

# Controle Ótimo de Pragas: Modelos Linearizados, Funcional Quadrático<sup>1</sup>

A.M. TUSSET<sup>2</sup>, M. RAFIKOV<sup>3</sup>, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Mestrado em Modelagem Matemática, Cx.P. 560, 98700-000 Ijuí, Brasil.

**Resumo.** O problema do controle ótimo de pragas com base no modelo presa-predador generalizado foi considerado neste trabalho. A linearização do modelo considerado permitiu reduzir o problema formulado ao problema de síntese de controle para sistemas lineares com o funcional quadrático. Foram encontradas as fórmulas que relacionam os parâmetros do processo de transição do sistema com os coeficientes de peso do funcional. A aplicação dos algoritmos propostos para os modelos de Lotka-Volterra com competição entre presas e presa-predador do tipo Holling mostrou a eficiência das estratégias do controle que estabeleceram os sistemas no nível desejado abaixo de danos econômicos.

## 1. Introdução

Segundo De Bach [2], o controle é a ação de parasitos, predadores e patógenos que mantém a densidade populacional de outros organismos em uma média mais baixa do que ocorreria em sua ausência.

A idéia principal do controle biológico é manter a população de pragas abaixo de nível de danos econômicos. Isto pode ser realizado através de liberação de parasitóides ou predadores. Existem três formas de liberação de inimigos naturais: inoculativo, inundativo e inoculativo estacional (ou sazonal), que são dependentes do sistema visado (alvo). Liberações inoculativas são realizadas com um pequeno número de insetos durante um longo período. Liberações inundativas de parasitóides ou predadores tem como objetivo a redução rápida da população da praga para seu nível de equilíbrio. A liberação inoculativa estacional é uma mistura do método inundativo e inoculativo, pois é liberada uma grande quantidade de insetos para se obter um controle imediato e espera-se o crescimento das populações para controle das gerações tardias. Neste caso, é muito importante definir a lei do controle, ou seja, determinar o número de inimigos naturais liberados em cada momento do tempo.

No trabalho [4] foi formulado e resolvido o problema do controle ótimo de pragas através da introdução de inimigos naturais para o modelo Lotka-Volterra com

---

<sup>1</sup>Trabalhos apresentados no CNMAC.

<sup>2</sup>angelo@pu.unc.br

<sup>3</sup>rafikov@admijui.ujui.tche.br

competição entre presas. A função de controle ótimo neste caso foi encontrada na forma não-linear. A tentativa de resolver um problema semelhante para o modelo presa-predador do tipo Holling mostrou que nem sempre existe esta possibilidade [7].

No trabalho atual é formulado e resolvido o problema do controle ótimo de pragas para modelo generalizado do tipo presa-predador. Isto foi possível devido a linearização do modelo na vizinhança do ponto de equilíbrio desejado e redução do problema formulado ao problema de síntese de controle para sistemas lineares com o funcional quadrático.

## 2. Formulação do Problema do Controle Ótimo de Pragas

De forma geral, as interações entre pragas e seus inimigos naturais numa lavoura podem ser representadas por um modelo do tipo presa-predador:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xf(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= yg(x, y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $x(t)$  representa a densidade de presas e  $y(t)$  a densidade de predadores, em um tempo  $t \geq 0$ . O sistema (2.1) sem controle é do tipo Kolmogorov [6]. Para sistemas presa-predador (2.1) as funções  $f$  e  $g$  satisfazem às seguintes condições ([3])  $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$  (para grandes valores de  $x$ ),  $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y} < 0$ .

Num agro-ecossistema presa é uma praga e, geralmente, é conhecido um valor  $x_d$  de densidade de pragas que não causa danos econômicos na lavoura. Por exemplo, para um sistema lagarta da soja - inimigo natural este valor é  $x_d \approx 20$ , considerando a quantidade de lagartas grandes por  $m^2$ . Uma densidade de lagartas maior que este valor causa danos econômicos à lavoura da soja.

