a (2.19) são inalteradas e, em lugar de (2.20) na formulação do *Problema referencial*, temos:

$$\phi(0, x_2) = \int_{-h/2}^{x_2} \left(\int_{-h/2}^{t} f(s)ds \right) dt, \qquad \phi,_1(0, x_2) = -\int_{-h/2}^{x_2} g(s)ds. \tag{3.2}$$

Denotaremos por $\phi(x_1, x_2)$ as soluções do problema (2.16),(2.17)-(2.19) e (3.2) substituindo as condições (2.20), que passaremos a denominar *Problema modificado*.

Neste trabalho estamos interessados nas distribuições de tensões $\phi(x_1, x_2)$ que estão a uma distância finita de $u(x_1, x_2)$, isto é, que satisfaçam

$$\|\phi - u\| \leq M_2, \ \text{ para alguma constante } \ M_2 \geq 0, \tag{3.3}$$

desde que λ_1, λ_2 e λ_3 sejam suficientementes pequenos.

Estamos aí supondo um comportamento de dependência contínua em relação aos parâmetros para a solução ϕ.

Energia do Problema

O objetivo central deste trabalho é demonstrar que a solução $\phi(x_1, x_2)$ do *Problema modificado*, que nos dá a distribuição das tensões em Ω quando modificamos os dados na fronteira em L_0 do *Problema referencial*, decai exponencialmente para a solução $u(x_1, x_2)$, para $0 \ll x_1$. Isto é o que se pretende afirmar quando dizemos que "longe de L_0 as duas soluções estão próximas". Em outras palavras, o Princípio de Saint-Venant é verdadeiro no contexto da elasticidade não linear aqui abordado.

Com esse objetivo, mostraremos que a energia definida por

$$E(z) = \int_{\Omega_z} \rho(\phi) w,_{ij} \, w,_{ij} dA, \tag{3.4}$$

com

$$w(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2) - u(x_1, x_2) \tag{3.5}$$

e

$$\Omega_z = \left\{ (x_1, x_2) |\ 0 < z < x_1 < l, \ -\frac{h}{2} < x_2 < \frac{h}{2} \right\},$$

decai exponencialmente para zero quando $z \to l$.

Observe que $\rho(\phi) \geq 1 - |\lambda_1| \, \|\phi\| - |\lambda_2| \, \|\phi\|^2 - |\lambda_3| \, \|\phi\|^2$, por (3.1), (3.3) e desigualdade triangular obtemos $\|\phi\| \leq \|\phi - u\| + \|u\| \leq M_1 + M_2$, segue portanto que $\rho(\phi) \geq 1 - |\lambda_1| \, (M_1 + M_2) - (|\lambda_2| + |\lambda_3|)(M_1 + M_2)^2$. Assim, para $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ e $|\lambda_3|$ suficientemente pequenos, podemos tomar $\rho(\phi) \geq \delta > 0$. Por exemplo, para

$$|\lambda_1| \leq 1/6(M_1 + M_2), \ \ |\lambda_2| \leq 1/6(M_1 + M_2)^2 \quad \text{e} \quad |\lambda_3| \leq 6(M_1 + M_2)^2, \tag{3.6}$$

obtemos

$$\rho(\phi) \geq 1/2. \tag{3.7}$$

4. Resultado Principal

Teorema 4.1. *Seja* $u(x_1, x_2)$ *a solução do Problema referencial* (2.16), (2.17) − (2.20)*, e* $\phi(x_1, x_2)$ *a solução do Problema modificado* (2.16), (2.17) − (2.19), (3.2). *Suponhamos que* $\rho(\phi) = 1 + \mathcal{H}(\phi)$*, com*

$$\mathcal{H}(\phi) = \lambda_1 \phi,_{kk} + \lambda_2 \phi,_{kk} \, \phi,_{ll} + \lambda_3 \phi,_{kl} \, \phi,_{kl} \,, \tag{4.1}$$

e que $\|u\| \leq M_1$ *e* $\|\phi - u\| \leq M_2$. *Então, existem* $\delta_1 > 0$ *e* $\delta_2 > 0$ *tal que, se* $|\lambda_1| \leq \delta_1$, $|\lambda_2| \leq \delta_2$ *e* $|\lambda_3| \leq \delta_2$, *a energia definida em* (3.4) *satisfaz à desigualdade*

$$E(z) \leq (1 + D)\, E(0) e^{-z/D}, \quad 0 \leq z \leq l, \tag{4.2}$$

onde $E(0)$ *é uma constante positiva, e* $D > 1$ *é uma constante que depende da geometria do problema, e de* λ_1, λ_2 *e* λ_3.

