

## Algumas Medidas de Não Normalidade de Matrizes

E.L. KRAEMER<sup>1</sup> Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-900 Florianópolis, SC, Brazil

F.S.V. BAZÁN<sup>2</sup> Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-900 Florianópolis, SC, Brazil.

**Resumo.** Apresentamos um estudo de medidas de não normalidade de matrizes enfatizando relações entre tais medidas que facilitam o estudo de sensibilidade de autovalores. Também são mostradas algumas aplicações na teoria de sistemas dinâmicos discretos, enfocando o *problema de realização* para estes sistemas. São obtidas estimativas teóricas sobre a não normalidade das matrizes envolvidas para alguns importantes métodos de realização.

### 1. Introdução

É bem conhecido que os autovalores de uma matriz normal são pouco sensíveis a pequenas perturbações nas entradas da matriz. Para matrizes não normais, a situação pode ser bem diferente já que existem casos em que os autovalores são muito sensíveis a perturbações nos dados. Um exemplo desta natureza pode ser encontrado em Golub and Van Loan [9, Ex. 7.2.3, p. 322]. Porém, não normalidade não implica necessariamente alta sensibilidade nos autovalores; Golub[9, Ex. 7.2.2, p. 322]. Uma maneira para se explicar este fenômeno é em termos de quão longe uma matriz está de ser normal.

Este trabalho tem dois objetivos. Primeiro, apresentar um estudo de diferentes maneiras de quantificar a não normalidade de uma matriz através de *medidas de não normalidade*, e segundo, explorar informações das medidas estudadas para discutir a sensibilidade dos autovalores de matrizes não normais. Naturalmente, todas as medidas de não normalidade são maiores ou iguais a zero, o zero sendo atingido unicamente se a matriz for normal. Assim, quanto mais próxima estiver a matriz de ser normal, mais próxima de zero a medida utilizada deve ficar. Do ponto de vista prático, exceto para o caso de matrizes defectivas, quanto mais próxima de zero a medida de não normalidade, tanto mais confiáveis - do ponto de vista de estabilidade - serão os autovalores obtidos.

Em primeiro lugar, vamos introduzir algumas definições que serão utilizadas ao longo do texto. Nas seções 2 e 3, respectivamente, definiremos as medidas acima

---

<sup>1</sup>E-mail:edson@pam.mtm.ufsc.br

<sup>2</sup>Este trabalho foi desenvolvido com apoio do CNPq, contrato 300487/94-0(NV). E-mail:fermin@mtm.ufsc.br

mencionadas e estabeleceremos algumas relações entre elas. Aplicações figuram na seção 4 e 5. Alguns dos resultados da seção 4 aparecem em [1] e [2], mas há pelo menos um resultado original. Na seção 5 apresentamos um experimento numérico com base nos dados de um problema que aparece na engenharia aeroespacial. Na seção 6 faremos algumas considerações finais.

O conjunto de todas as matrizes complexas  $n \times n$  é denotado por  $\mathbb{C}^{n,n}$ .  $\mathbb{C}^n$  denota o espaço de vetores coluna  $n$ -dimensionais com coordenadas complexas.  $A^*$  denota a transposta conjugada de  $A$ . Os conjuntos de matrizes normais, diagonais e unitárias em  $\mathbb{C}^{n,n}$  são denotados por  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{D}$ , e  $\mathcal{U}$ , respectivamente.  $\|A\|_2$  e  $\|A\|_F$  denotam as normas spectral e de Frobenius de  $A$ , respectivamente. Para uma matriz não singular  $X$ ,  $k_2(X) = \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2$  e  $k_F(X) = \|X\|_F \|X^{-1}\|_F$  são os números de condição de  $X$  relativos às normas spectral e de Frobenius. Se  $\lambda_j$  é um autovalor simples de  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  o número de condição do autovalor  $\lambda_j$  é definido por  $1/s_j$ , com

$$s_j = y_j^* x_j / (\|x_j\|_2 \|y_j\|_2), \quad (1.1)$$

em que  $x_j$  e  $y_j$  são autovetores à direita e esquerda de  $A$  associados a  $\lambda_j$ , respectivamente.