Supomos que precisamos manter o sistema em um ponto de equilíbrio desejado  $(x^*, y^*)$  através da introdução de inimigos naturais. Podemos considerar  $x^* = x_d$  e neste caso o valor  $y^*$  pode ser encontrado da primeira equação do sistema (2.1):

$$f(x^*, y^*) = 0.\tag{2.2}$$

O sistema com controle neste caso tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xf(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= yg(x, y) + u^* + u,\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde

$$u^* = -y^*g(x^*, y^*).\tag{2.4}$$

O motivo da escolha do controle desejado  $u^*$  em forma de (2.4) é justificado pela seguinte razão: se tivéssemos as condições iniciais  $x_0 = x^*$ ,  $y_0 = y^*$ , ou seja, o sistema estivesse no estado de equilíbrio desejado, então o controle  $u^*$  poderia

manter o sistema controlado (2.3) no ponto  $(x^*, y^*)$ , e o controle  $u$  neste caso seria  $u \equiv 0$ . Para as condições iniciais diferentes de valores  $x^*$  e  $y^*$  é necessário aplicar o controle  $u$ .

O problema do controle ótimo de pragas pode ser formulado da seguinte forma. Encontrar a função de controle  $u$  que transfere o sistema (2.3) do estado inicial:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

ao estado final:

$$\begin{aligned} x(\infty) &= x_d = x^*, \\ y(\infty) &= y^* \end{aligned} \tag{2.6}$$

e minimiza o funcional

$$J[u] = \int_0^\infty (z^T Q z + u^2) dy, \tag{2.7}$$

onde  $z = \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{12} \end{pmatrix}$ , sendo  $Q$  uma matriz semi definida positiva.

A minimização do funcional (2.7) implica a minimização do desvio do sistema (2.3) do estado desejado e a minimização de gastos de inimigos naturais na aplicação de controle. Consideraremos o problema (2.3)-(2.6), supondo que as condições iniciais estão próximas do ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$ . Em um sistema real isto pode acontecer após aplicação de inseticida biológico ou químico. A proximidade de condições iniciais do ponto de equilíbrio permite linearizar o sistema (2.3) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^* f(x^*, y^*) + f(x^*, y^*)(x - x^*) + x^* f'_x(x^*, y^*)(x - x^*) \\ &\quad + x^* f'_y(x^*, y^*)(y - y^*), \\ \dot{y} &= y^* g(x^*, y^*) + g(x^*, y^*)(y - y^*) + y^* g'_x(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &\quad + y^* g'_y(x^*, y^*)(y - y^*) + u + u^*, \end{aligned} \tag{2.8}$$

Admitindo (2.2) e (2.4), reescrevemos (2.8) como:

$$\dot{z} = Az + Bu, \tag{2.9}$$

onde

$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e \\ A &= \begin{pmatrix} x^* f'_x(x^*, y^*) & x^* f'_y(x^*, y^*) \\ y^* g'_x(x^*, y^*) & g(x^*, y^*) + y^* g'_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Então podemos reduzir o problema do controle acima formulado (2.3)-(2.6) a um problema bem conhecido do controle ótimo do sistema linear (2.9), minimizando o funcional quadrático (2.7).

A função de controle ótimo para este problema pode ser encontrada através da seguinte fórmula [1]:

$$u = -Kx = -B^T Sx. \quad (2.11)$$

Para os valores dados  $q_{11}$  e  $q_{22}$  a matriz  $S$  pode ser encontrada da seguinte equação de Riccati [1]:

$$-SA - A^T S + SBB^T S = Q. \quad (2.12)$$

Esta equação matricial é equivalente ao seguinte sistema de equações do tipo de Riccati:

$$\begin{aligned} -s_{11}a_{11} - s_{12}a_{21} - a_{11}s_{11} - a_{21}s_{21} + s_{12}s_{21} &= q_{11} \\ -s_{21}a_{11} - s_{22}a_{21} - a_{12}s_{11} - a_{22}s_{21} + s_{22}s_{21} &= 0 \\ -s_{11}a_{12} - s_{12}a_{22} - a_{11}s_{12} - a_{21}s_{22} + s_{12}s_{22} &= 0 \\ -s_{21}a_{12} - s_{22}a_{22} - a_{12}s_{12} - a_{22}s_{22} + s_{22}s_{22} &= q_{22} \end{aligned} \quad (2.13)$$

