

# Restauração e Análise de Imagens via Equações Diferenciais Parciais

C.A.Z. BARCELOS<sup>1</sup>, FACOM, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2160, Campus Santa Mônica, 38400-902 Uberlândia, MG, Brasil.

**Resumo.** O uso de equações diferenciais parciais em processamento de imagens tem sido amplamente usado nos últimos anos. A idéia básica é a de modificar uma dada imagem inicial  $u(x, t)$  via uma equação diferencial parcial e obter os resultados esperados como a solução desta equação.

Apresentamos aqui uma descrição dos principais modelos não lineares para suavização, eliminação de ruídos e detecção de bordas em imagens. Abordamos modelos que têm por base os métodos variacionais bem como os de fluxo geométrico. São também abordados os principais aspectos da implementação computacional dos modelos.

## 1. Introdução

O uso de equações diferenciais parciais (EDP) em processamento de imagens tem crescido significativamente nos últimos anos. A idéia básica é modificar uma dada imagem, curva ou superfície com uma equação diferencial parcial e obter os resultados esperados como solução desta equação.

O uso de filtros discretos é comumente usado em processamento de imagens. A grande vantagem em substituir esse procedimento tradicional pelas EDP, é que passa-se a fazer a análise de imagens em um domínio contínuo. Isto simplifica o formalismo que se torna independente da grade usada na discretização. O entendimento de filtros discretos é então facilitado quando se faz o comprimento de passo, utilizado na malha, tender a zero e reescrevendo o filtro discreto como um operador diferencial parcial. Outra grande vantagem é a possibilidade de se obter “estabilidade e exatidão” no processo numérico, utilizando a extensiva pesquisa em análise numérica e escolhendo algoritmos adequados para resolver equações diferenciais. A teoria de viscosidade em EDP nos fornece a base teórica para aplicar o formalismo matemático necessário. Em outras palavras, o uso de EDP em processamento de imagens, mais especificamente em **Segmentação e Eliminação de Ruídos**, nos possibilita não somente o uso de bons algoritmos computacionais como também, o uso de importantes resultados teóricos como existência e unicidade de solução.

O **Processamento de Imagens** é dividido em três partes, com três diferentes objetivos, e são elas:

---

<sup>1</sup>celiazb@usu.br

**Compressão:** parte que estuda a representação mínima de uma imagem em termos de memória digital.

**Restauração:** é a parte que estuda como conseguir a melhor “versão” de uma imagem a qual foi obtida com ruídos ou outras perturbações. Tal problema ocorre frequentemente em:

- . imagens médicas; tais como *CT* (transmission computed tomography), *MRI* (magnetic resonance imaging), *MSI* (magnetic source imaging), raio-X, *ESI* (electrical source imaging), etc.
- . sinais obtidos via satélites;
- . sinais obtidos do fundo do oceano;
- . imagens obtidas por aviões para detectar alvos de guerra, entre outros.

Em geral, os sinais obtidos contém muitos erros e precisam passar por “filtros”.

**Análise:** A palavra *analysis* originária do grego, significa “quebrar em partes”. O objetivo principal da Análise é pôr em evidência os principais elementos que compõem a imagem, e permitir um rápido reconhecimento de formatos.

As equações diferenciais são muito usadas na parte de Restauração e Análise de Imagens.

## 2. Restauração e Análise via EDPs

Uma imagem  $u$  será considerada como uma função contínua de um subconjunto de  $\mathbb{R}^p$  em um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , isto é:

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow [a, b], \quad p=2,3.$$

A aquisição da imagem  $u$  gera erros, que são chamados *ruídos*. Em geral, o problema consiste em reconstruir uma imagem  $u$  a partir de uma imagem ruidosa  $I$ , onde  $I = u + n$ , e  $n$  é o ruído.

A idéia básica é de deformar uma dada imagem, curva ou superfície com uma equação diferencial parcial e obter os resultados esperados.

As principais vantagens são:

- este procedimento permite a análise de imagens em um domínio contínuo;
- os filtros discretos passam a ser entendidos fazendo o espaçamento da malha tender a zero na expansão assintótica de uma equação diferencial;
- as equações diferenciais podem ser vistas como iterações de filtros locais em vizinhanças infinitesimais.

A aproximação de uma imagem pela solução de uma EDP nos permite, do ponto de vista matemático, tratar o problema de forma mais rigorosa.

