

# Solução de um Problema Isoperimétrico para Predição do Diâmetro da Região Anular em Leitos de Jorro Cilíndricos

B.C. PASA<sup>1</sup>, A. DERIVI<sup>2</sup>, E.F. ZANOELO<sup>3</sup>, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI, Campus de Erechim, Av. Sete de Setembro 1621, 99700-000 Erechim, RS, Brasil.

**Resumo.** Um modelo matemático para predição do diâmetro equivalente da região anular em leitos de jorro cilíndricos é apresentado. A solução deste modelo requer a minimização de uma integral sujeita a uma restrição cuja função que a caracteriza apresenta-se na forma de uma integral definida (Problema Isoperimétrico). Segundo esta modelagem o cálculo da dimensão da região anular depende do diâmetro médio do jorro, bem como do ângulo de expansão/contração da interface jorro-ânulo próximo à entrada do leito. Enquanto que para estimar o primeiro parâmetro do modelo existem equações empíricas disponíveis, o cálculo do segundo requer uma rigorosa análise de tensões na região anular próxima à entrada do leito ([3]). Para evitar este complexo procedimento de cálculo, para estimativa do ângulo de expansão/contração do jorro, propõe-se um procedimento matemático alternativo. O desvio médio obtido por comparação entre resultados gerados por simulação e perfis experimentais confirma a validade do modelo.

## 1. Introdução

O leito de jorro é essencialmente um equipamento que propicia um íntimo contato entre fluido e partícula favorecendo certas operações industriais de interesse comercial como secagem, resfriamento, revestimento e reações sólido-fluido. A primeira unidade comercial a utilizar este tipo de tecnologia foi instalada em 1962, no Canadá, com o objetivo de secagem de cereais. Atualmente existem inúmeras instalações industriais em atividade operando com diferentes propósitos.

O equipamento pode ser descrito basicamente como um vaso aberto no topo e preenchido com partículas relativamente grosseiras (1-8 mm de diâmetro). O fluxo de fluido provoca uma corrente ascendente de partículas formando um núcleo central que se distingue em meio ao leito de sólidos. As partículas transportadas pelo fluido após alcançarem certa altura acima do nível do leito (região chamada de fonte) caem pela lateral, na região anular, entre a zona de baixa concentração de

---

<sup>1</sup>bpasa@bol.com.br

<sup>2</sup>agderivi@if.ufrgs.br

<sup>3</sup>everton.zanoelo@uri.com.br

sólidos e a parede do vaso, formando um leito poroso descendente com percolação contra-corrente do fluido.

A introdução de um fluido através de uma pequena abertura central localizada na base do vaso estabelece um modelo cíclico e sistemático de movimento dos sólidos. O fluxo de fluido provoca uma corrente ascendente de partículas formando um núcleo central vazio em meio ao leito de sólidos. As partículas transportadas pelo fluido após alcançarem uma certa altura acima do nível do leito (região chamada de fonte) caem pela lateral, na região anular, entre o núcleo vazio e a parede do vaso, formando um leito poroso descendente com percolação contra-corrente do fluido. As partículas que atingem o núcleo central, denominado região de jorro, são novamente lançadas até o topo do leito. Este tipo de sistema de contato sólido-fluido é descrito extensivamente na literatura ([7], [4], [5], [9] e [2]). Um esquema de um leito de jorro cilíndrico é apresentado na Figura 1.