Demonstração: Usando as condições de fronteira e a integração por partes, podemos reescrever a energia $E(z)$ da seguinte maneira,

$$E(z) = -\int_{L_z} \rho w,_{11}\, w,_1\, dx_2 - 2\int_{L_z} \rho w,_{12}\, w,_2\, dx_2 + \int_{L_z} (\rho w,_{11}),_1\, w\, dx_2 + N, \tag{4.3}$$

onde

$$N = -\int_{\Omega_z} [(1 + \lambda_1 \phi,_{kk} + \lambda_2 \phi,_{kk}\, \phi,_{ll} + \lambda_3 \phi,_{kl}\, \phi,_{kl})u,_{ij}],_{ij}\, w\, dA.$$

Por (3.5), temos por exemplo que $\phi,_{kk} = w,_{kk} + u,_{kk}$, substituindo na identidade (4.3), passamos a ter na energia $E(z)$, as integrais envolvendo apenas w e u. Observe que as integrais são em L_z ou Ω_z.

Desenvolvendo os termos das integrais acima e usando a definição da energia e da identidade

$$E'(z) = -\int_{L_z} \rho(\phi) w,_{ij}\, w,_{ij}\, dA,$$

estimamos as integrais ora pela energia ora por sua derivada da seguinte maneira:

i) Integrais em Ω_z

$$\int_{\Omega_z} [(w,_{kk})u,_{11}]w,_{11}\, dA \leq K \int_{\Omega_z} |w,_{11}|\, |w,_{11}|\, dA + K \int_{\Omega_z} |w,_{22}|\, |w,_{11}|\, dA,$$

onde $K = M_1 + M_2$, e M_1, M_2 são as constantes em (3.1) e (3.3). Aplicando a desigualdade de Schwarz a cada uma das duas integrais anteriores, utilizando que $\rho(\phi) \geq 1/2$ obtido em (3.7), e a seguir a definição da energia, obtemos

$$\int_{\Omega_z} |w,_{11}|\, |w,_{11}| dA \leq \left[2 \int_{\Omega_z} \rho(w,_{11}^2) dA\right]^{1/2} \left[2 \int_{\Omega_z} \rho(w,_{11}^2) dA\right]^{1/2} \leq 2E(z),$$

e analogamente,

$$\int_{\Omega_z} |w,_{22}|\, |w,_{11}| dA \leq 2E(z).$$

Temos, portanto, que

$$\int_{\Omega_z} [(w,_{kk})u,_{11}]w,_{11}\, dA \leq 4KE(z).$$

ii) Integrais em L_z

Usando a desigualdade de Poincaré-Friedrichs (ver [8], [12]), a desigualdade de Schwarz e o fato que $\rho \geq 1/2$, obtemos

$$\int_{L_z} |w,_{11}|\,|w| dx_2 \leq \left[2\int_{L_z} \rho(w,_{11}^2) dx_2\right]^{1/2} \left[2A\int_{L_z} \rho(w_{22}^2) dx_2\right]^{1/2}.$$

Logo,

$$\int_{L_z} |w,_{11}|\,|w| dx_2 \leq 2A^{\frac{1}{2}}(-E'(z)).$$

Usando estas estimativas e outras semelhantes, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}\alpha\int_z^l E(s)\,ds \;\leq\; & A^{1/2}\left[4(2K)^{1/2} + 4K\big(3|\lambda_1| + 9K(|\lambda_2| + 18K|\lambda_3|)\big)\right] E(z) \\ & -A^{1/2}\left[(2K)^{1/2} + 4K\big(|\lambda_1| + 6K(|\lambda_2| + 15K|\lambda_3|)\big)\right] E'(z), \quad (4.4)\end{aligned}$$

onde $\alpha = 1 - 12K\big(|\lambda_1| + 6K(|\lambda_2| + |\lambda_3|)\big)$.

Definindo $B = A^{1/2}\left[4(2K)^{1/2} + 4K\big(3|\lambda_1| + 9K(|\lambda_2| + 18K|\lambda_3|)\big)\right]$, segue, da desigualdade (4.4), que

$$\alpha\int_z^l E(s) ds \leq BE(z) - BE'(z). \tag{4.5}$$

Tomando $|\lambda_1| < 1/(6^2K)$, $|\lambda_2| < 1/(6^3K^2)$ e $|\lambda_3| < 1/(6^3K^2)$, as desigualdades em (3.6) são satisfeitas. Definindo agora $\delta_1 = 1/(6^2K)$ e $\delta_2 = 1/(6^3K^2)$, segue que para todo $|\lambda_1| < \delta_1$ e $|\lambda_2|, |\lambda_3| < \delta_2$, obtemos que $12K(|\lambda_1| + 6K(|\lambda_2| + |\lambda_3|)) < 1$. Obtemos assim $0 < \alpha = 1 - 12K(|\lambda_1| + 6K(|\lambda_2| + |\lambda_3|))$. Se necessário, é possível obter intervalos para λ_1, λ_2 e λ_3 tais que $\alpha \geq \eta > 0$, onde η é dado.