É importante observar que se definirmos diferentes valores para a matriz de coeficientes de peso  $Q$ , teremos diferentes trajetórias, o que implica que a variação de valores das componentes da matriz  $Q$  influenciará na qualidade do processo transitório. Conforme [5] sugere-se a utilização de  $Q = I$ , onde  $I$  é matriz identidade, o que satisfaz que  $Q$  seja definida positiva, condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica. Considerando outros valores para as componentes de  $Q$  desde que  $Q$  seja definida positiva obtemos diferentes valores para o índice de desempenho (2.7) e diferentes trajetórias representativas. A análise da influência dos coeficientes de peso do índice de desempenho  $J$  ao processo de transição num caso geral é um problema complicado.

No nosso caso particular do sistema de segunda ordem existe a possibilidade de encontrar as relações entre os valores de coeficiente de peso e parâmetros do processo transitório.

Para encontrá-las reescrevemos os sistema (2.9) na forma de uma equação diferencial da segunda ordem:

$$\ddot{x} + \dot{x}(-a_{11} - a_{22} + s_{22}) + x(-a_{12}a_{21} + a_{12}s_{21} + a_{11}a_{22} - a_{11}s_{22}) = 0. \quad (2.14)$$

Designando

$$T = \frac{1}{\sqrt{-a_{12}a_{21} + a_{12}s_{21} + a_{11}a_{22} - a_{11}s_{22}}} \quad (2.15)$$

e

$$\xi = \frac{T}{2}(-a_{11} - a_{22} + s_{22}), \quad (2.16)$$

temos

$$T^2 \ddot{x} + 2\xi T \dot{x} + x = 0. \quad (2.17)$$

As raízes da equação característica correspondente são:

$$\gamma_1, \gamma_2 = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}. \quad (2.18)$$

Dependendo do sinal de  $\xi^2 - 1$  a solução de  $x$  tem uma das seguintes formas:

$$\xi^2 - 1 > 0 \Rightarrow x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (2.19)$$

$$\xi^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = (C_1 + C_2) e^{-\frac{\xi}{T} t}, \quad (2.20)$$

$$\xi^2 - 1 < 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{\xi}{T} t} (C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t), \quad (2.21)$$

onde  $\mu = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ .

Como  $\xi$  e  $T$  são sempre positivos,  $\xi^2 - 1$  é sempre menor que  $\xi^2$ . Então, os valores de  $r_1, r_2$  são sempre negativos. Se  $\xi^2 - 1 < 0$  então os valores de  $r_1$  e  $r_2$  são complexos e a solução tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , isso ocorre independente dos valores das constantes arbitrárias  $C_1$  e  $C_2$ , o que indica independência das condições iniciais.

A escolha de valores  $T$  e  $\xi$  significa a escolha do processo transitório. Para o controle ecológico é melhor que seu processo transitório tenha pequenas oscilações ou sem oscilações, mas por outro lado seja aquele que leva mais rápido ao equilíbrio desejado. Para encontrar a relação entre  $s_{11}$ ,  $s_{21}$ ,  $s_{22}$  e  $T$  temos que encontrar  $s_{ij}$  das equações (2.15), (2.16) e da terceira equação do sistema (2.13)

$$s_{22} = \frac{2\xi}{T} + a_{11} + a_{22}, \quad (2.22)$$

$$s_{21} = \frac{1+a_{11}^2 T^2 + 2a_{11} \xi T + a_{21} a_{12} T^2}{a_{12} T^2}, \quad (2.23)$$

$$s_{11} = \frac{s_{12} a_{22} + a_{11} s_{12} + a_{21} s_{22} - s_{12} s_{22}}{a_{12}}, \quad (2.24)$$

sendo  $s_{12} = s_{21}$ .

Temos que escolher os valores  $T$  e  $\xi$  tais que  $S$  e  $Q$  sejam matrizes definidas positivas. O procedimento de escolha de valores  $T$  e  $\xi$  é considerado para dois modelos do tipo presa-predador.

