TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **4**, No. 2 (2003), 149-158.

Análise de Localização de Deformação em Modelos Constitutivos de Dano Contínuo

A.R. BALBO[1], Departamento de Matemática, UNESP, Av. Eng. Luiz Edmundo C. Coube s/n, 17033-360 Bauru, SP, Brasil

S.P.B. PROENÇA[2], Departamento de Estruturas, USP, Av. Trabalhador São-carlense 400, 13566-590 São Carlos, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho pretende-se caracterizar a condição necessária de localização de deformação para modelos constitutivos de dano contínuo, através da análise das equações estática e dinâmica de equilíbrio do modelo, utilizando-se da condição fraca de propagação de Maxwell e da condição forte de propagação de Fresnel-Hadamard. A análise feita permitirá ligar o problema da localização de deformação com o de estacionariedade de ondas de aceleração e servirá para determinar uma condição necessária de perda de unicidade de solução, relativa à singularidade de tensores de localização de deformação ou tensores acústicos de dano, associados aos modelos constitutivos de dano contínuo. A condição necessária de perda de unicidade de solução ou de elipticidade é feita via análise de bifurcação de solução.

1. Introdução

Os modelos constitutivos para materiais idealizados como meios elásticos com dano e elastoplásticos com dano, formulados em [5] e [1], por apresentarem, a partir de um certo nível de deformação, um regime de encruamento negativo, onde o ganho de deformação se dá com decréscimo de tensão, sugerem um questionamento sobre a estabilidade e não-unicidade de resposta. De fato, nesses regimes, para uma dada taxa de tensão, podem existir taxas de deformação não únicas. À existência de pontos singulares, que caracterizam a perda de unicidade, corresponde uma mudança da condição matemática de elipticidade da equação diferencial que exprime o equilíbrio estático local do meio, ou hiperbolicidade da equação que exprime, também em forma local, o equilíbrio dinâmico. Por outro lado, deve-se observar que as condições matemáticas para unicidade são tipicamente atendidas dentro dos limites do regime de resposta elástica do material e garantem, ainda, a estabilidade de resposta numérica. Neste trabalho pretende-se abordar a questão da

[1] arbalbo@fc.unesp.br - O trabalho deste autor foi parcialmente financiado pela FAPESP.
[2] persival@sc.usp.br

bifurcação ou perda local de unicidade de resposta, caracterizando-se matematicamente as condições para a existência de uma nova solução estável em deformação, dita localizada, diferente daquela homogênea resultante da imposição de uma lei de encruamento negativa fixa. A partir da bifurcação a resposta homogênea passa a apresentar uma natureza instável. Assim, neste estudo, entende-se que as deformações localizadas se constituem numa bifurcação a partir de uma resposta inicial homogênea. A análise de localização aqui conduzida insere-se no âmbito das chamadas descontinuidades fracas, nas quais admite-se a existência de um salto das deformações incrementais em relação à uma superfície definida no volume ocupado pelo meio. Apresentam-se, inicialmente, algumas relações matemáticas que caracterizam a singularidade de uma função em relação a um plano. Com recurso aos sólidos lineares de comparação, discutem-se tais relações, ditas de compatibilidade de Maxwell e de propagação de Fresnel-Hadamard, baseando-se em [2] e [3], que também permitem estabelecer uma equivalência entre os problemas de localização e da estacionariedade da propagação de ondas de aceleração. Cabe observar que a análise aqui feita, consiste em um estudo da localização decorrente da resposta constitutiva do material num ponto de um meio contínuo e ilimitado, de modo que a influência de condições de contorno não é levada em consideração. Do ponto de vista físico, mesmo com essas limitações, tal análise pode fornecer informações úteis sobre as características dos mecanismos de ruptura dos materiais. No que segue, resume-se o conteúdo do artigo. Inicialmente, na seção **2** faz-se uma análise da condição de localização para um meio homogêneo e infinito, explorando-se a solução em deslocamentos da equação diferencial que rege o equilíbrio estático local. Em seguida, faz-se a mesma análise com a equação que rege o equilíbrio dinâmico e que permite ligar o problema da localização de deformação ao de estacionariedade de ondas de aceleração, de acordo com o proposto em [4]. Na seção **3**, tendo-se em vista os modelos constitutivos enfocados neste trabalho, a condição de perda de unicidade é então associada à singularidade dos tensores de localização de deformação, ou acústicos, relacionados ao modelos elástico com dano e elastoplástico com dano. A análise espectral destes tensores permite caracterizar a sua singularidade mediante o aparecimento de autovalores nulos. Ainda nessa seção, determina-se uma condição para se calcular os autovetores associados aos autovalores nulos, baseando-se no proposto em [3] e [6]. Os autovetores estão direcionados com a normal ao plano de localização na formulação que emprega a condição de equilíbrio estático ou, equivalentemente, com a direção de propagação da onda para problemas formulados pela condição de equilíbrio dinâmico.