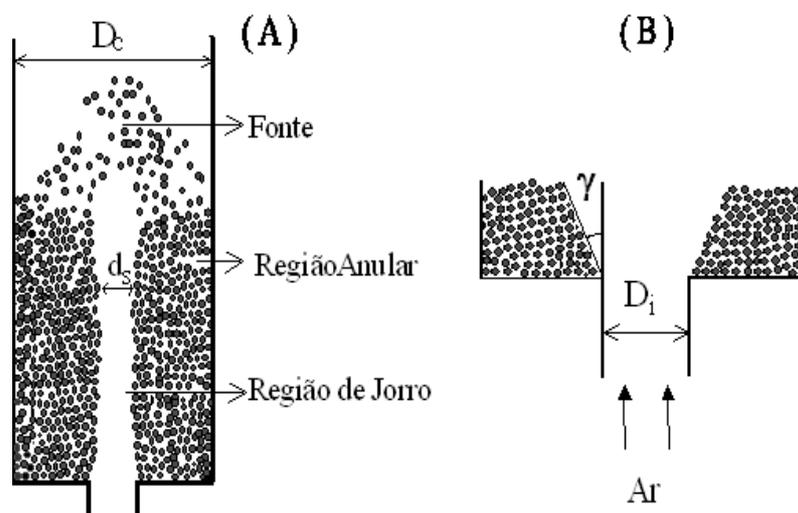


Figura 1: (A) - Representação esquemática do movimento de partículas em um leito de jorro cilíndrico com ângulo de contração do jorro na entrada ( $\gamma$  negativo); (B) - Ampliação da região próxima à entrada de um leito cilíndrico com expansão da interface jorro-ânulo ( $\gamma$  positivo).

A inabilidade de fazer previsões da posição da interface jorro-ânulo tem se demonstrado um dos maiores problemas no desenvolvimento de modelos interessados em gerar perfis fluidodinâmicos e de temperatura ([3]). O conhecimento do diâmetro ou da largura do jorro é de grande importância para o entendimento e modelagem da hidrodinâmica e para o projeto de leitos de jorro ([8] e [2]).

Vários estudos experimentais ([6], [10], [1], [11] e [8]) demonstraram que a variação do diâmetro equivalente da região anular com a altura do leito é uma

função complexa dos parâmetros geométricos e das condições de operação do leito.

Neste trabalho apresenta-se um modelo variacional, o qual é obtido por minimização de uma funcional sujeita a uma restrição, no sentido de predizer os perfis axiais de diâmetro equivalente da região anular em leitos cilíndricos. Com o propósito de confirmar a aplicabilidade do modelo no intervalo de condições de operação estudado, os resultados obtidos por simulação são comparados com resultados experimentais apresentados na literatura ([10]).

## 2. Modelo Matemático

O funcional a ser minimizado com o propósito de obter-se a variação do diâmetro equivalente da região anular com a altura do leito é encontrado aplicando-se o princípio da mínima ação de Hamilton ao caso investigado. A aplicação deste princípio implica que o trabalho realizado para criar a cavidade do jorro é igual à energia consumida por forças externas tentando impedir sua formação. Essencialmente isto significa que a cavidade do jorro adquire uma forma fixa de modo a minimizar a energia requerida para evitar o colapso do leito de sólidos. De acordo com a definição clássica de trabalho, seria necessário minimizar a pressão interfacial, a área e o comprimento da interface jorro-ânulo (I). Uma vez que a pressão interfacial é constante para uma dada condição de jorro estável, o trabalho mínimo requerido é obtido minimizando-se somente o comprimento e a área interfacial.

Apesar do interesse particular deste trabalho em leitos de jorro cilíndricos é importante ressaltar que em leitos de jorro bidimensionais a área interfacial é obtida multiplicando-se a largura do jorro pela altura da interface jorro-ânulo. Considerando-se que neste tipo de geometria a largura do jorro coincide com a da coluna, a qual permanece constante ao longo da altura, a minimização da energia requerida para formar a cavidade do jorro em leitos bidimensionais implica somente na minimização da altura interfacial (I).

Freqüentemente, assume-se na literatura que os perfis fluidodinâmicos e de variação do diâmetro equivalente da região anular com a altura são simétricos em relação a um eixo longitudinal localizado no centro da área de seção transversal do leito. Como conseqüência, a predição da variação do diâmetro da região de jorro com a altura em leitos cilíndricos não depende da posição ( $\theta$ ) ao longo do arco de circunferência. O problema é portanto matematicamente reduzido a um sistema de duas dimensões ( $r, z$ ), completamente definido em um corte axial de espessura infinitesimal da coluna ao longo do eixo de simetria. Portanto, sob o foco de equacionamento matemático, um leito bidimensional e cilíndrico podem ser tratados igualmente.