## 2. Algumas Medidas de Não Normalidade

É importante enfatizar que uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  é normal se, e somente se,

$$A^* A = A A^*. \quad (2.1)$$

Uma primeira maneira de medir quão longe uma matriz está de ser normal é através da distância dela ao conjunto de matrizes normais. Duas medidas são [7]

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \min\{\|A - N\|_F : N \in \mathcal{N}\}, \\ \tilde{\mu}_1(A) &= \min\{\|A - N\|_2 : N \in \mathcal{N}\}. \end{aligned}$$

A existência do minimizador  $N$  é estabelecida por Ruhe, em [17]. Outra medida natural decorre da expressão dada em (2.1), como segue

$$\begin{aligned} \mu_2(A) &= \|A^* A - A A^*\|_F^{1/2}, \\ \tilde{\mu}_2(A) &= \|A^* A - A A^*\|_2^{1/2}. \end{aligned}$$

Outras medidas importantes decorrem da decomposição de Schur:  $U^* A U = \Lambda + M$ ,  $U \in \mathcal{U}$ ,  $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{D}$ , e  $M$  estritamente triangular superior. A idéia é medir não normalidade através da alguma norma matricial de  $M$ ,  $\nu(M)$ , conforme dado abaixo [10]:

$$\Delta_\nu(A) = \min\{\nu(M) \mid U^* A U = \Lambda + M\}.$$

Para o caso de utilizarmos as normas de Frobenius e spectral, obtemos as medidas

$$\begin{aligned} \mu_3(A) &= \Delta_F(A) = \left( \|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}, \\ \tilde{\mu}_3(A) &= \Delta_2(A). \end{aligned}$$

Uma outra forma de medir não normalidade é pela proximidade entre valores singulares e autovalores, em módulo. Este critério motiva a seguinte definição [17]:

$$\mu_4(A) = \max_i |\sigma_i - |\lambda_i||,$$

com  $\lambda_i$  e  $\sigma_i$  os respectivos autovalores e valores singulares da matriz  $A$ . Finalmente, se  $A$  é diagonalizável, podemos definir

$$\begin{aligned} \mu_5(A) &= \min\{k_F(X) - n : X \in \mathbb{C}^{n,n}, X^{-1}AX = \Lambda\}, \\ \tilde{\mu}_5(A) &= \min\{k_2(X) - 1 : X \in \mathbb{C}^{n,n}, X^{-1}AX = \Lambda\}. \end{aligned}$$

Estas são o que consideramos as medidas mais interessantes encontradas na literatura (existem outras como se pode verificar em Elsner [7]). Na seção seguinte estabeleceremos importantes desigualdades úteis para estimar as medidas acima.

### 3. Comparações entre medidas de não normalidade

O teorema seguinte estabelece relações entre as medidas definidas na seção precedente.

**Teorema 1.** : *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . São válidas as seguintes desigualdades:*

1.  $\tilde{\mu}_i \leq \mu_i \leq \sqrt{n} \tilde{\mu}_i, i = 1, 2, 3.$
2.  $\mu_3 \leq \left(\frac{n^3-n}{12}\right)^{1/4} \mu_2.$
3.  $\mu_2^2 \leq 4\|A\|_2 \mu_1.$
4.  $\mu_2^2 \leq 4\|A\|_F \tilde{\mu}_1 + \sqrt{2n} \tilde{\mu}_1^2.$
5.  $\mu_1 \leq \mu_3.$
6.  $\mu_4 \leq \tilde{\mu}_3.$
7.  $\mu_3^2 \leq 2\sqrt{n} \|A\|_F \mu_4 \leq 2n\|A\|_2 \mu_4.$
8.  $\frac{\tilde{\mu}_5^2}{1 + \mu_5} \leq \mu_5 \leq \frac{n}{2} \frac{\tilde{\mu}_5^2}{1 + \mu_5}.$

*Com a hipótese adicional de  $A$  ser diagonalizável temos*

9. *Se todos os autovalores de  $A$  são simples (i.e. de multiplicidade 1) e sendo*

$$\delta_j = \min\{|\lambda_i - \lambda_j| : i \neq j\}, j = 1, \dots, n,$$

*então*

$$\mu_5 \leq \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ 1 + \frac{\mu_3^2}{\delta_j^2(n-1)} \right]^{(n-1)/2} - 1 \right\}.$$

Neste teorema usamos a abreviação  $\mu_i$  para simplificar a notação  $\mu_i(A)$ ,  $i = 1, \dots, 5$  e  $\tilde{\mu}_i(A)$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $5$ .