2. Condição de compatibilidade de Maxwell e de propagação de Fresnel-Hadamard

2.1. Superfícies singulares

No que segue, considera-se que o sólido, tratado como um meio contínuo, esteja definido em uma região **B** do espaço puntual Euclideano (Espaço de Hilbert com dimensão finita), sendo Γ_u e Γ_s subconjuntos que definem regiões do contorno onde deslocamentos e forças são prescritas, respectivamente. Admite-se um regime de pequenas deformações e que o comportamento constitutivo do material ideal apresente uma resposta elástica linear, ou elastoplástica, com dano contínuo. Considera-se também que $\Psi(x)$ representa um campo de valor escalar, vetorial ou tensorial, contínuo na fronteira comum entre duas regiões Ω^+ e Ω^- contidas em $\mathbf{B}$, o que se verifica ao se aproximar de um ponto x_0, da superfície, partindo-se de pontos contidos nos seus lados positivo e negativo respectivamente. Através da superfície há, porém, um salto de Ψ em x_0 definido por: $[\Psi] = \Psi^+ - \Psi^-$. Assim, se $[\Psi(x_0)] \neq 0$, a superfície é dita singular com relação a Ψ neste ponto.

Lema de Hadamard: *Seja Ψ definida e continuamente diferenciável no interior da região Ω^+, de contorno definido por uma superfície regular $\partial\mathbf{\Omega}$ e admita-se que Ψ e $\nabla\Psi$ se aproximem de valores limites Ψ^+ e $\nabla\Psi^+$, na medida em que se tenda ao contorno por um caminho definido por pontos no interior de Ω^+. Considerando-se pontos vizinhos contidos na superfície de contorno e sendo Ψ diferenciável naqueles pontos, então*

$$d\Psi^+ = \nabla\Psi^+ dx, \tag{2.1}$$

onde dx é um vetor contido em $\partial\mathbf{\Omega}$.

De modo geral o lema pode ser aplicado para os dois lados da superfície, de modo que, considerando-se a região Ω^-,

$$d\Psi^- = \nabla\Psi^- dx. \tag{2.2}$$

Subtraindo-se a equação (2.2) da equação (2.1) tem-se a definição para o salto do campo Ψ através da superfície. Considerando-se que, $[d\Psi] = d\Psi^+ - d\Psi^- = [\nabla\Psi dx] = \nabla[\Psi dx] = d[\Psi]$, então

$$[d\Psi] = d[\Psi]. \tag{2.3}$$

Analogamente ao desenvolvimento anterior, devido a [7], pode-se mostrar que são válidas as relações que seguem . Se Ψ for um campo escalar, ou seja, $\Psi : \mathbf{V} \longrightarrow \Re$, então

$$[\nabla\Psi] = \nabla[\Psi], \tag{2.4}$$

ou seja, o salto do gradiente é o gradiente do salto.

Se Ψ for um campo vetorial, ou seja, $\Psi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, então, $\nabla\Psi^+$ é agora um tensor de segunda ordem e para o seu divergente, definido por $div\Psi = tr(\nabla\Psi)$, é válida a relação

$$[div\Psi] = div[\Psi] \tag{2.5}$$

e assim, o salto do divergente é o divergente do salto.

Quando ao longo dos pontos do contorno o valor do salto se mantiver constante, então $[\Psi] = K, K \in \Re$. Assim, vale a relação

$$[\nabla\Psi].e_j = 0, \tag{2.6}$$

onde e_j é um versor contido na superfície associado à componente j do vetor dx. Logo, $[\nabla\Psi]$ é ortogonal à superfície e como ele tem a dimensão de um vetor do espaço vetorial associado, então ele pode ser representado por $[\nabla\Psi] = \alpha n$, onde α é um escalar e n é um versor normal à superfície. Como consequência desta representação, segue que α representa o salto do gradiente na direção normal à superfície

$$[\nabla\Psi].n = \alpha n.n. \tag{2.7}$$

Uma conclusão análoga pode ser obtida para o rotacional.