Matematicamente tem-se um problema isoperimétrico que consiste em encontrar uma função  $r_s(z)$  que minimize a integral definida na equação (2.1). A solução deste tipo de problema tem sido apresentada na literatura com variados propósitos ([3] e [12]),

$$I = \int_0^H f(z, r_s, \frac{dr_s}{dz}) dz, \quad (2.1)$$

sujeita a uma restrição

$$J = cte = \frac{H\bar{D}_s}{2} = \int_0^H g(z, r_s, \frac{dr_s}{dz}) dz, \quad (2.2)$$

onde  $f(z, r_s, \frac{dr_s}{dz})$  e  $g(z, r_s, \frac{dr_s}{dz})$  são definidos, respectivamente, pelas equações (2.3) e (2.4)

$$f = \left[ 1 + \left( \frac{dr_s}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$g = r_s. \quad (2.4)$$

Uma condição necessária para  $I$  ter um extremo é que  $r_s$  satisfaça a equação de Euler-Lagrange (2.5). Visto que, como o raio do jorro depende da restrição determinada pela equação (2.2), para minimizar  $I$  é também necessário introduzir o método dos multiplicadores de Lagrange, [12]

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial F}{\partial r_s} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$F = f + \lambda g. \quad (2.6)$$

Resolvendo-se a equação de Euler-Lagrange é possível finalmente propor uma expressão analítica para prever a variação do diâmetro do jorro com a altura do leito.

$$d_s = 2 \left[ C_2 - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda z + C_1)^2} \right]. \quad (2.7)$$

O diâmetro equivalente da região anular pode portanto facilmente ser calculado através da seguinte expressão:

$$d_a = D_c - d_s. \quad (2.8)$$

As constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  são obtidos respectivamente pelas condições de contorno  $r_s(z=0) = r_i$  e  $\frac{dr_s}{dz}(z=0) = \tan(\gamma)$ .

$$C_1 = \frac{\tan(\gamma)}{\sqrt{1 + (\tan(\gamma))^2}}, \quad (2.9)$$

$$C_2 = r_1 + \frac{\sqrt{1 - C_1^2}}{\lambda}. \quad (2.10)$$

O multiplicador de Lagrange  $\lambda$  pode ser estimado pela equação (2.11), usando um método para cálculo de zero de funções.

$$\begin{aligned} \frac{H\bar{D}_s}{2} = HC_2 - \left(\frac{1}{2\lambda^2}\right)\{(\lambda H + C_1)\sqrt{1 - (\lambda H + C_1)^2} \\ - C_1\sqrt{1 - C_1^2} + \sin^{-1}(\lambda H + C_1) - \sin^{-1}(C_1)\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

### 3. Resultados e Discussões

Como previamente mencionado, o modelo matemático dado pela equação (2.7) depende do diâmetro médio do jorro,  $\bar{D}_s$  e do ângulo de expansão/contração na entrada do leito,  $\gamma$ . As equações empíricas disponíveis para estimativa do diâmetro médio da região de jorro são freqüentemente ajustadas utilizando-se um número limitado de dados experimentais. Atualmente, mesmo a equação mais freqüentemente utilizada na literatura, [8] tem sua confiabilidade questionada. De acordo com [2] esta equação leva a superestimar o diâmetro do jorro em colunas cilíndricas. Devido à inexatidão das equações disponíveis para prever a medida do diâmetro médio do jorro para leitos cilíndricos, este parâmetro foi encontrado resolvendo a equação (2.2), aplicando a regra de Simpson e utilizando perfis experimentais da variação do diâmetro do jorro com nível do leito apresentados em [10].

Neste trabalho o cálculo do ângulo de expansão/contração na entrada do leito é proposto assumindo-se que o mesmo adquire um valor que minimize o comprimento da interface jorro-ânulo. Novamente aplicou-se o princípio postulado por Hamilton. O menor valor do comprimento da interface jorro-ânulo para uma dada condição de operação determina o ângulo de expansão/contração. Substituindo-se a forma diferencial da equação (2.7) na equação (2.1) e integrando-a na direção longitudinal, resulta

$$I = \left[ \frac{\sin^{-1}(\lambda H + C_1) - \sin^{-1}(C_1)}{\lambda} \right]. \quad (3.1)$$

Contudo este procedimento é dispendioso, visto que para uma única condição de operação é necessário resolver a equação (3.1) para vários ângulos de expansão