A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em [7]

## 4. Não Normalidade em Teoria de Sistemas

Considere um sistema dinâmico discreto linear com  $p$  entradas e  $q$  saídas descrito por equações de estado do tipo

$$S: \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k + D\mathbf{u}_k, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p,n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p,q}$ . O número  $n$  é a ordem do sistema e  $A$  é a matriz do sistema. Por sua vez,  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$  e  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$ . Suponha que o sistema é estável, isto é, os autovalores de  $A$  satisfazem  $|\lambda(A)| < 1$ . Se o sistema encontra-se em repouso, a resposta  $\mathbf{y}_k$  do sistema ao vetor de entrada  $\mathbf{u}_k$  é governada pela operação de convolução

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^k G_{k-1} \mathbf{u}_i,$$

em que  $G_k \in \mathbb{R}^{p,q}$ , conhecido como Parâmetro de Markov, é definido por

$$G_k = \begin{cases} D, & k = 0, \\ CA^{k-1}B, & k > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Dado um conjunto finito de parâmetros de Markov  $G_k$ , um problema central na análise de sistemas dinâmicos, conhecido como *problema de realização*, é determinar matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p,n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p,q}$ , satisfazendo (4.1), com  $A$  da menor ordem possível. O problema admite infinitas soluções mas todas elas relacionam-se com as matrizes do modelo (4.1) via transformações de semelhança.

O objetivo desta seção é analisar algumas medidas de não normalidade de certas matrizes utilizadas por alguns métodos de realização. A solução do problema começa com a construção da matriz de Hankel em bloco definida para  $l \geq 1$  por

$$H_{rs}(l) = \begin{bmatrix} G_l & G_{l+1} & \cdots & G_{l+s-1} \\ G_{l+1} & G_{l+2} & \cdots & G_{l+s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{l+r-1} & G_{l+r} & \cdots & G_{l+r+s-2} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Esta matriz tem a seguinte importante fatoração

$$H_{rs}(l) = OA^{l-1}C, \quad (4.4)$$

em que  $O$  e  $C$  são assim definidas,

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix}, \quad C = [B \ AB \ \cdots \ A^{s-1}B], \quad (4.5)$$

Se  $r, s \geq n$  e o sistema é controlável<sup>1</sup> e observável<sup>2</sup>, as matrizes em (4.3) e (4.5) possuem a seguinte propriedade:

$$\text{posto}(H_{r,s}(l)) = \text{posto}(O) = \text{posto}(C) = n, \quad (4.6)$$

para  $l \geq 1$  e  $r, s \geq n$ . A ferramenta mais eficiente para o problema é a fatoração SVD da matriz de Hankel bloco:  $H_{r,s}(1) = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ , em que  $\Sigma_1$  é a matriz dos valores singulares não nulos de  $H_{r,s}(1)$  e  $U_1, V_1$  os vetores singulares associados. De agora em diante, vamos considerar  $q = 1$  e, com esta restrição, queremos estimar medidas de não normalidade da matriz do sistema  $A$  de alguns métodos conhecidos, a saber, Zeiger e Mac-ewen [19], Kung [13] e também o método de Bazán e Bavastrì [2], cujas matrizes são, respectivamente

$$A_{ZM} = \Sigma_1^{-1/2} U_1^T H_{r,s}(2) V_1 \Sigma_1^{-1/2}, \quad (4.7)$$

$$A_K = \Sigma_1^{-1/2} \bar{V}^\dagger \underline{V} \Sigma_1^{-1/2}, \quad (4.8)$$

$$A_{BV} = V_1^T F V_1. \quad (4.9)$$

O símbolo  $\dagger$  denota a pseudo-inversa de uma matriz,  $\bar{V}$  é a matriz formada eliminando-se a última linha bloco ( $n \times q$ ) da matriz  $V_1$ ,  $\underline{V}$  é construída analogamente, porém eliminando-se a primeira linha bloco da mesma matriz e, finalmente,  $F$  é uma matriz companheira que satisfaz a equação  $H_{r,s}(2) = H_{r,s}(1)F$ .