## 3. Suavização Linear de Uma Imagem

Em 1948 Shannon observou que uma imagem pode ser corretamente representada por um conjunto discreto de valores somente após uma “suavização” da mesma.

De acordo com a teoria de Shannon [10], dada uma imagem original  $I : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow [a, b]$ ,  $p=2$  ou  $3$ , obtém-se uma nova imagem  $u$  pela convolução de  $I$  com um núcleo  $K$ , isto é,  $u = K * I$ .

A observação de que a suavização é uma parte necessária da formação das imagens, levou-nos à primeira equação diferencial parcial.

Gabor observou, em 1960, que a diferença entre a imagem “borrada”  $u = K * I$  e a imagem original  $I$  é, grosseiramente falando, proporcional ao seu laplaciano, ou seja,  $(1/h)[K * I(x) - I(x)] \rightarrow \Delta I(x)$ .

Assim, fazendo  $h$  tender a zero, o processo de “borragem” de uma imagem se comporta como a equação do calor:

$$I_t = \Delta I(x) \quad \text{com} \quad I(0) = u(x). \quad (3.1)$$

A equação do calor é, com algumas restrições, o único filtro linear que traz bons resultados. Porém, sua aplicação pura e simples numa imagem  $u(x)$ , deteriora todas as bordas e com isso todas as informações da imagem são perdidas. Nas Figuras 1-b, 1-c, 1-d e 1-e apresentamos os resultados da equação do calor (3.1) quando aplicada à Figura 1-a para valores crescentes de  $t$ . Observamos que quanto mais se evolui em  $t$  mais a imagem se deforma. Fazendo  $t \rightarrow \infty$  perde-se todas as informações contidas na imagem  $u(x)$ , que se tornará homogênea. A imagem  $u(x)$  assumirá o mesmo valor para qualquer  $x$  do domínio, ou seja,  $u(x) = cte$  para todo  $x \in \Omega$ .

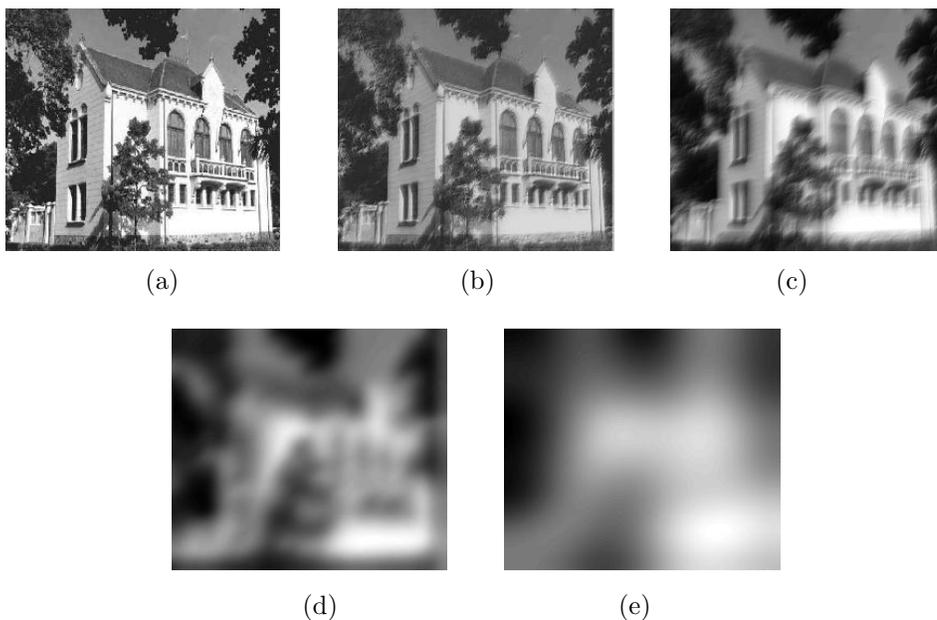


Figura 1- (a): Imagem; (b) a (e): Suavização via equação do calor.

A equação do calor teve, nos anos 80, diferentes aplicações, sendo a principal delas a detecção de bordas (Marr, Hildreth, Canny, Witkin, Koenderink).

A principal descoberta foi que detalhes de uma imagem, tais como bordas, arestas, quinas e outras singularidades, não podem ser calculadas sem antes aplicar uma suavização, pois esses detalhes são as derivadas de uma função suave.

