TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **5**, No. 1 (2004), 165-175.

O Uso de Prioris Não Informativas para Estimação do Tamanho Populacional

H.P. ZACHARIAS[1], Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, 45650-000 Ilhéus, BA, Brasil

J.G. LEITE[2], C.A.R. DINIZ[3], Departamento de Estatística, UFSCar, 13565-905 São Carlos, SP, Brasil

Resumo. Neste trabalho, apresentamos um modelo Bayesiano de captura-recaptura onde consideramos prioris não informativas para os parâmetros populacionais. Determinamos condições para que as respectivas distribuições a posteriori dos parâmetros existam e apresentamos os resultados originais referentes a existência dessas posterioris. Obtivemos, através das expressões exatas das estimativas, as características a posteriori do tamanho populacional, N.

1. Introdução

O método de captura-recaptura consiste, inicialmente, da seleção aleatória (ou não) de uma amostra de uma população, marcação de todos os seus indivíduos e sua devolução (ou uma parte deles) à população. Em seguida, são selecionados, em cada uma das k amostras($k \geq 2$), um número fixo ou aleatório de indivíduos e aqueles que não foram capturados na(s) amostra(s) anterior(es) recebem uma marca, antes de todos (ou uma parte deles) serem devolvidos à população. O objetivo é, então, estimar o tamanho populacional, N.

Uma dificuldade que envolve o uso da inferência clássica na estimação do tamanho de uma populacão é o fato de que a estimativa de máxima verossimilhança de N é infinita quando todas as capturas são de animais distintos ([8] e [16]). Uma forma de contornar este problema é usar modelos Bayesianos que produzem estimativas finitas para N.

Alguns pesquisadores tais como Chapman (1954), Darroch (1958, 1959), Seber (1965, 1982, 1986), Leite et. al. (1988), Bung e Fitzpatrick (1993) publicaram vários trabalhos para estimar parâmetros de populações animais por captura-marca-ção-recaptura, utilizando o método da máxima verossimilhança. No contexto Bayesiano, este problema vem sendo abordado por Hunter e Griffiths (1978), Castledine (1981), Smith (1988, 1991), George e Robert (1992), Ananda (1997), Yoshida *et al.* (1999), Leite *et al.* (2000).

[1] hzacharias@hotmail.com
[2] leite@power.ufscar.br
[3] dcad@power.ufscar.br

Neste trabalho, apresentamos um modelo Bayesiano de captura-recatura e determinamos os estimadores Bayesianos de N. Consideramos prioris não informativas para os parâmetros populacionais, e determinamos condições para que a distribuição a posteriori conjunta dos parâmetros exista, bem como expressões para a média e a moda da distribuição a posteriori marginal de N. Obtivemos, através das expressões exatas das estimativas, os sumários "a posteriori" de N.

2. Notações e Metodologia Bayesiana

Sejam N o tamanho da população; k o número de amostras ($k \geq 2$); p_i a probabilidade de que qualquer animal seja capturado na i-ésima amostra, independentemente dos demais, $i = 1, 2, \ldots, k$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ o vetor k-dimensional das probabilidades de captura; n_i o número de animais capturados na i-ésima amostra, $i = 1, 2, \ldots, k$; m_i o número de animais marcados capturados na i-ésima amostra, $i = 1, 2, \ldots, k$, $(m_1 = 0)$; $M_j = \sum_{i=1}^{j-1}(n_i - m_i)$, $j = 2, 3, \ldots, k$, o número de animais marcados presentes na população exatamente antes da seleção da i-ésima amostra, $(M_1 = 0)$; $r = \sum_{i=1}^{k}(n_i - m_i)$ o número total de animais distintos capturados durante todo o processo das k amostragens e $D = n_1, m_1; n_2, m_2; \ldots; n_k, m_k$ o conjunto de estatísticas ou dados referentes ao experimento.

Se as amostras selecionadas são independentes então a função de verossimilhança pode ser escrita como

$$Ł(N, \mathbf{p}|D) = P(n_1, m_1; n_2, m_2; \ldots; n_k, m_k|N, \mathbf{p}) \propto \binom{N}{r} \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{N - n_i}, \tag{2.1}$$

$N \geq r$ e $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Supondo $n_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, então a estimativa de máxima verossimilhança (EMV) de N, $\hat{N}$, é aproximadamente igual à solução da equação $\left(1 - \dfrac{r}{N}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \dfrac{n_i}{N}\right)$ ([5] e [16]).