As matrizes (4.7), (4.8) e (4.9) estão relacionadas do seguinte modo,

$$A_{ZM} = \Sigma_1^{1/2} A_{BV} \Sigma_1^{-1/2}, \quad (4.10)$$

$$A_K = A_{ZM}^T. \quad (4.11)$$

Iniciaremos estimando  $\mu_3(A_{BV})$ . Para tal, denotaremos  $A_{BV}$  apenas por  $A$ , e  $V_1$  apenas por  $V$ . Nossa análise está baseada no fato que a matriz  $AA^T$  pode ser escrita como

$$AA^T = I + V^T x x^T V - V^T e_1 e_1^T V, \quad (4.12)$$

em que  $x$  é a solução de norma mínima do sistema,

$$H_{r,s}(1)x = b, \quad (4.13)$$

---

<sup>1</sup>Um sistema é dito *controlável* se para qualquer estado desejado do sistema, digamos  $w \in \mathbb{R}^n$ , sempre podemos encontrar uma entrada (controle)  $u$  que permita conduzir o sistema do estado inicial  $x(0) = 0$  até o estado  $w$ .

<sup>2</sup>Um sistema é dito *observável* se permite recuperar o estado inicial  $x(0)$  a partir de informações do sinal de saída.

com  $b$  sendo a última coluna de  $H_{rs}(2)$ , e  $e_1$  o primeiro vetor da base canônica. Tomando traço em ambos os membros de (4.12), obtemos

$$\|A\|_F^2 = n + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2, \quad (4.14)$$

sendo  $p_1$  a primeira coluna de  $P = VV^T$ , a projeção ortogonal sobre o subespaço gerado pelas colunas de  $\mathcal{C}^T$ . Portanto, de (4.14), decorre que

$$\mu_3(A) = \sqrt{n + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 - \|A\|_F^2}. \quad (4.15)$$

Por outro lado, observando que (4.12) pode ser reescrito como

$$AA^T = I + [Vx \ Ve_1] \begin{bmatrix} x^T V^T \\ -e_1^T V^T \end{bmatrix},$$

é imediato que  $AA^T$  tem  $(n-2)$  autovalores iguais a 1 e os dois restantes sendo autovalores da matriz

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 + \|x\|_2^2 & p_1^T x \\ -x^T p_1 & 1 - \|p_1\|_2^2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Daí, decorre que

$$\prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = \det(AA^T) = (1 + \|x\|_2^2)(1 - \|p_1\|_2^2) + |p_1^T x|^2,$$

e, assim,  $\mu_3$  pode ser reescrita como

$$\mu_3(A) = \sqrt{n - 1 + \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 + \prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - |p_1^T x|^2 - \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2}.$$

Esta expressão torna-se consideravelmente mais simples quando  $\|x\|_2^2 \approx 0$  e  $|\lambda_j| \approx 1$ , pois neste caso obtém-se que

$$\mu_3(A) \approx 0,$$

indicando assim que a matriz  $A$  do método de Bazán e Bavastri torna-se muito próxima de ser normal. A condição  $\|x\|_2^2 \approx 0$  é simples de se atingir, bastando para isto tomar a dimensão da matriz de Hankel  $H_{r,s}(1)$  suficientemente grande, pois nessas condições prova-se que  $\|x\|_2^2 \rightarrow 0$  (veja, por exemplo, Bazán [1] e Bazán e Toint [3])

Outra consequência que decorre de (4.12) e (4.16) é que o maior e o menor valores singulares da matriz  $A$  satisfazem

$$\prod_{j=1}^n |\lambda_j| (1 + \|x\|_2^2)^{-1/2} \leq \sigma_n(A) \leq \sigma_1(A) \leq (1 + \|x\|_2^2)^{1/2}. \quad (4.17)$$

Assim, sempre que a matriz de Hankel é suficientemente grande, podemos estimar

$$\mu_4(A) \approx \max\{1 - \max |\lambda_j|, \min |\lambda_j| - \prod_{j=1}^n |\lambda_j|\}. \quad (4.18)$$

Portanto, sempre que  $|\lambda_j| \approx 1$  e a dimensão da matriz de Hankel é suficientemente grande, obtemos

$$\mu_4(A) \approx 0.$$

Esta última estimativa é original e, estimativas para outras medidas de não normalidade podem ser obtidas utilizando-se convenientemente as relações descritas no Teorema 1.

## 5. Um Resultado Numérico

**Mini-Mast Model** - Os dados deste experimento provêm de uma estrutura real, conhecida como Mini-Mast. A Mini-Mast é uma viga estrutural usada para pesquisa em dinâmica estrutural e controle ativo de vibrações na NASA Langley Research Center. As equações que modelam este sistema são:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5.1)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (5.2)$$

As entradas das  $A$ ,  $B$ , e  $C$ , podem ser encontradas em [15]. Neste experimento os parâmetros de Markov são dados por

$$G_k = Ce^{A\Delta t k} B, \quad k = 0, 1, \dots$$

e os autovalores da matriz  $A$  do sistema discreto associado ao modelo contínuo (5.1) são  $\lambda_j = e^{s_j \Delta t}$  com  $s_j = -\alpha_j \pm \beta_j i$ , dados na Tabela 1. O símbolo  $\delta_j$  denota a separação dos autovalores  $\lambda_j$ 's. Aqui  $\Delta t$ , a taxa de amostragem, foi tomada como  $\Delta t = 0,03s$ .