Associando  $u$  com a função intensidade de uma imagem, uma borda, ou “edge”, é qualquer ponto onde o  $\nabla u$  atinge um máximo ou um mínimo local.

As duas técnicas mais usadas para detectar as bordas de uma imagem são:

**Teoria de Hildreth - Marr** (1980) [12]

A técnica, introduzida por Hildreth e Marr, consiste em procurar os pontos  $u(x)$  tais que  $\nabla u(x)$  muda de sinal (“zero-crossings”).

**Teoria de Canny** (1986) [5]

Uma significativa melhora foi dada por Canny que propôs calcular os pontos onde  $\nabla u(x)$  é máximo nas linhas gradientes, tais pontos satisfazem a equação  $\nabla^2 u(\nabla u, \nabla u) = 0$ . A técnica de Canny consiste em calcular os pontos  $u(x)$  tais que:  $\nabla^2 u(\nabla u, \nabla u) = 0$ , e  $|\nabla u(x)|$  é suficientemente grande.

Existem outras diferentes técnicas para determinação das bordas de uma imagem como: as técnicas baseadas em resolução de subpixel [18] ou os modelos estocásticos de uma imagem. Para maiores detalhes ver [10].

A dedução de Gabor sintetiza que pode-se “limpar” uma imagem “borrada” por meio de uma equação do calor reversa no tempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u, \quad u(0) = u_{observada}.$$

Discretizando esta equação pelo método de Euler, temos:

$$u_{restaurada} = u_{observada} - h\Delta u_{observada},$$

onde  $h$  é o comprimento de passo usado na discretização,  $u_{restaurada} = u_{n+1}$  e  $u_{observada} = u_n$ .

Este procedimento funciona bem nas primeiras iterações, ou seja, a qualidade da imagem melhora sensivelmente. Entretanto, após algumas iterações todas as informações da imagem são destruídas pois a equação do calor reversa é extremamente mal posta.

Existem duas direções a serem tomadas. Uma é no sentido de estabilizar a equação reversa do calor (Rudin-87, Osher-92) e, a outra, consiste em utilizar a equação do calor na análise de imagem, o que nos leva à teoria das wavelets ou às equações diferenciais parciais não lineares. Vamos abordar aqui, a aplicação de alguns modelos não lineares para o tratamento de imagens.

## 4. Suavização Não Linear

Se abrirmos mão da linearidade do modelo, existem, na literatura, muitas maneiras de suavizar uma imagem [1, 4, 7, 8, 11, 15, 17].

Ligados à suavização estão os problemas de eliminação de ruídos e segmentação.

Diversos modelos usando equações de difusão foram propostos nos últimos 10 anos. Vamos abordar alguns desses modelos.

#### 4.1. Fluxo da Curvatura Média

A seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} u_t &= |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) && \text{em } \Omega \times R_+ \\ u(x, 0) &= I(x) && \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

é conhecida como equação de fluxo da curvatura média. A existência, unicidade e estabilidade da solução (4.1) é devida a L.C.Evans [9].

A grande importância de (4.1) está em sua interpretação geométrica.

Seja  $c(p, t) : S^1 \times [0, T] \rightarrow R^2$  uma família de curvas fechadas onde  $t$  parametriza a família e  $p$  parametriza a curva. Vamos usar a notação  $c(t)$  para denotar esta curva.

Podemos representar esta curva como o conjunto de nível de uma função

$u(x, y, t) : R^2 \times [0, T] \rightarrow R$ , dado por:

$$CN_\lambda = \{(x, y, t) \text{ tal que } u(x, y, t) = \lambda\}, \quad \lambda = \text{constante.}$$

Suponhamos que esta curva  $c(t)$  se movimenta na direção oposta a  $\vec{N}$ , com velocidade  $K$ ,  $K$  é a curvatura e  $\vec{N}$ , a normal (outward), ou seja:

$$c'(t) = -K \vec{N} \quad (4.2)$$

A concavidade ou convexidade da curva  $c(t)$  é que determina a direção de seu movimento;

- se  $K > 0$  a curva se move na direção de  $-\vec{N}$ ,
- se  $K < 0$  a curva se move na direção de  $\vec{N}$ .

Pode-se inserir a curva  $c$  em uma superfície de modo que  $c$  seja o conjunto de nível da superfície, mais especificamente:  $c(0)$  é inserida em  $u(x, y, 0) = I(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ , de tal forma que  $c(0)$  é um conjunto de nível zero de  $I$ .