Dividindo (4.5) por α, adicionando $E(z)$ a ambos os lados da desigualdade e $-E'(z) > 0$ somente no lado direito, podemos, então, escrever

$$E(z) + \int_z^l E(s) ds \leq (B/\alpha + 1)(E(z) - E'(z)). \tag{4.6}$$

Definindo, agora,

$$H(z) = E(z) + \int_z^l E(s) ds,$$

obtemos $H'(z) = E'(z) - E(z)$, e daí,

$$1/D \leq -H'(z)/H(z), \quad \text{onde } D = \frac{B}{\alpha} + 1 > 0. \tag{4.7}$$

Integrando (4.7) de 0 a z, obtemos

$$H(z) \leq H(0)e^{-z/D}, \tag{4.8}$$

O que resta é estimar $H(0)$ em termos de constantes conhecidas. Para isso, substituindo em (4.8) o valor de $H(z)$, temos

$$E(z) + \int_z^l E(s) ds \leq H(0)e^{-z/D}. \tag{4.9}$$

Daí, por integração, obtemos

$$H(0) = E(0) + \int_0^l E(s)ds \leq \left(1 + \frac{1 - e^{-kl}}{1/D + e^{-kl}}\right) E(0) < (1 + D)E(0). \tag{4.10}$$

Substituindo esta estimativa em (4.8), e observando que $E(z) \leq H(z)$, obtemos

$$E(z) \leq (1 + D)E(0)\, e^{-z/D},$$

que é o que queríamos demonstrar.

5. Consideração Final

O resultado central deste trabalho, o Teorema 4.1, fazendo uso da hipótese (3.1), $\|u\| \leq M_1$, juntamente com a hipótese (3.3), $\|\phi - u\| \leq M_2$, onde M_1 e M_2 são constantes positivas, consegue unificar não só a tração uniforme cuja solução do problema referencial é $u(x_1, x_2) = \tau(x_2)^2 h/2$, e o cisalhamento uniforme $u(x_1, x_2) = \tau x_1 x_2$, apresentadas por Horgan e Payne [6], mas também outras situações de distribuição de forças na fronteira de Ω, tais como as soluções do problema de flexão dada por $u(x_1, x_2) = \tau\left(x_2^3 - x_1^3\right)/6$ ou $u(x_1, x_2) = \tau\left(x_2^3 - 3x_1^2 x_2\right)/6$.

Abstract.

This work extends the results obtained by Horgan e Payne [6] in 1992. We show that Saint-Venant Principle is valid for a plane retangular region occupied by an elastic body, whose constitutive equation contains non-linear terms as a generalization of the Hooke's law for small deformations. The non-linear terms considered by Horgan e Payne [6] are at least of the third order. The inclusion of second order terms in this paper provides a more realistic model for the theory. The main result is established using techniques of differential inequalities for quadratic functionals.

Referências

[1] J. Boussinesq, "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques", Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[2] S. Breuer e J.J. Roseman, On Saint-Venant's principle in three di-mensional nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **80** (1977), 191-203.

[3] C.O. Horgan e J.K. Knowles, The effect of nonlinearity on a principle of Saint-Venant type, *J. Elasticity*, **11** (1981), 271-291.

[4] C.O. Horgan e L.E. Knowles, Recent developments concerning Saint-Venant's principle, *Adv. Appl. Mech.*, **23** (1983), 179-269.

[5] C.O. Horgan e L.E. Payne, On Saint-Venant's principle in finite anti-plane shear: an energy approach, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **109** (1990), 107-137.

[6] C.O. Horgan e L.E. Payne, A Saint-Venant principle for a theory of nonlinear plane elasticity, *Quart. Appl. Math.*, **4** (1992), 641-675.

[7] J.D. Silva, "O Princípio de Saint-Venant em Elasticidade Não Linear", Tese de Doutorado IM, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2002.

[8] L.A. Medeiros e M.M. Miranda, "Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais", IM, UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[9] J.J. Roseman, The principle of Saint-Venant in linear and nonlinear plane elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **26** (1967), 142-162.

[10] A.B. Saint-Venant, Mémoire sur la torsion des prismes, *l'Academie des Sciences de l'Institut Impérial de France*, **14** (1853), 233-560.

[11] R.A Toupin, Saint-Venant's Principle, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **18** (1965), 83-96.

[12] P. Villaggio, "Qualitative Methods in Elasticity", Noordhoff Intern. Publishing, Leyden-Pisa, 1977.