Tabela 1: Dados para o Mini-Mast Model

$j$	$\alpha_j$	$\beta_j$	$ \lambda_j $	$\delta_j$
1	0.32907	27.42011	0.99017	0.32299
2	0.38683	38.68230	0.98846	0.00982
3	0.38352	38.35103	0.98856	0.00982
4	0.09066	5.03555	0.99728	0.00011
5	0.09055	5.03176	0.99728	0.00011

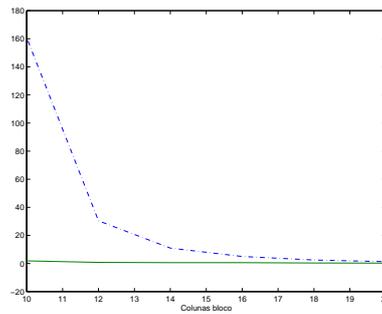
Apresentamos na Tabela 2 os números de condição para os autovalores  $\lambda_j$ , para os casos  $p = q = 1$  (entrada e resposta simples) e para  $p = 2$ ,  $q = 2$  (entrada

Tabela 2: Números de condição do  $\lambda_j$ .

$j$	$\kappa_{j,1}, s = 10$	$\kappa_{j,1}, s = 20$	$\kappa_{j,2}, s = 10$	$\kappa_{j,2}, s = 20$
1	$0.00017 \times 10^7$	$0.00130 \times 10^3$	1.84786	1.00766
2	$0.00127 \times 10^7$	$0.02310 \times 10^3$	1.20076	1.00611
3	$0.00136 \times 10^7$	$0.02311 \times 10^3$	1.71432	1.00758
4	$3.10889 \times 10^7$	$4.75131 \times 10^3$	1.52448	1.00447
5	$3.11084 \times 10^7$	$4.75306 \times 10^3$	2.15234	1.00587

e resposta dupla). Os resultados foram obtidos utilizando matrizes de Hankel em blocos  $2 \times 2$  cujas dimensões variam de  $s = 10$  a  $s = 20$ . A Tabela 1 mostra que as separações entre os autovalores da matriz do sistema é muito pequena, ou seja, trata-se de um caso de “quase multiplicidade”. O reflexo desta proximidade é apresentado na Tabela 2. Notemos que ali, para  $q = 1$  (entrada e resposta simples), o condicionamento dos autovalores torna-se muito ruim. Agora, com  $q = 2$ , a mesma tabela indica uma melhora significativa no condicionamento dos autovalores. Este fenômeno sugere que aumentando-se o número de entradas (ou seja  $q > 1$ ), o condicionamento dos autovalores melhora, e por conseguinte sua sensibilidade diminui.

O aumento do número de entradas do sistema também tem um profundo impacto sobre as medidas de não normalidade. A Figura 1 mostra como se comporta a medida de não normalidade  $\mu_3$  para os casos  $q = 1$  e  $q = 2$ , como função do número de colunas bloco da matriz de Hankel. Para o caso  $q = 2$ , a medida  $\mu_3$  da matriz  $A_{BV}$  correspondente a 10, 12 e 14 colunas bloco da matriz de Hankel, atinge os valores  $\mu_3 = 1.8803$ ,  $\mu_3 = 0.7652$ , e  $\mu_3 = 0.5756$ , respectivamente.

Figura 1:  $\mu_3$  para  $q = 2$ : linha contínua;  $\mu_3$  para  $q = 1$ : linha tracejada.