### 3. Controle Ótimo de Pragas com base no Modelo Lotka-Volterra com competição

Para este modelo temos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a - \gamma x - \alpha y, \\ g(x, y) &= -b + \beta x. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A matriz  $A$  neste caso tem a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma x^* & -\alpha x^* \\ \beta y^* & -b + \beta x^* \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Para realizar as simulações computacionais foi considerado o sistema lagarta da soja - inimigos naturais [4]. Os valores dos coeficientes e parâmetros para este sistema estão na Tabela 1.

As variações de populações de pragas e predadores do sistema sem controle, descritas pelo sistema (2.1) com funções  $f$  e  $g$  de (3.1), estão na Figura 1.

Tabela 1: Valores dos coeficientes e parâmetros para o modelo Holling II.

$x_0$	$y_0$	$a$	$b$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	$x^*$
25	5	0,16	0,19	0,02	0,001	0,0029	19

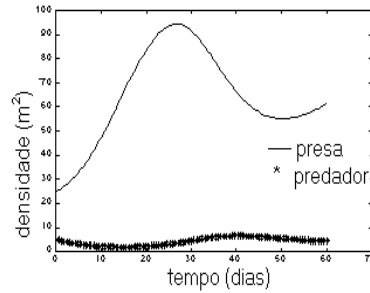


Figura 1: Variações de populações de pragas e predadores do sistema sem controle.

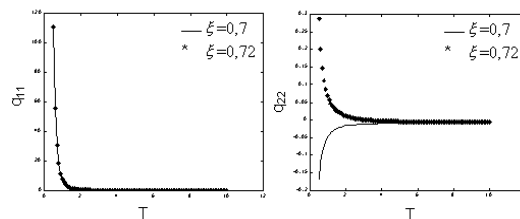
Os gráficos da Figura 1 mostram que apesar de que o sistema sem controle estabiliza-se no ponto de equilíbrio  $(65,5; 4,7)$ , o nível de equilíbrio de pragas  $x^* = 65,5$  é muito maior que o nível de danos econômicos  $x_d = 20$  e é necessário aplicar o controle.

Escolhendo como desejado um valor  $x^* = 19 < x_d = 20$ , de (3.1) encontramos o valor de  $y^*$ , que é encontrado como  $y^* = \frac{a-\gamma x^*}{\alpha}$ , ou seja,  $y^* = 7,05$ , para os dados da Tabela 1.

Então, para este caso temos:

$$A = \begin{pmatrix} -0,019 & -0,38 \\ 0,0145 & -0,1349 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para escolher o valor de  $T$  foram analisados os gráficos  $q_{11}(T)$  e  $q_{22}(T)$  que estão na Figura 2.

Figura 2: Dependência dos coeficientes  $q_{11}$  e  $q_{22}$  de  $T$  e  $\xi$ .

Nas Figura 2 estão os gráficos  $q_{11}(T)$  e  $q_{22}(T)$  para  $\xi = 0,7$  e  $\xi = 0,72$ . Para a escolha de  $T$  e  $\xi$  foram considerados os seguintes critérios:  $q_{11} > 0$  e  $q_{22} > 0$  para que a matriz de peso  $Q$  seja definida positiva; valores que levem o sistema rapidamente ao ponto de equilíbrio desejado evitando oscilações que possam levar o

sistema a valores negativos. Utilizando  $\xi = 0,72$  e  $T = 1,165$  estamos satisfazendo a estes critérios.

Para os valores  $\xi = 0,72$  e  $T = 1,165$  as matrizes  $Q$  e  $S$  são:

$$Q = \begin{pmatrix} 3,7589 & 0 \\ 0 & 0,0469 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 6,1031 & -1,8636 \\ -1,8636 & 1,0831 \end{pmatrix}.$$

A função de controle que caracteriza a introdução de predadores no sistema é:

$$u = 1,8636z_1 - 1,0831z_2 \tag{3.3}$$

Integrando o sistema (2.9) com controle (3.3) encontramos as variações de populações de pragas  $z_1$  e inimigos naturais  $z_2$  em relação aos valores  $x^*$  e  $y^*$ . As variações absolutas nas populações de pragas e seus predadores no sistema controlado podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= x^* + z_1 = 19 + z_1, \\ y &= y^* + z_2 = 7,05 + z_2. \end{aligned}$$

Os gráficos de  $x$  e  $y$  do sistema controlado estão na Figura 3.