/contração do jorro. Uma solução mais rápida pode ser obtida diferenciando-se a equação (2.9) em relação ao ângulo de expansão/contração da interface jorro-ânulo e igualando a derivada a zero, obtendo-se portanto o valor de  $C_1$  correspondente ao mínimo valor da altura interfacial, equação (3.2). Finalmente, substituindo-se a equação (3.2) em (3.3) pode-se encontrar o valor do ângulo de expansão/contração que minimiza a energia necessária para manter a cavidade de jorro.

$$C_1 = -\lambda H, \quad (3.2)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \sqrt{\frac{C_1^2}{1 - C_1^2}}. \quad (3.3)$$

O próximo passo foi verificar a confiabilidade do modelo matemático previamente descrito para representar a variação do diâmetro equivalente da região anular com o nível do leito. Diferentes condições de operação, apresentadas na Tabela 1, foram utilizadas para testar sua consistência. Todas as simulações realizadas utilizaram o diâmetro médio experimental do jorro e o ângulo de expansão/contração obtido através da equação (3.3).

Tabela 1: Condições de operação de Thorley et al., 1959, [10] consideradas neste trabalho.

<i>Corrida</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
$D_c$	0,61	0,61
$D_i$	0,051	0,101
$H$	1,83	1,83
$Q$	0,098	0,121
$\gamma$	1,2	-1,1
$\bar{D}_s$	0,076	0,078

A Figura 2 apresenta os valores estimados e experimentais de  $\mathbf{d}_a$  para as condições de operações relatadas nas corridas A e B da Tabela 1. Pode-se observar a partir da Figura 2 que os resultados obtidos por solução do modelo estão em bom acordo com os resultados experimentais mesmo quando ocorre contração da interface jorro-ânulo próximo à entrada do leito. Esta versatilidade do modelo é muito importante visto que a forma da cavidade do jorro em questão freqüentemente ocorre em leitos estáveis.

Embora para as condições de operação aqui relatadas este modelo matemático seja capaz de descrever com boa precisão a variação do diâmetro equivalente da região anular, sua confiabilidade parece ser restrita para condições de jorro estável. Alguns resultados experimentais obtidos em [11] próximos à mínima velocidade do jorro estável indicam perturbações que se desenvolvem próximas ao orifício de entrada de ar e se propagam como ondas ao longo de todo o leito.

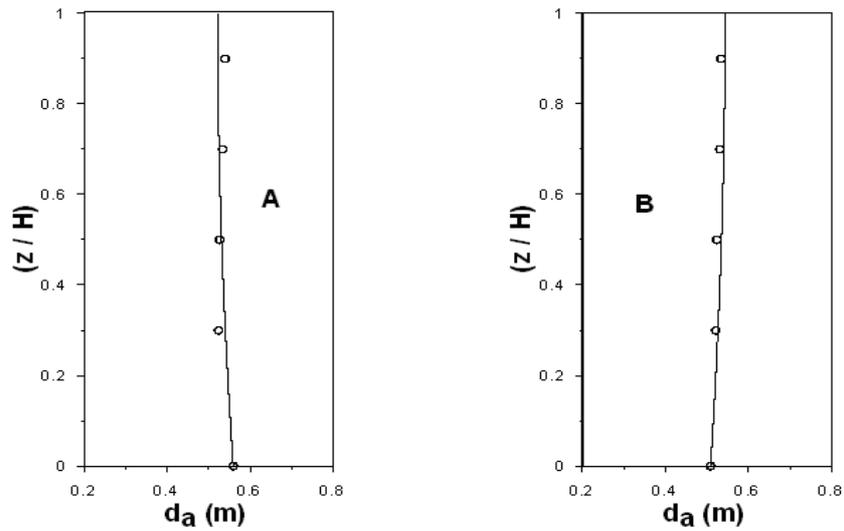


Figura 2: Comparação entre resultados experimentais e calculados para as condições definidas nas corridas A e B da Tabela 1.