2.2. Condição de compatibilidade de Maxwell

Considere-se um meio contínuo, homogêneo e homogeneamente deformado, submetido a um regime quase-estático de taxas de deformação. A hipótese cinemática que está associada à chamada forma fraca de localização, consiste em admitir que em determinado instante passe a existir um campo vetorial $\dot{u}(x,t)$ de velocidades ou taxas de deslocamentos, contínuo no meio mas com gradientes descontínuos em relação a uma superfície em seu interior. A condição de compatibilidade de Maxwell estabelece uma representação admissível para $[\nabla\dot{u}]$, obedecidas determinadas condições. Considere então que a superfície de singularidade seja plana e que a partir de um ponto daquela superfície, percorrendo-se qualquer direção nela contida $\dot{u}$ se mantenha constante. Nestas condições, aplicando-se o Lema de Hadamard resulta

$$d[\dot{u}] = [d\dot{u}] = [\nabla\dot{u}]e_j = 0, \tag{2.8}$$

onde e_j é um versor contido no plano de descontinuidade. A condição anterior pode ser verificada se o tensor $[\nabla\dot{u}]$ tiver a seguinte forma geral

$$[\nabla\dot{u}] = \gamma(m \otimes n), \tag{2.9}$$

onde γ é um escalar que quantifica o salto no gradiente, n é um versor ortogonal ao plano e m é um versor arbitrário, o qual define a direção de $\dot{u}$ e, como se verá em seguida, a natureza da descontinuidade. A forma geral proposta para $[\nabla\dot{u}]$ em (2.9) é a conhecida condição de compatibilidade de Maxwell. Um campo de taxas de deslocamento, introduzidas pela singularidade, que atende às condições de Hadamard e Maxwell, pode ser expresso na forma

$$\dot{u} = (\gamma m \otimes n)x = (n \cdot x)\gamma m \quad \text{se} \quad n \cdot x > 0,$$

onde o vetor x representa a posição do ponto genérico com relação ao plano de singularidade (plano de localização). A natureza do campo de deslocamentos introduzido pode ser identificada a partir do produto interno dos vetores γm por n. De fato, considerando-se por simplificação um caso plano, se estes vetores são paralelos, o modo de deslocamento introduzido pela localização é de *separação* (modo I da Mecânica da Fratura); se são perpendiculares, o tipo é de *cisalhamento puro* (Modo II); se estes formam um ângulo qualquer entre si, tem-se o tipo *misto* (Modos I e II).

A identificação da superfície de singularidade, por meio da determinação do seu versor normal n, resulta da imposição de uma outra condição: o equilíbrio estático entre as partes através do plano de localização. Antes de analisar as condições de equilíbrio é importante observar que, num regime de pequenas deformações, a relação de compatibilidade se escreve na forma

$$\dot{\epsilon}(u) = (\nabla\dot{u} + \nabla\dot{u}^T)/2. \tag{2.10}$$

Então, na iminência da localização, admitida a descontinuidade para o campo dos gradientes de velocidades $[\nabla\dot{u}]$, caracteriza-se uma singularidade para o campo de deformações em relação à superfície, com a equação do salto de deformação expressa por

$$[\dot{\epsilon}(u)] = \dot{\epsilon}^+(u) - \dot{\epsilon}^-(u) = \tfrac{1}{2}[\nabla\dot{u} + \nabla\dot{u}^T] \neq 0. \tag{2.11}$$