Desta mesma forma, ao invés de inserirmos apenas a curva  $c(0)$ , podemos inserir  $c(t)$  envolvendo a superfície  $u(x, y, t)$  como um todo.

Tomando  $\mathbf{c}(\mathbf{t}) = (\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y}(\mathbf{t}))$  e inserindo em  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$  de modo que  $c(t)$  seja a curva de nível dada pelos pontos  $(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y}(\mathbf{t}))$  tais que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \lambda. \quad (4.3)$$

Derivando (4.3) em relação a  $t$ , temos  $u_x x_t + u_y y_t + u_t = 0$ . Isto é,  $u_t = -(u_x, u_y) \cdot (x_t, y_t) = -\nabla u \cdot c'(t) = -\nabla u \cdot (-K \vec{N}) = \nabla u \cdot K \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = K |\nabla u|$ . Como  $K = \operatorname{curv}(u) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ , temos  $u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ .

Assim, a curva satisfaz à equação  $c'(t) = -K \vec{N}$  se, e somente se, a superfície satisfizer à equação  $u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ , que é a equação no modelo (4.1). Em outras palavras, a solução trivial  $u(\mathbf{x}, t) = 0$  de (4.1) é  $c(t)$  que satisfaz à equação (4.2).

Se temos uma curva fechada e convexa, então a curva se move para dentro e (4.1) transforma a curva em um ponto. Desta forma as bordas não são preservadas.

A equação (4.1) foi inicialmente proposta por Sethian na análise de propagação de frentes (vide [16]).

A equação da curvatura é uma “difusão” **na direção ortogonal ao gradiente**.

Na Figura 2 apresentamos a evolução da imagem dada na Figura 1-a pelo método do fluxo da curvatura média. Apresentamos também as bordas das imagens obtidas pela evolução de (4.1).

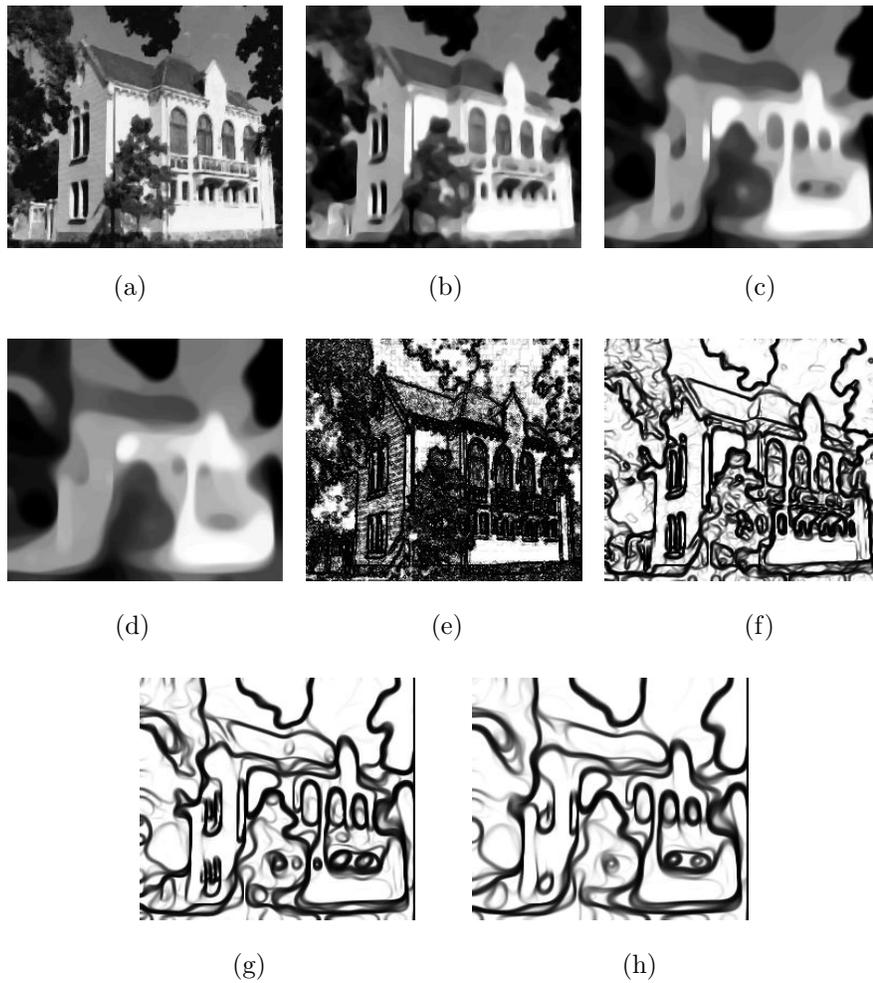


Figura 2 (a)-(d) Suavização da imagem dada na Figura 1-a pelo método do fluxo da curvatura média para valores crescentes de  $t$ ; (e)-(h) bordas das figuras dadas em (a)-(d), respectivamente.