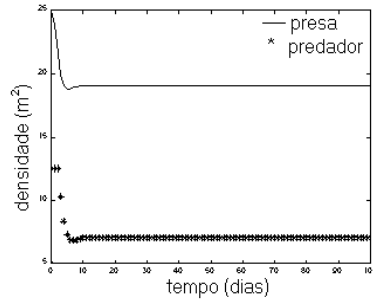


Figura 3: Variações de população de pragas e predadores do sistema controlado utilizando a função de controle (3.3).

## 4. Controle Ótimo de Pragas com base no Modelo Modelo Holling II

Para este modelo temos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a - \frac{ax}{K} - \frac{by}{(D+x)}, \\ g(x, y) &= \frac{\beta x}{(D+x)} - \gamma. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A matriz  $A$  neste caso tem a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} \left( \frac{-a}{K} + \frac{by^*}{(D+x^*)^2} \right) x^* & \left( \frac{-b}{(D+x^*)} \right) x^* \\ \left( \frac{D\beta}{(D+x^*)^2} \right) y^* & \left( \frac{\beta x^*}{(D+x^*)} - \gamma \right) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Tabela 2: Valores dos coeficientes e parâmetros para o modelo Holling II.

$a$	$b$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	$K$	$D$	$x^*$	$x_0$	$y_0$
0,16	0,432	0,02	0,05	0,04	80	70	19	25	5

Para realizar as simulações computacionais foram considerados os valores dos coeficientes e parâmetros para o modelo Holling II apresentados no trabalho [7]. Estes valores estão na Tabela 2.

As variações de populações de pragas e predadores do sistema sem controle, descritas pelo sistema (2.1) com funções  $f$  e  $g$  de (4.1), estão na Figura 4.

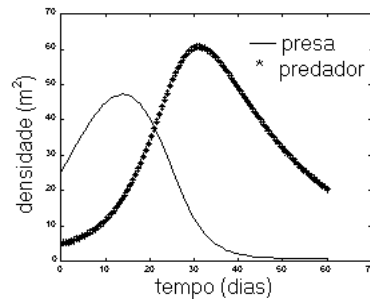


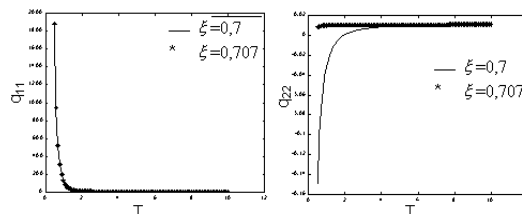
Figura 4: Variações de populações de pragas e predadores do sistema sem controle.

Os gráficos da Figura 4 mostram que, apesar de o sistema sem controle estabilizar-se no ponto de equilíbrio  $(10, 25; 25, 91)$ , com o nível de pragas abaixo de danos econômicos, é necessário a aplicação de controle pois durante mais de 25 dias o nível de pragas está muito acima do nível considerado como de dano econômico, tempo suficiente para prejudicar a lavoura. Escolhendo como desejado um valor do nível de controle  $x^* = 19 < x_d = 20$ , de (4.1) encontramos o valor de  $y^*$ , com  $y^* = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) (D + x^*)$ , ou seja,  $y^* = 25,134$  para os dados da Tabela 2.

Então neste caso teremos:

$$A = \begin{pmatrix} -0,012 & -0,0922 \\ 0,0718 & -0,0482 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para escolher o valor de  $\xi$  e  $T$  foram analisados os gráficos  $q_{11}(T)$  e  $q_{22}(T)$  que estão na Figura 5.

Figura 5: Dependência dos coeficientes  $q_{11}$  e  $q_{22}$  de  $T$  e  $\xi$ .



Na Figura 5 estão os gráficos  $q_{11}(T)$  e  $q_{22}(T)$  para  $\xi = 0,7$  e  $\xi = 0,707$ , analisando as curvas dos gráficos é possível determinar quais valores de  $T$  e  $\xi$  podem ser utilizados. Para a escolha de  $T$  e  $\xi$  foram considerados os seguintes critérios:  $q_{11} > 0$  e  $q_{22} > 0$  para que a matriz de peso  $Q$  seja definida positiva; valores que levem o sistema rapidamente ao ponto de equilíbrio desejado evitando oscilações que possam levar o sistema a valores negativos. Utilizando  $\xi = 0,707$  e  $T = 1,83$  estamos satisfazendo a estes critérios.