Desde que, $\dot{\sigma} = H\dot{\epsilon}(u)$, onde H é o Tensor Constitutivo de Rigidez Tangente Elástica com Dano, ou Elastoplástica com dano, de acordo com [5] e [1], então, também o campo de taxas de tensão resulta descontínuo, uma vez que o salto de tensão é representado por

$$[\dot{\sigma}] = H[\dot{\epsilon}] = H[\nabla\dot{u}] \neq 0. \tag{2.12}$$

A condição de equilíbrio estático implica, por outro lado, em salto nulo do vetor taxa de tensão, definido pela relação de Cauchy

$$[\dot{t}] = [\dot{\sigma}]n = 0. \tag{2.13}$$

Levando-se em conta a relação constitutiva (2.12) e considerando-se a equação (2.9), a condição de equilíbrio resulta

$$\gamma H(m \otimes n)n = 0. \tag{2.14}$$

Explorando-se, ainda, a simetria menor do Tensor Constitutivo ($H_{ijkl} = H_{ijlk}$), uma vez que $[\dot{\sigma}]$ e $[\dot{\epsilon}]$ são simétricos, a relação anterior pode ser escrita na forma

$$\gamma H(n \otimes n)m = 0. \tag{2.15}$$

A equação (2.15) está associada ao problema de equilíbrio estático local. O tensor $H(n \otimes n)$ é denominado Tensor de Localização, ou Acústico, e depende das propriedades do material, do nível de solicitação local e da direção da normal ao plano de localização. Este tensor é simétrico se, e somente se, o tensor constitutivo H for simétrico.

Na hipótese de salto não nulo do gradiente de velocidade ($\gamma > 0$), a singularidade do tensor de localização garante a verificação da (2.15). Tal singularidade implica na nulidade de seu determinante, o que fornece a relação para a determinação do versor normal n. Admitir, portanto, equilíbrio através da superfície é essencial para a determinação de n.

2.3. Condição de propagação de Fresnel-Hadamard

De acordo com [4], há uma correlação entre o problema da localização de deformações e a propagação de ondas planas, que aqui se pretende analisar em meios elásticos com dano ou elastoplásticos com dano. É possível mostrar que a condição de singularidade do Tensor de Localização, ou Acústico, implica na estacionariedade da frente da onda de aceleração. Considere-se que uma perturbação local gere, num meio homogêneo que ocupa uma região Ω, uma frente de onda que se propaga com velocidade c , segundo uma direção definida pelo versor n. Admita-se, ainda, por simplicidade que a onda seja plana, de modo que n passa a ser o versor normal do seu plano. Assim, a distância d de um ponto p qualquer do meio à frente de onda é determinada pela relação: $d = n \cdot x - ct$; onde x é o vetor posição do ponto em relação à origem de um sistema adotado como referência, usualmente coincidente com a fonte geradora da perturbação. Se o ponto considerado localiza-se na frente de onda, verifica-se: $n \cdot x = ct$. Considere-se então $\dot{u}(x,t)$, o campo vetorial de taxas de deslocamentos induzidos nos pontos do meio pela perturbação. Por hipótese, admita-se que tal campo seja contínuo em Ω e descontínuo através da frente de onda, isto é, $[\dot{u}] = 0, \forall x \in \Omega$ e $[\nabla\dot{u}] \neq 0$ se $n \cdot x = ct$. Levando-se em consideração a diferencial total do campo de velocidades e a relação (2.8), a equação do salto em velocidades pode ser escrita por: $[d\dot{u}] = [\nabla\dot{u}]dx + \ddot{u}dt = 0, [\nabla\dot{u}] \neq 0$.

Desta relação conclui-se que $[\ddot{u}] \neq 0$ e que, se num intervalo de tempo dt a frente de onda se desloca de uma distância dx determinada por: $n \cdot dx = cdt$ $(dx = cdtn)$, então

$$c[\nabla\dot{u}]n = -[\ddot{u}]. \tag{2.16}$$

Introduzindo-se um versor m, tal que $[\ddot{u}] = -\alpha m$, $\alpha > 0$, a relação (2.16) se torna

$$[\nabla\dot{u}] = \gamma(m \otimes n) \text{ com } \gamma = \frac{\alpha}{c} > 0, \tag{2.17}$$

recuperando a relação de compatibilidade de Maxwell vista em (2.9) e evidencia uma correspondência entre o problema da propagação de ondas e o de localização de deformação.