## 5. Suavização Seletiva - Combinando Detecção de Bordas e Suavização

O modelo do fluxo da curvatura média, dado pela equação (4.1), não é capaz de preservar a localização das bordas de imagens (veja Figura 3). Uma importante contribuição para a preservação das bordas, foi feita por Malik e Perona [11].

Combinando a idéia de difusão direcionada, introduzida no método da curvatura média, com o processo de detecção de bordas, Malik e Perona [11] introduziram a seguinte equação de difusão para tratamento de imagens:

$$\begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u), \quad \text{em } \Omega \times R_+, \\ u(x, 0) &= I(x), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $g$  é uma função suave, não crescente e, tal que  $g(0) = 1$ ,  $g(s) \geq 0$ , e  $g(s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow \infty$ . A idéia é efetuar uma difusão fraca nos pontos  $u$  onde  $|\nabla u|$  for grande, preservando, com isso, a localização exata de um ponto de borda.

As experiências computacionais mostram que o “detector de bordas” baseado nessa teoria fornece bordas e fronteiras que permanecem mais estáveis através da escala  $t$ . Entretanto, esse modelo ainda apresenta dificuldades teóricas e práticas. Por exemplo, se a imagem é muito ruidosa (com muitos erros), o gradiente  $\nabla u$  será muito grande em quase todos os pontos e, como consequência a função  $g$  será quase nula nestes pontos. Assim, todos os ruídos da imagem permanecem quando a mesma for processada pelo processo de suavização introduzido por esse modelo.

Algumas escolhas para a função  $g$  são:  $g(s) = 1/(1+|s|)^2$ ,  $g(s) = 1/(1+s^2)$  e  $g(s) = e^{-s}$ .

## 6. Métodos Baseados em Fluxo Geométrico

Combinando essa idéia de difusão degenerada e a idéia dada por Malik-Perona [11], em substituir  $|\nabla u|$  por  $|\nabla G_\sigma * u|$  em (5.1), Alvarez, Lions e Morel [1] propuseram e estudaram o seguinte modelo:

$$u_t = g(|\nabla G_\sigma * u|)|\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right). \quad (6.1)$$

com as condições inicial e de contorno:  $u(x, 0) = I(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega \times R_+} = 0$ .

Este modelo difusa as curvas de nível de  $u$  na direção ortogonal a  $\nabla u$  com velocidade  $g(|\nabla G * u|)k$  onde  $k = \operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|)$  é a curvatura e  $g(s)=1/(1+s^2)$ .

Desta forma a imagem é suavizada em ambos os lados das bordas, com suavização mínima nas bordas. A suavização é feita com baixa velocidade nas vizinhanças das bordas e alta velocidade no interior de regiões homogêneas.

Existem, na literatura, outros modelos que têm por base o fluxo geométrico, como por exemplo o método do fluxo da curvatura min/max dada por Malladi e Sethian [17] e a evolução das superfícies de nível dada por Caselles, Catté, Coll e Dibos [6].

## 7. Modelos Variacionais

As equações diferenciais parciais usadas no tratamento de imagens podem também ser obtidas pelos métodos variacionais, os quais tem uma longa história originando-se na solução de problemas lineares inversos de filtros de Wiener.

O modelo básico consiste em minimizar um funcional de energia penalizado, da forma:  $E(u) = |u - I|^2 + \delta \mathcal{R}(u)$ , onde  $|\cdot|$  representa alguma norma conveniente. O funcional  $\mathcal{R}$  fornece o grau de suavização da imagem e toma diferentes formas, sendo a norma em espaço de Sobolev a mais tradicional. Por exemplo, a suavização Gaussiana é efetuada usando  $\mathcal{R}_G(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ .

Observamos que a equação do calor é o fluxo do funcional acima. Se  $u$  é solução da equação do calor então  $u$  minimiza  $\mathcal{R}_G(u)$ .