Assumindo independência entre N e $\mathbf{p}$, a distribuição "a posteriori" conjunta de N e $\mathbf{p}$ é dada por

$$\pi(N, \mathbf{p}|D) \propto \binom{N}{r} \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{N - n_i} \pi(N)\pi(\mathbf{p}), \tag{2.2}$$

para todo $N \geq r$ e para quaisquer p_i, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, onde $\pi(N)$ e $\pi(\mathbf{p})$ são as distribuições "a priori" marginais de N e $\mathbf{p}$, respectivamente.

A próxima seção apresenta um modelo Bayesiano para estimar o tamanho populacional, envolvendo prioris não informativas para os parâmetros, N e $\mathbf{p}$.

2.1. Distribuições "a priori" Não Informativas para N e p

Suponhamos que "a priori" $\pi(N) = 1$, $N \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ e $\pi(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{k} \pi(p_i) = 1$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Neste caso, como $\pi(N)$ é uma distribução "a priori" imprópria, a distribuição "a posteriori" conjunta de N e $\mathbf{p}$ pode não existir. Na realidade ela existe como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Se as distribuições "a priori" de N e $\mathbf{p}$ forem não informativas, isto é, $\pi(N) = 1$, $N \in \mathbb{N}$, e $p_1, p_2, \ldots, p_k$, forem "a priori" i.i.d. com distribuição uniforme em $(0,1)$, ou seja, $\pi(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^k \pi(p_i) = 1$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, então $\pi(N, \mathbf{p}|D)$ existe e*

$$\pi(N, \mathbf{p}|D) \propto \binom{N}{r} \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{N-n_i},$$

para todo $N \geq r$ e para quaisquer p_i, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Prova. De fato, da relação (2.2), temos

$$\pi(N, \mathbf{p}|D) = \frac{\binom{N}{r} \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{N-n_i}}{\sum_{M \geq r} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \binom{M}{r} \prod_{i=1}^{k} q_i^{n_i} (1 - q_i)^{M-n_i} dq_1 dq_2 \ldots dq_k},$$

$N \geq r$ e $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Em particular,

$$\sum_{M \geq r} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \binom{M}{r} \prod_{i=1}^{k} q_i^{n_i} (1 - q_i)^{M-n_i} dq_1 dq_2 \ldots dq_k = \sum_{M \geq r} \frac{\binom{M}{r}}{(M+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}}.$$

Seja $M_k^* = max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Então, para todo $M \geq r$,

$$\begin{aligned} \frac{\binom{M}{r}}{\prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}} &\leq \left(\prod_{i=1}^{k} n_i!\right) \frac{M(M-1)(M-2)\ldots(M-r+1)}{\prod_{i=1}^{k} (M - M_k^* + 1)^{n_i}} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{k} n_i!\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{M_k^* - 1}{M}\right)^r} \leq \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i!}{\left(1 - \frac{M_k^* - 1}{r}\right)^r}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{M \geq r} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \binom{M}{r} \prod_{i=1}^{k} q_i^{n_i} (1 - q_i)^{M-n_i} dq_1 dq_2 \ldots dq_k &\leq \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i!}{\left(1 - \frac{M_k^* - 1}{r}\right)^r} \sum_{M \geq r} \frac{1}{M^2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

o que prova a existência de $\pi(N, \mathbf{p}|D)$. □

As distribuições "a posteriori" condicionais de N e $\mathbf{p}$ são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Se as distribuições "a priori" de N e $\mathbf{p}$ forem não informativas, isto é, $\pi(N) = 1$, $N \in \mathbb{N}$, e $\pi(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{k} \pi(p_i) = 1$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, então*:

$$(i)\ \pi(N|\mathbf{p}, D) = \binom{N}{r} \left(1 - \prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{r+1} \left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{N-r}, \quad N \geq r;$$

$$(ii)\ \pi(\mathbf{p}|N, D) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{Be(n_i+1, N-n_i+1)} p_i^{n_i}(1-p_i)^{N-n_i},\ 0 < p_i < 1,\ i =$$
$1, 2, \ldots, k$, *onde* $Be(n_i+1, N-n_i+1) = \dfrac{\Gamma(n_i+1)\Gamma(N-n_i+1)}{\Gamma(N+2)}$.

Prova. (i) De fato, pelo Teorema 2.1 temos

$$\pi(N|\mathbf{p}, D) = \frac{\pi(N, \mathbf{p}|D)}{\sum\limits_{M \geq r} \pi(M, \mathbf{p}|D)} = \frac{\binom{N}{r} \left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{N}}{\sum\limits_{M \geq r} \binom{M}{r} \left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{M}}, N \geq r.$$

Fazendo $j = M - r$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{M \geq r} \binom{M}{r} \left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{M} &= \sum_{j \geq 0} \binom{r+j}{r} \left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{r+j} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{r} \left(1 - \textstyle\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{-r-1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\pi(N|\mathbf{p}, D) = \binom{N}{r} \left(1 - \prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{r+1} \left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{N-r}, \quad N \geq r,$$

o que prova (i).