Por outro lado, uma forma geral para $[\nabla\dot{u}]$ que satisfaça a (2.16) é dada por

$$c[\nabla\dot{u}] = -[\ddot{u}] \otimes n. \tag{2.18}$$

A partir desta equação, da operação traço sobre ela e de (2.4), tem-se

$$div[\dot{u}] = -\tfrac{[\ddot{u}]\cdot n}{c}, \tag{2.19}$$

a qual, generalizada para campos tensoriais de ordem superior (segunda ordem) tem a forma

$$div[\sigma] = -\frac{[\dot{\sigma}]n}{c}. \tag{2.20}$$

Nos casos de meios contínuos, ondas que provocam um campo de deslocamentos com as características descritas, devem verificar, nos pontos do meio, a condição de equilíbrio dinâmico, expressa por

$$div[\sigma] = \rho[\ddot{u}], \tag{2.21}$$

onde ρ representa a densidade de massa local. Combinando-se as equações (2.18), (2.20) e (2.21), levando-se em conta também a relação constitutiva (2.12) e a simetria menor do tensor constitutivo, tem-se

$$\{H(n \otimes n) - \rho c^2 II\}[\ddot{u}] = 0, \tag{2.22}$$

onde II é o tensor identidade de segunda ordem. Escrevendo-se o salto da aceleração na forma $[\ddot{u}] = -\alpha m, \alpha > 0$, resulta

$$H(n \otimes n)m - \rho c^2 m = 0. \tag{2.23}$$

A equação (2.23) é denominada condição de propagação de Fresnel-Hadamard, e por representar um problema de auto-valor ou de análise Espectral, caracteriza-se como uma condição forte de localização. É possível ainda representar este mesmo problema através da equação

$$Qm - \omega m = 0, \tag{2.24}$$

onde $Q = H(n \otimes n)$, $\omega = \rho c^2$. A equação (2.24) está associada ao problema de equilíbrio dinâmico local, sendo possível mostrar que, uma solução particular em deslocamentos que satisfaz esta equação é $\dot{u}(x,t) = e^{i(n\cdot x - ct)}g(n)$, onde $m = g(n)$ é um versor arbitrário, que define a direção de $\dot{u}$ introduzido e também a natureza da descontinuidade. São as propriedades espectrais do tensor $H(n \otimes n)$ que definem os regimes de propagação da frente de onda, sendo $\omega_i = \rho {c_i}^2$ os seus autovalores e m_i os autoversores correspondentes, denominados de direções de polarização.

3. Análise Espectral do Tensor Acústico com Dano

Em particular, no caso de modelos associativos de dano, caracterizados por apresentarem um tensor acústico simétrico, os seus autovalores são reais e a verificação da condição de localização resume-se à procura de autovalores nulos. Neste caso, a condição de localização expressa em (2.15) é recuperada a partir da (2.24) se $\omega = 0 (c = 0)$, o que implica em estacionamento da frente de onda. De fato, se $\omega = 0 (c = 0)$, o problema espectral definido em (2.24) admite uma solução homogênea diferente da trivial se: $det H(n \otimes n) = 0, \|n\| = 1, n \in \Re^3$. Entretanto, observa-se que nos casos mais gerais de modelos não-associativos, com tensor acústico não-simétrico, pode-se verificar a singularidade do tensor acústico com autovalores não nulos, do tipo complexo. Tais casos não serão tratados aqui. Para conduzir uma investigação mais detalhada dos problemas espectrais (2.15) e (2.24) considerando-se um modelo de dano contínuo é necessário observar as relações do modelo constitutivo, encontradas em [5] e [1]:

$$f(\epsilon, \tau) \leq 0, \tag{3.1}$$

$$\tau - \bar{\tau} \leq 0 \Longleftrightarrow g(\alpha, \tau) = -\alpha - (\tau - \bar{\tau}) \leq 0 \ , \ \alpha \geq 0, \tag{3.2}$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\lambda} f_\epsilon(\epsilon, \tau), \tag{3.3}$$

$$\dot{\tau} = \dot{\lambda} r(\epsilon, \tau) \Longleftrightarrow \dot{\lambda} = -r(\epsilon, \tau)^{-1} \dot{\alpha}, \tag{3.4}$$

$$G = f_\tau r(\epsilon, \tau) \geq 0, \tag{3.5}$$

$$f \leq 0, \ \dot{\lambda} \geq 0, \ f\dot{\lambda} = 0, \tag{3.6}$$

$$\text{se } f = 0, \ \text{ então } \dot{f}\dot{\lambda} = 0, \ \dot{f} \leq 0 \ , \ \dot{\lambda} \geq 0, \tag{3.7}$$

$$H = H(\tau) = [E(\tau) - \tfrac{(f_\epsilon \otimes f_\epsilon)}{G}]\dot{\epsilon} \text{ se } \dot{\lambda} \geq 0. \tag{3.8}$$