Minimizar  $\mathcal{R}_G(u)$  é o mesmo que minimizar  $\nabla u$  na norma do  $L^2$ .

O método de Variação Total usa  $\mathcal{R}_{VT}(u) = \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u| dx$ , onde  $\alpha(x)$  representa um parâmetro espacial que controla o grau de suavização em pequenas vizinhanças.

Rudin, Osher and Fatemi [15] propuseram, para reconstruir uma imagem  $u$  a partir de uma imagem dada  $I$  onde  $u(x) = I(x) + n(x)$  e  $n(x)$  é o ruído, minimizar o funcional:

$$\min \int_{\Omega} |\nabla u| dx$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} I dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |u - I|^2 dx = \eta^2.$$

A primeira restrição significa que o ruído tem média zero, e a segunda usa o conhecimento prévio que o desvio padrão do ruído  $n(x)$  é  $\eta$ . Isto pode ser formulado como um problema de otimização sem restrições:

$$\text{Minimizar} \int_{\Omega} (|\nabla u| + \frac{\beta}{2} |u - I|^2) dx. \quad (7.1)$$

Este problema foi resolvido pela procura da solução de uma equação diferencial parcial, que é a evolução da equação de Euler Lagrange para (7.1). Isto significa que eles resolveram o seguinte problema:

$$u_t = \text{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \beta(u - I). \quad (7.2)$$

Existem diversos outros modelos que originaram-se na formulação variacional. Gostaríamos de mencionar ainda, o modelo de Mumford-Shah, o modelo de Chen, Vermuri e Wang [8] e a difusão balanceada dada no modelo proposto por Barcelos, Boaventura e Silva Jr em [3].

O modelo de Mumford-Shah é obtido pela minimização do funcional:

$$E_{MS}(u, B) = \int_{\Omega \setminus B} \{ \alpha |\nabla u|^2 dx + \beta (u - I)^2 \} dx + \text{length}(B).$$

A grande dificuldade desse modelo é aplicar a técnica de decrescimento do gradiente em  $B$ . Ambrosio e Tortorelli [2] substituíram  $B$  por uma função contínua  $v$  que assume o valor 1 longe das bordas e decresce rapidamente para 0 perto das bordas. Eles definem o seguinte funcional de energia

$$E_{AT}(u, v) = \int_{\Omega} \{ \alpha(1-v)^2 |\nabla u|^2 + \beta(u-I)^2 + \rho |\nabla v|^2 + \frac{v^2}{\rho} \} dx.$$

Shah introduziu em "A common framework for curve evolution" [17], um novo funcional da energia, tentando solucionar as dificuldades da aplicação do modelo anterior, mais precisamente Shah propôs efetuar simultaneamente o processo de segmentação e eliminação de ruídos pela minimização do funcional  $E(u, v)$ , onde

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \alpha(1-v)^2 |\nabla u|^2 + \beta|u-I| + \frac{\rho}{2} |\nabla v|^2 + \frac{v^2}{2\rho}.$$

Este problema de minimização foi resolvido em [17] pela solução do seguinte sistema:

$$u_t = (1-v) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - 2\nabla v \cdot \nabla u - \frac{\beta}{\alpha(1-v)} |\nabla u| \frac{u-I}{|u-I|}, \quad (7.3)$$

$$v_t = \Delta v - \frac{v}{\rho^2} + \frac{2\alpha}{\rho} (1-v) |\nabla u|, \quad (7.4)$$

com as seguintes condições de fronteira e inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega \times R_+} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega \times R_+} = 0, \quad u(x, 0) = I(x) \quad e \quad v(x, 0) = \frac{2\alpha\rho |\nabla u|}{1 + 2\alpha\rho |\nabla u|}.$$

Podemos ver que a equação (7.3) é o fluxo da equação elíptica obtida pela equação de Euler-Lagrange para  $E(u, v)$  pela multiplicação do termo  $|\nabla u|/\alpha(1-v)$  ao invés de considerar simplesmente a equação de Euler-Lagrange para  $E(u, v)$ .

Neste método a segmentação é sistematicamente obtida por  $v$  enquanto a imagem inicial  $I$  é suavizada por  $u$ . A equação (7.3) é parabólica somente ao longo das curvas de níveis de  $u$  e é hiperbólica na direção normal às curvas de níveis, assim  $u$  desenvolve "choques" e as bordas verdadeiras são obtidas pela discontinuidades da função  $u$ . Entretanto, não foi provado que este problema é matematicamente bem posto, não parece fácil conseguir esta prova. Além disso, este modelo não é eficiente quando a imagem envolve formas complexas contendo singularidades tais como Y-junções e T-junções, desde que neste modelo as "formas" de um objeto são representadas por curvas fechadas.