Para os valores  $\xi = 0,707$  e  $T = 1,83$  as matrizes  $Q$  e  $S$  são:

$$Q = \begin{pmatrix} 10,5 & 0 \\ 0 & 0,0106 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 26,3 & -3,0679 \\ -3,0679 & 0,7125 \end{pmatrix}.$$

A função de controle que caracteriza a introdução de predadores no sistema é:

$$u = 3,0679(x - 19) - 0,71251(y - 25,134). \quad (4.3)$$

Integrando o sistema (2.9) com controle (4.3) encontramos as variações de populações de pragas  $z_1$  e inimigos naturais  $z_2$  em relação aos valores  $x^*$  e  $y^*$ . As variações absolutas nas populações de pragas e seus predadores no sistema controlado podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= x^* + z_1 = 19 + z_1, \\ y &= y^* + z_2 = 25,134 + z_2. \end{aligned}$$

Os gráficos de  $x$  e  $y$  do sistema controlado estão na Figura 6 .

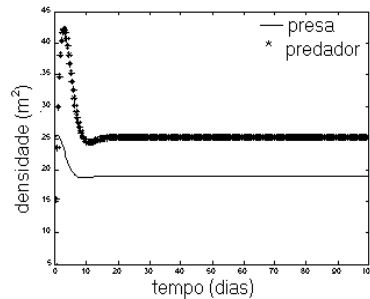


Figura 6: Variações de populações de pragas e predadores do sistema controlado utilizando a função de controle (4.3).

## 5. Conclusões

O problema do controle ótimo de pragas com base no modelo presa-predador generalizado foi considerado neste trabalho. A linearização do modelo considerado na vizinhança do ponto de equilíbrio desejado permitiu reduzir o problema formulado ao problema de síntese de controle para sistemas lineares com o funcional quadrático. Foi proposta uma metodologia de escolha dos coeficientes de peso do

funcional otimizado, e foram encontradas as fórmulas que relacionam os parâmetros do processo de transição do sistema com os coeficientes de peso do funcional.

A aplicação dos algoritmos propostos para os modelos de Lotka-Volterra com competição entre presas e o modelo presa-predador do tipo Holling mostrou a eficiência das estratégias do controle que estabeleceram os sistemas no nível desejado abaixo de danos econômicos.

**Abstract.** The optimal pest control problem, based in the generalized prey-predator model was considered in this work. The linearization of the considered model allowed to reduce the formulated problem to the control synthesis problem for lineal systems with the quadratic functional. The formulas that relate the parameters of the system transition process with the weight coefficients of the functional, were found. The application of the proposed algorithms for the Lotka-Volterra model with competition among preys and the Holling prey-predator model showed the efficiency of the control strategies that established the systems in the below economic juri level.

## Referências

- [1] N. Athans, P. Falb, “P. Optimal Control: an Introduction to the Theory and its Applications”, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [2] P. De Bach, “P. Optimal Control: an Introduction to the Theory and its Applications”, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [3] G. Edelstein, Keshet, “Mathematical Models in Biology”, Random House, 1988.
- [4] C. Feltrin e M. Rafikov, Aplicação da Função de Lyapunov num Problema de Controle Ótimo, em “Seleção do XXII CNMAC”, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, Vol. 1, pp. 83-92, SBMAC, 2002.
- [5] A.N. Kolmogorov, Sulla teoria di Volterra della lotta er l’esistenza, *G. Inst. Ital. Attuari.*, **7** (1936), 74-80.
- [6] K. Ogata, “Engenharia do controle moderno”, Addison Wesley, 1995.
- [7] M. Rafikov e C.C. Feltrin, Otimização do controle de pragas: método de funções de Lyapunov, em “Proceedings do Congresso Latino Americano de Biomatemática, X ALAB - V ELAEM”, pp. 71-80, IMECC-UNICAMP, 2001.