Nas relações anteriores $\dot{\sigma}$ é o tensor taxa de tensão definido em função de um certo estado de deformação e de dano contínuo; a função de valor escalar f é um critério para a evolução do dano e representa um limite superior para a energia dissipada. O tensor $f_\epsilon(\epsilon, \tau) \geq 0$ é considerado ser normal à superfície definida pelo critério de evolução f e $r(\epsilon, \tau) \geq 0$ é uma função escalar que contém um registro da história de irreversibilidade ocorrida. As equações (3.6) e (3.7) definem, respectivamente, as condições de complementaridade e consistência para os modelos de dano e levam em conta a irreversibilidade do processo. A relação (3.2), a qual introduz uma variável de folga $\alpha \geq 0$, quantifica a energia a ser dissipada no processo. Na relação (3.5), a variável G é denominada de multiplicador ou módulo de dano contínuo. O operador de rigidez tangente para o modelo de dano é simétrico, em função da associatividade assumida em (3.3), e está definido em (3.8), onde E representa o tensor constitutivo de rigidez elástica.

Voltando à análise espectral, o tensor acústico de dano contínuo Q é expresso em uma forma geral, considerando lei de fluxo associativa e a (3.8), por

$$Q = H(n \otimes n) = E(n \otimes n) - \tfrac{1}{G}(f_\epsilon n) \otimes (f_\epsilon n). \tag{3.9}$$

Sendo $Q_E = E(n \otimes n)$, então, o problema espectral indicado em (2.24) pode ser analisado indiretamente através do seguinte problema modificado

$$Qm - \omega Q_E m = 0, \tag{3.10}$$

o qual é equivalente ao seguinte problema de autovalor generalizado

$$(Q_E^{-1} Q - \omega I_2)m = 0; \tag{3.11}$$

Esta equação não determina diretamente os autovalores do tensor acústico Q, mas é útil para determinar a condição de singularidade deste tensor, o que será justificado

a seguir. Decompondo-se Q em uma base ortonormal gerada pelos autoversores $m_j, j = 1, 2, 3$, então Q, representada nesta base, é semelhante a uma matriz diagonal expressa por $Q = M^T \Lambda M$, onde $\Lambda = diag[\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*]$.
O determinante de Q e, de maneira análoga, o determinante de $Q_E^{-1}Q$ são então calculados por

$$detQ = \omega_1^* \omega_2^* \omega_3^* \text{ e } detQ_E^{-1}Q = \omega_1 \omega_2 \omega_3. \tag{3.12}$$

Considerando-se a (3.12) tem-se a seguinte relação válida

$$detQ = detQ_E^{-1} \omega_1 \omega_2 \omega_3. \tag{3.13}$$

Então, a condição $detQ = 0$ implica na existência de autovalor nulo ($\omega_i = 0$) para (3.13). Esta última equação justifica a equivalência entre as pesquisas de autovalores nulos para (2.15), (2.24) ou (3.11). Para o caso de Q ser não-simétrica (caso não-associativo), este tensor pode ser não diagonalizável, mas, ainda assim, as relações (3.12) e (3.13) continuam válidas. Considerando-se o tensor acústico definido em (3.9) reescrito por $Q = Q_E - \frac{1}{G}(\beta \otimes \beta)$, onde, por simplificação, adotou-se $\beta = f_\epsilon n$, então, $Q_E^{-1}Q$ pode ser expresso por: $Q_E^{-1}Q = I_2 - \frac{Q_E^{-1}}{G}(\beta \otimes \beta)$. Voltando a (3.12) e considerando-se o Teorema de Pearson da Álgebra Linear, o qual garante que o autovalor $\omega = 1$ tem multiplicidade dois para um tensor com as características de $Q_E^{-1}Q$, pode-se admitir, sem perda de generalidade, que $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Resta, então, a determinação de ω_3 para se impor a condição de localização.
Desde que $det(I + \beta \otimes \beta) = 1 + \beta^T \beta$, então

$$det(Q_E^{-1}Q) = det(I_2 - \frac{Q_E^{-1}}{G}(\beta \otimes \beta)) = 1 - \frac{1}{G}\beta^T Q_E^{-1} \beta = \omega_3. \tag{3.14}$$