## 6. Conclusão

As medidas de não normalidade citadas neste trabalho são de grande interesse, tanto prático quanto teórico, pois por meio delas é possível ‘prever’ - no sentido de quão confiável é - o comportamento dos autovalores da matriz quando esta sofre pequenas perturbações nas suas entradas, conforme ocorre em aplicações práticas. No caso de sistemas como os do tipo (4.1), as estimativas para a matriz do sistema como a feita para (4.9) nos dão uma idéia de como as perturbações introduzidas afetam o processo de realização do sistema. Isto é importante pois em situações reais os Parâmetros de Markov são conhecidos apenas aproximadamente. Vale citar que mesmo  $\mu_2$  em grandes dimensões e com mais razão as outras  $\mu$ 's não são ‘práticas’ do ponto de vista computacional. Daí vê-se a necessidade do Teorema 1, que permite obter algumas relações<sup>3</sup> que facilitam obter estas estimativas. Devido às relações (4.10) e (4.11), espera-se obter estimativas semelhantes à (4.15) do ponto de vista qualitativo.

O experimento numérico apresentado na Seção 5, sugere que para  $q > 1$  o aumento na dimensão da matriz de Hankel em blocos pode ser usado para minimizar os efeitos negativos da não normalidade da matriz do sistema sobre a sensibilidade do problema de autovalores. Naturalmente isto é apenas um indicativo experimental, porém fornece uma direção para investigar teóricamente maneiras de contornar o efeito da não normalidade sobre a sensibilidade do problema de autovalores associado aos sistemas abordados. Esta investigação no entanto tem-se mostrado muito complicada para valores de  $q$  diferentes de 1. Isto será objeto de pesquisas futuras.

**Abstract** An overview of measures of non normality of matrices is presented with emphasis on certain measures that explain much on the sensitivity of matrix eigenvalues to perturbations. Estimates for some measures of non normality of certain matrices used in system realization problems are provided.

## Referências

- [1] F.S.V. Bazán, Conditioning of Vandermonde Matrices on the unit disk, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **21**, No.2 (2000), 679-603.
- [2] F.S.V. Bazán e C.A. Bavastri An optimized pseudo-inverse algorithm (OPIA) for multi-input multi-outup modal parameter identification, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **10**, 365-380.
- [3] F.S.V. Bazán e Ph.L. Toint, Error analysis of signal zeros from a related companion matrix eigenvalue problem, *Applied Mathematics Letters*, **14** (2002), 539-866.
- [4] Å. Björk, “Numerical Methods For Least Squares Problems”, SIAM, 1996.

---

<sup>3</sup>Resultados recentes estabelecem limitantes inferiores e superiores para  $\mu_3$  em função de  $\mu_2$  e  $\|A\|_F$  (veja[14]).

- [5] C-T. Chen, "Linear System Theory and Design", Oxford University Press, 1999.
- [6] P.J. Eberlein, On measures of non normality for matrices, *Amer. Math. Monthly*, **72** (1985), 995-996.
- [7] L. Elsner, On measures of non normality of matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **92** (1987), 107-124.
- [8] L. Elsner e K.D. Ikramov, Normal matrices: An update, *Linear Algebra Appl.*, **285** (1998), 291-303.
- [9] G.H. Golub e C.F. Van Loan, "Matrix Computations", second edition, The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [10] P. Henrici, Bounds for iterates, inverses, spectral variation and fields of values of non-normal matrices, *Numer. Math.*, **4** (1962), 24-40.
- [11] R. Horn e R. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge University Press, 1985.
- [12] R. Kress, H.L. De Vries e R. Wegmann, On nonnormal matrices, *Linear Algebra and Its Applications*, **7** (1974), 106-120.
- [13] S. Kung, A new identification and modal reduction algorithm vga singular value decomposition, *proceedings of the 10th Asilomar conference on Circuits Systems and Computers*, Pacific Grove, California, p.705-114, 3974.
- [14] S.L. Lee, Best available bounds for departure from normality, *SIAM J. Matrix Mnal. Appl.*, **17**, No.4 (1996), 984-991.
- [15] J.-S. Lew, J.-N. Juang e R.W. Longman, Comparison of Several System Identification Methods For Flexible Structures, *Journal of Sound and Vibration*, **167**, No. 3 (1993), 461-480.
- [16] A. Ruhe, On the closeness of eigevalues and singular values for almost normal matrices, *Linear Algebra and Its Applications* **11** (1975), 87-94.
- [17] A. Ruhe, Closest normal matrix finally found!, *BIT*, **27** (1987), 585-598.
- [18] R.A. Smith, The condition numbers of the matrix eigevalue problem, *Numer. Math.*, **10** (1967), 232-240.
- [19] H.P. Zeiger e A.J. Mac-Ewen, Approximate Linear Realization of Given Dimension via Ho's Algorithm, *IEEE, Trans. Aut. Control*, AC-19, (1974), 153.