(ii) Considerando novamente o Teorema 2.1 temos

$$
\begin{aligned}
\pi(\mathbf{p}|N,D) &= \frac{\binom{N}{r}\displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}\,(1-p_i)^{N-n_i}}{\displaystyle\int_0^1 \cdots \int_0^1 \binom{N}{r}\prod_{i=1}^{k} q_i^{n_i}(1-q_i)^{N-n_i}dq_1dq_2\dots dq_k} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}\,(1-p_i)^{N-n_i}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\int_0^1 q_i^{n_i}(1-q_i)^{N-n_i}dq_i} = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}\,(1-p_i)^{N-n_i}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} Be(n_i+1,N-n_i+1)},
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\pi(\mathbf{p}|N,D) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{n_i}\,(1-p_i)^{N-n_i}}{Be(n_i+1,N-n_i+1)},\ 0<p_i<1,\ i=1,2,\dots,k,
$$

o que prova (ii). □

Corolário 2.2.1. (i) *A distribuição de probabilidade condicional de* N*, dados* $\mathbf{p}$ *e* D*, é igual a distribuição de probabilidade da variável aleatória* $X+r$*, onde* X *tem distribuição binomial negativa com parâmetros* $r+1$ *e* $1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$.

(ii) *A distribuição de probabilidade condicional de* $\mathbf{p}$*, dados* N *e* D*, é igual a distribuição de probabilidade do produto de* k *variáveis aleatórias independentes* $X_1, X_2, \dots, X_k$*, onde* X_i *tem distribuição beta com parâmetros* n_i+1 *e* $N-n_i+1$*,* $i=1,2,\dots,k$.

Prova. (i) Se X tem distribuição binomial negativa com parâmetros $r+1$ e $1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$, então

$$
P(X=x) = \binom{r+x}{r}\left(1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{r+1}\left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{x},\quad x=0,1,2,\cdots.
$$

Logo,

$$
P(X+r=y) = P(X=y-r) = \binom{y}{r}\left(1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{r+1}\left(\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right)^{y-r},
$$

$y=r, r+1, r+2, \dots$, o que prova (i), pelo item (i) do Teorema 2.2.
(ii) De fato, pelo item (ii) do Teorema 2.2, temos

$$
\pi(\mathbf{p}|N,D) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{Be(n_i+1,N-n_i+1)} p_i^{n_i}(1-p_i)^{N-n_i},\ 0<p_i<1,\ i=1,2,\dots,k,
$$

o que prova (ii). □

A distribuição de probabilidade "a posteriori" marginal de N para o caso das prioris não informativas de N e $\mathbf{p}$ é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Se as distribuições "a priori" de N e $\mathbf{p}$ forem não informativas, então a distribuição "a posteriori" marginal de N é da forma*

$$\pi(N|D) \propto \frac{\binom{N}{r}}{(N+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{N}{n_i}}, \ N \geq r.$$

Prova. Pelo Teorema 2.1 temos

$$\pi(N|D) \propto \int_0^1 \cdots \int_0^1 \binom{N}{r} \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} (1-p_i)^{N-n_i} dp_1 dp_2 \ldots dp_k$$

$$= \binom{N}{r} \prod_{i=1}^{k} Be(n_i+1, N-n_i+1) = \frac{\binom{N}{r}}{(N+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{N}{n_i}}.$$

Denotemos por N_0^* a moda de $\pi(N|D)$, $N \geq r$, que é o ponto de máximo de

$$K(N) = \frac{\binom{N}{r}}{(N+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{N}{n_i}}, \ N \geq r, \tag{2.3}$$

onde a função $K(N)$ é o fator de $\pi(N|D)$ que depende de N, ou seja, é o kernel de $\pi(N|D)$.