Procedimentos análogos foram adotados em [8] e [3]. Em [8] os autores propuseram o estudo da seguinte difusão degenerada não linear

$$u_t = g(|\nabla G_{\sigma} * u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nabla(g(|\nabla G_{\sigma} * u|)) \cdot \nabla u - \beta |\nabla u| (u - I). \quad (7.5)$$

Esta equação (7.5) também pode ser vista como uma modificação do tão conhecido modelo ALM (6.1).

A introdução do novo termo  $\nabla g \cdot \nabla u$  em (7.5) auxilia no processo de detecção de fronteiras dos objetos com alta variação de seu gradiente. A equação de Euler-Lagrange para o funcional de energia

$$E(u) = \int_{\Omega} (g(\nabla G_{\sigma} * u)|\nabla u| + \frac{\beta}{2}|u - I|^2)dx,$$

é a seguinte:

$$g(|\nabla G_{\sigma} * u|)div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \nabla g \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} - \beta(u - I) = 0. \quad (7.6)$$

Podemos ver que a equação (7.5) não é a evolução de (7.6), e sim a evolução da equação elíptica obtida de (7.6) pela multiplicação do termo  $|\nabla u|$ . Este procedimento, com diferentes termos para a multiplicação de (7.6), foi usado no modelo de Shah e em [4]. Tal procedimento apresenta grandes vantagens: tem interpretação geométrica, permite extrair resultados sobre existência, unicidade e estabilidade de solução viscosa para (7.5) e apresenta bom desempenho computacional.

Em [4] compara-se a performance do funcional (7.6) obtida em [8] o qual foi denominado “modelo ALM-modificado”, com um modelo modificado que dá melhores resultados na detecção de bordas e, com isso, consegue-se preservar quinas e junções em T mesmo em imagens com alto índice de ruído.

Por último, gostaríamos de mencionar o modelo proposto em [3]. Tal modelo é composto por dois termos, o primeiro, sendo um termo de difusão, permite a eliminação dos ruídos da imagem inicial  $I(x)$  e o segundo é um termo forçante que força a imagem  $u(x)$  a permanecer perto da imagem inicial  $I(x)$ . A formulação do modelo apresenta um balanceamento entre os dois termos da equação dada por uma função  $g$  que funciona como um detector de bordas. O modelo tem a seguinte formulação:

$$u_t = \mathbf{g} |\nabla u| \mathbf{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \sigma(\mathbf{1} - \mathbf{g})(\mathbf{u} - \mathbf{I}) \quad (7.7)$$

onde  $u(x, 0) = I$ ,  $g(s) = 1/(1 + |s|^2)$ ,  $s = |\nabla \mathbf{u} * \mathbf{G}|$  e  $G$  é a Gaussiana

$$G_{\sigma}(x, y) = C\sigma^{-1}\exp(-(x^2 + y^2)/4\sigma), C \text{ constante} .$$

Para maiores detalhes ver [3].

Na Figura 3 apresentamos os resultados da evolução da imagem dada na Figura 1-a pelo modelo dado por (7.7). Observamos que mesmo fazendo  $t \rightarrow \infty$  a imagem não se deteriora, ou seja as bordas são preservadas e a difusão é efetuada somente no interior e no exterior dos pontos de borda, sem efetuar suavização nestes pontos de borda.

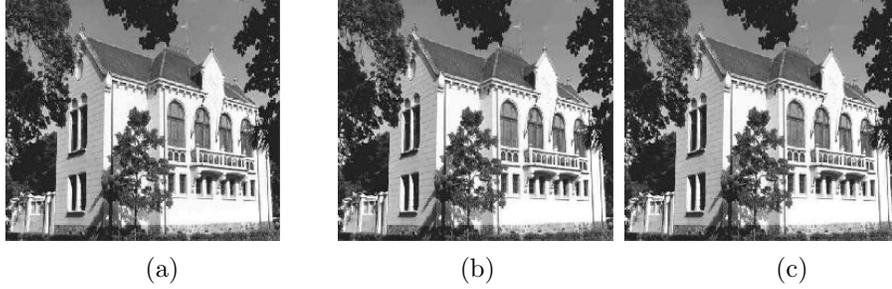


Figura 3 - Suavização obtida pelo modelo (7.9) quando aplicada à imagem dada em 1-a.