Finalmente, a condição necessária de localização de deformação para o problema espectral em análise se reduz a impor em (3.14) que $\omega_3 = 0$, então $G = \beta^T Q_E^{-1} \beta$. Substituindo-se o valor de G, definido em (3.5) e levando-se em conta a relação (3.4), a condição de localização para os modelos associativos com dano contínuo assume a forma

$$f_\tau = r^{-1} \beta^T Q_E^{-1} \beta = -\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\alpha}} \beta^T Q_E^{-1} \beta. \tag{3.15}$$

O autoversor n, com $\|n\| = 1$, que tem relação com a direção de propagação de onda e que propicia um valor máximo à equação (3.15), assinala o início da deformação localizada. Logo, esta condição pode ser colocada em uma forma mais geral, por

$$maximizar\{e^T n \mid \mathbf{f}_\tau = -\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\alpha}} \beta^T Q_E^{-1} \beta,\ \beta = f_\epsilon n,\ \|n\| = 1;\ e^T = (1, 1, 1)\}. \tag{3.16}$$

A análise de (3.16) é feita a partir do momento em que no modelo associativo de dano ocorrer a existência de $\dot{\lambda} > 0$, o que caracteriza o início do processo de dano local e, desde que, exista energia a ser dissipada, ou seja, se $\dot{\alpha} < 0$ em (3.2). Para o tratamento numérico do modelo, faz-se a *Análise Incremental* do problema de localização de deformação em modelos de dano contínuo, considerando-se as relações locais vistas em (3.2) a (3.8) adicionadas à equação de localização de deformação, expressa em (3.15). O tratamento numérico possibilita uma integração numérica exata, em regime de softening linear, se o incremento de deslocamento não viola o limite imposto em (3.2) para a energia de dissipação. As relações locais de dano são equivalentes a um problema de complementaridade linear enquanto que o problema incremental relativo à (3.16), trata-se de um problema de maximização. Assim, a análise incremental pode ser feita explorando-se métodos de otimização associados ao método dos elementos finitos.

4. Conclusão

Neste trabalho realizou-se um estudo detalhado da condição de localização de deformação para modelos associativos de dano contínuo. O tensor acústico, característico deste estudo, foi obtido a partir de abordagens locais estática e dinâmica do equilíbrio. Em particular, na abordagem dinâmica, mostrou-se que a localização está também relacionada ao problema da estacionariedade de ondas de aceleração. A condição necessária de localização de deformação foi relacionada à singularidade do tensor acústico. No caso do tensor ser simétrico, a análise espectral relacionou a condição de localização diretamente à existência de autovalores nulos para o mesmo e sua aplicação aos modelos associativos com dano contínuo, caracterizou a singularidade do tensor acústico a partir da existência de um autovalor nulo para um problema modificado. Esta se trata de uma condição necessária para a ocorrência da instabilidade. A condição de suficiência será investigada a partir da análise de pós-bifurcação sobre do modelo e é objeto de trabalho futuro.

Referências

[1] A.R. Balbo e S.P.B. Proença, On a regularising convex potential related to a variational formulation of an elastoplastic-damage constitutive model, *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, **2**, No. 2 (2002), 25-35.

[2] A. Benallal, Localisation phenomena in thermoelastoplasticity, *Arch. Mechanics*, **44** (1992), 15-29.

[3] M. Hachich, "Conditions de Bifurcation Dans les Solides", These de Doctorat, Lab. Mech. Tech., E.N.S. Cachan/C.N.R.S./Un., Paris, France, 1994.

[4] R. Hill, Acceleration waves in solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **10** (1962), 1-16.

[5] S.P.B. Proença e A.R. Balbo, On a variational formulation of an elastoplastic-damage constitutive model, em "Comput. Mech., New trends and Applications"(E. Oñate and S.R.Idelsohn, eds.), in CD, CIMNE, 1998.

[6] E.Rizzi, "Sulla Localizzacione Delle Deformazioni in Materiali e Strutture", Tesi di Dottorato, Dip. Ing. Strut., Politecnico di Milano, Italy, 1995.

[7] C.Truesdell e R.A. Toupin, "The Classical Field Theories", Handbuch der Physik, vol.III/1, Springer-Verlag, 1960.