#### 4. Conclusões

A solução de um problema isoperimétrico foi proposta com o objetivo de determinar a variação do diâmetro equivalente da região anular em leitos de jorro cilíndricos. O princípio de Hamilton foi aplicado para obtenção da integral a ser minimizada, bem como na estimativa do ângulo de expansão/contração do jorro. Este parâmetro foi assumido como o valor necessário para minimizar o comprimento da interface jorro-ânulo. Para ambas as condições de operação investigadas obteve-se um desvio médio relativo entre valores experimentais e calculados inferior a 2%.

#### 5. Lista de Símbolos

- $C_1$  constante de integração definida pela equação (2.9)
- $C_2$  constante de integração definida pela equação (2.10)
- $d_s$  diâmetro do jorro, m
- $D_c$  diâmetro da coluna, m
- $D_i$  diâmetro do orifício na base do leito, m
- $\bar{D}_s$  diâmetro médio do jorro, m
- $f$  função definida pela equação (2.3)
- $F$  função definida pela equação (2.6)

<b>g</b>	função definida pela equação (2.4)
<b>Q</b>	vazão volumétrica, $\frac{m^3}{s}$
<b>H</b>	altura do leito de partículas, m
<b>I</b>	comprimento interfacial jorro-ânulo, m
<b>J</b>	função restrição
<b>r<sub>i</sub></b>	raio do orifício na base do leito, m
<b>r<sub>s</sub></b>	raio do jorro, m
<b>z</b>	coordenada axial no leito, m
<b>γ</b>	ângulo de expansão/contração do jorro próximo a entrada do leito
<b>λ</b>	multiplicador de Lagrange ( $m^{-1}$ )

**Abstract.** A mathematical model for predicting the annular diameter in cylindrical spouted beds is proposed. The model solution requires finding a function that extremizes an integral which must satisfy a definite integral constraint. This kind of mathematical problem is frequently called an isoperimetric problem. The annular diameter predictions depend on the average spout diameter and on the spout expansion angle. While there exists empirical equations available to estimate the first model parameter, the second one requires a rigorous stress analysis of the particles at the entrance of the bed ([3]). To avoid this difficulty this work proposes a simple mathematical strategy to calculate the spout expansion angle. The average error between calculated and experimental results confirms the reliability of the proposed model.

## Referências

- [1] A.D. Goltsiker, "Doctoral dissertation", Lensovet Technol. Inst., Leningrad, 1967.
- [2] Y. He, C.J. Lim, S. Qin e J.R. Grace, Spout Diameters in Full and Half Spouted Beds, *The Canadian Journal of Chem. Eng.*, **61** (1998), 297-302.
- [3] R.S. Krzywanski, N. Epstein e B.D. Bowen, Spout Diameter Variation in Two-Dimensional and Cylindrical Spouted Beds: a Theoretical Model and its Verification, *Chem. Eng. Science*, **44** (1989), 1617-1626.
- [4] G.A. Lefroy e J.F. Davidson, The Mechanics of Spouted Beds, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **47** (1969), 120-128.
- [5] K.B. Mathur e N. Epstein, "Spouted Beds", Academic Press, New York, 1974.
- [6] K.B. Mathur e P.E. Gishler, A technique for contacting gases with coarse solid particles, *A.I.Ch.E.J.*, **1** (1955), 157.
- [7] T. Mamuro e H. Hattori, Flow Pattern of Fluid in Spouted Beds, *J. Chem. Eng. Japan*, **1** (1968), 1-5.

- [8] G.S. McNab, Prediction of spout diameter, *Br. Chem. Eng. Process Technol.*, **17** (1972), 532.
- [9] R.K. Stocker e L.A. Behie, Hydrodynamic and Thermal Modelling of a High Temperature Spouted Bed Reactor With a Draft Tube, *Can. J. Chem. Eng.*, **68** (1990), 302-311.
- [10] B. Thorley, J.B. Saunby, K.B. Mathur e G.L. Osbery, An analysis of air and solid flow in spout wheat bed, *Can. J. Chem. Eng.*, **37** (1959), 184.
- [11] G. Volpicelli, G. Raso e L. Massimilla, Gas and solid flow in bidimensional spout beds, em "Proceeding of the Int. Symp. on Fluidization", Netherlands University Press, p.123-133, Amsterdam, 1967.
- [12] C.R. Wylie e L.C. Barret, "Advanced Engineering Mathematics", IE-McGraw-Hill, 6th ed, 1995.