Como $M_k^* \leq r \leq S_k^*$, onde $M_k^* = max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ e $S_k^* = \sum_{i=1}^{k} n_i$, para determinarmos a moda de $\pi(N|D)$, basta considerar os casos $r = M_k^*$ e $M_k^* < r \leq S_k^*$. □

Teorema 2.4. *Se as distribuições "a priori" de N e $\mathbf{p}$ forem não informativas, então,*

(i) se $r = M_k^* = max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, então $N_0^* = r$ e

(ii) se $M_k^* < r \leq S_k^*$, então N_0^* é aproximadamente igual à solução da equação

$$\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(1 + \frac{1}{N}\right)^k = \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{n_i}{N}\right), \ N \geq r+1.$$

Prova. (i) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $r = M_k^* = n_1$. Logo,

$$K(N) = \frac{\binom{N}{n_1}}{(N+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{N}{n_i}} = \frac{\prod_{i=2}^{k} n_i!}{(N+1)^k \prod_{i=2}^{k} N(N-1)\dots(N-n_i+1)} \downarrow 0,$$

quando $N \longmapsto \infty$.

Assim, $N_0^* = r$, o que prova (i).

(ii) Se $M_k^* < r \leq S_k^*$, então N_0^* é aproximadamente igual à solução da equação $\dfrac{K(N)}{K(N-1)} = 1$, $N = r+1$. Como

$$\frac{K(N)}{K(N-1)} = \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{-k} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{n_i}{N}\right), \; N \geq r+1,$$

segue que N_0^* é aproximadamente igual à solução da equação

$$\left(1 - \frac{r}{N}\right) \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{n_i}{N}\right), \; N \geq r+1,$$

o que prova (ii). □

A estimativa bayesiana de N com relação a perda quadrática é a média da distribuição "a posteriori" marginal de N, que é dada por

$$E(N|D) = \sum_{M \geq r} M\pi(M|D) = \frac{\displaystyle\sum_{M \geq r} M \frac{\binom{M}{r}}{(M+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}}}{\displaystyle\sum_{M \geq r} \frac{\binom{M}{r}}{(M+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}}}$$

O comportamento da estimativa bayesiana de N, $E(N|D)$ é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.5. *Se as distribuições "a priori" de N e $\mathbf{p}$ forem não informativas, então,*

(i) se $r < \sum_{i=1}^{k} n_i$, então $E(N|D) < \infty$;

(ii) se $r = \sum_{i=1}^{k} n_i$ então, para todo $k \geq 3$, $E(N|D) < \infty$.

Prova. (i) Seja $C(r,k) = \left[\sum_{M \geq r} \frac{\binom{M}{r}}{(M+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}} \right]^{-1}$. Então,

$$E(N|D) = C(r,k) \sum_{M \geq r} M \frac{\binom{M}{r}}{(M+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} &\sum_{M \geq r} M \frac{\binom{M}{r}}{(M+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{k} n_i! \right) \sum_{M \geq r} \frac{M}{(M+1)^k \left(1 - \frac{M_k^* - 1}{M}\right)^r (M - M_k^* + 1)^{\sum_{i=1}^{k} n_i - r}}. \end{aligned}$$

Logo, se $r < \sum_{i=1}^{k} n_i$, então $\sum_{i=1}^{k} n_i - r \geq 1$ e

$$\begin{aligned} E(N|D) \quad &\leq C(r,k) \left(\prod_{i=1}^{k} n_i! \right) \sum_{M \geq r} \frac{M}{(M+1)^k \left(1 - \frac{M_k^* - 1}{M}\right)^r (M - M_k^* + 1)} \\ &\leq C(r,k) \frac{\left(\prod_{i=1}^{k} n_i! \right)}{\left(1 - \frac{M_k^* - 1}{r}\right)^{r+1}} \sum_{M \geq r} \frac{1}{(M+1)^k} < \infty, \end{aligned}$$

o que prova o item (i).

(ii) Se $r = \sum_{i=1}^{k} n_i$, então, para todo $k \geq 3$,

$$
\begin{aligned}
E(N|D) &= C(r,k) \sum_{M \geq r} M \frac{\binom{M}{r}}{(M+1)^k \prod_{i=1}^{k} \binom{M}{n_i}} \\
&\leq C(r,k) \frac{\left(\prod_{i=1}^{k} n_i! \right)}{\left(1 - \frac{M_k^* - 1}{r}\right)^r} \sum_{M \geq r} \frac{1}{(M+1)^{k-1}} < \infty,
\end{aligned}
$$

o que prova (ii). □

A Tabela 1 apresenta as EMV e as estimativas bayesianas de N para alguns valores de k, $n_1, n_2, \ldots, n_k$, r e S_k^*. As estimativas bayesianas de N são dadas por $E(N|D)$ e N_0^*, a média e a moda "a posteriori", respectivamente.

Tabela 1: EMV e Estimativas Bayesianas de N.

k	n_j	r	EMV	$E(N \mid D)$	N_0^*
	$n_1 = 40$	90	240	248	215
2	$n_2 = 60$	98	1200	1247	649
	$S_2^* = 100$	100	∞	∞	1300
	$n_1 = 1$	8	8	9	8
3	$n_2 = 5$	12	26	24	17
	$n_3 = 8$	13	52	38	22
	$S_3^* = 14$	14	∞	82	31
	$n_1 = 26$	120	161	160	158
	$n_2 = 38$	150	312	302	292
5	$n_3 = 50$	180	1272	1041	920
	$n_4 = 45$	185	2363	1642	1358
	$n_5 = 32$	190	14369	3744	2523
	$S_5^* = 191$	191	∞	5004	3035
	$n_1 = 18$	130	140	140	139
	$n_2 = 29$	170	214	212	211
	$n_3 = 51$	210	348	341	336
7	$n_4 = 55$	260	893	820	789
	$n_5 = 49$	290	4108	2737	2410
	$n_6 = 36$	295	9330	4201	3538
	$n_7 = 61$	298	37528	6485	4893
	$S_7^* = 299$	299	∞	7796	5602

Na Tabela 1 observamos que as estimativas Bayesianas de N são finitas, exceto no caso em que $k = 2$ e $r = S_2^*$. Nos casos em que $k = 3$, $k = 5$ e $k = 7$, notamos que as EMV de N tendem para o infinito quando o número de distintos se aproxima do total de capturados. Por outro lado, as estimativas Bayesianas de N são finitas mesmo quando $r = S_k^*$, como já mostramos anteriormente. Ressaltamos que as discrepâncias entre as estimativas do tamanho populacional para valores de r próximos dos valores S_k^*, é uma característica inerentes aos estimadores Bayesianos e de máxima verossimilhança.

Abstract. We present a Bayesian approach for problems related to capture-recapture model considering non informative priors to the model parameters. Any Bayesian capture-recapture model is present and the respectives Bayesian estimates of the populational size are determined.

Referências

[1] M.M.A. Ananda, Bayesian methods for mark-resighting surveys, *Com. Statist. - Theory Meth.*, **26** (1997), 685-97.

[2] J. Bung e M. Fitzpatrick, Estimating the number of species: a review, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **88** (1993), 364-73.

[3] B.A. Castledine, Bayesian analysis of multiple-recapture sampling for a closed population, *Biometrika*, **67** (1981), 197-210.

[4] D.G. Chapman, The estimation of biological populations, *Ann. Math. Statist.*, **25** (1954), 1-15.

[5] J.N. Darroch, The multiple-recapture census. I: Estimation of a closed population, *Biometrika*, **45** (1958), 343-59.

[6] E.I. George e C.P. Robert, Capture-recapture estimation via Gibbs sampling, *Biometrika*, **79** (1992), 677-83.

[7] A.J. Hunter e H.J. Griffiths, Bayesian approach to estimation of insect population size, *Technometrics*, **20** (1978), 231-34.

[8] J.G. Leite, J. Oishi e C.A.B. Pereira, A note on the exact maximum likelihood estimation of the size of a finite and close population, *Biometrika*, **75** (1988), 178-180.

[9] J.G. Leite, J. Rodrigues e L.A. Milan, A Bayesian analysis for estimating the number of species in a population using nonhomogeneos Poisson process, *Stat. and Prob. Lett.*, **48** (2000), 153-61.

[10] G.A.F. Seber, A note on the multiple recapture census, *Biometrika*, **52** (1965), 249-59.

[11] G.A.F. Seber, "The Estimation of Animal Abundance and Related Parameters", Charles Griffin, London, 1982.

[12] G.A.F. Seber, A review of estimating animal abundance, *Biometrics*, **42** (1986), 267-92.

[13] P.J. Smith, Bayesian methods for multiple capture-recapture surveys, *Biometrics*, **44** (1988), 1177-189.

[14] P.J. Smith, Bayesian analysis for a multiple capture-recapture model, *Biometrika*, **78** (1991), 399-408.

[15] O.S. Yoshida, J.G. Leite e H. Bolfarine, Stochastic monotonicity properties of Bayes estimation of the population size for capture-recapture data, *Stat. Prob. Lett.*, **42** (1999), 257-66.

[16] H.P. Zacharias, J.G. Leite e C.A.R. Diniz, A result about the maximum likelihood estimate of a population size, *Revista de Matemática e Estatística*, **20** (2002), 155-161.

[17] H.P. Zacharias, J.G. Leite e C.A.R. Diniz, Some Bayesian Results on the population size for capture-recapture models, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **16** (2002), 141-156.