## 8. Implementação Computacional

As soluções numéricas das equações de evolução são obtidas usando métodos das diferenças finitas como as desenvolvida em [14, 15, 16] as quais descreveremos brevemente aqui.

As imagens são representadas por matrizes  $256 \times 256$ , de valores  $u(x, y)$  que representam a intensidade do tom de cinza da imagem  $u$  na posição  $(x, y)$ . Assim, para cada função  $u(x, y)$ , a notação  $u_{ij}$  denota o valor de  $u(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 256$ . A solução da equação diferencial é então obtida em cada *tempo* (escala)  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Denota-se  $u(x_i, y_j, t_n)$  por  $u_{ij}^n$ .

A equação de difusão,  $u_t = \mathcal{L}(u, \nabla u)$ , é aproximada por Euler.

Os termos de difusão do operador  $\mathcal{L}(u, \nabla u)$  são aproximados usando diferenças finitas centradas, por exemplo:

$$|\nabla u| \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) = \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2}$$

e

$$\left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \right) \right) = \frac{v_x^2 v_{yy} - 2v_x v_y v_{xy} + v_y^2 v_{xx}}{(v_x^2 + v_y^2)^{3/2}}.$$

A título de ilustração, o modelo (7.7) fica:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \Delta t \mathcal{L}(u_{ij}^n),$$

com  $u_{ij}^0 = I(x_i, y_i)$  e

$$\mathcal{L}(u) = g |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda (1 - g)(u - I).$$

Nos experimentos computacionais, tomou-se  $\lambda = \sigma_r$ ,  $g = g(|G_{\sigma_r} * \nabla u|) = \frac{1}{1 + k|G_{\sigma_r} * \nabla u|^2}$ ,  $k$  constante e  $\sigma_r$  como sendo o desvio padrão do ruído na imagem inicial  $I$ .

O termo  $\nabla g \cdot \nabla u$  que aparece nos modelos (7.3 e 7.5) permite o desenvolvimento de choques, os quais indicam a presença de bordas. Osher e Sethian desenvolveram uma técnica numérica, usando diferenças finitas progressivas e regressivas de uma maneira consistente com o desenvolvimento de choques:

$$(\nabla g \cdot \nabla u)_{ij} = \max(\Delta_i g_{ij}, 0) \Delta_i^- u_{ij} + \min(\Delta_i g_{ij}, 0) \Delta_i^+ u_{ij} \\ + \max(\Delta_j g_{ij}, 0) \Delta_j^- u_{ij} + \min(\Delta_j g_{ij}, 0) \Delta_j^+ u_{ij}$$

onde  $\Delta_i$ ,  $\Delta_i^+$  e  $\Delta_i^-$  representam operadores de diferenças centrais, progressivas e regressivas, respectivamente, na primeira variável espacial  $x$ . O operador  $\Delta$  subscrito com  $j$  corresponde à variável  $y$ . Para maiores detalhes vide [16].

Os resultados apresentados nas Figuras 1, 2 e 3 foram obtidos usando as equações (3.1), (4.1) e (7.7), respectivamente com  $\Delta t = 0.5$ .

As imagens mostradas nas Figuras 1-e e 2-d foram obtidas com 200 iterações da discretização do modelo dado por (3.1) e (4.1), respectivamente. A Figura 3-c foi obtida com 600 iterações da discretização do modelo dado por (7.7).

**Abstract.** The use of partial differential equations in image processing has amply grown in the last years. The basic idea is to modify a given initial image  $u(x, t)$  with a partial differential equation to obtain expected results as the solution of this equation.

Here we present a description of the most popular non-linear models for smoothing, denoising, and edge detection in images. We survey the models based on the variational methods as well as the ones based on geometric flux. We also illustrate the main aspects of the computational implementation of these models.

## Referências

- [1] L. Alvarez, P.L. Lions e J.M. Morel, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion, *SIAM J. Numer. Anal.*, **29** (1992), 845-866.
- [2] L. Ambrosio e V.M. Tortorelli, On the approximation of free discontinuity problems, *Boll. Un. Mat. Ital.*, **7**, No. 6-B (1992), 105-123.
- [3] C.A.Z. Barcelos, M. Boaventura e E.C. Silva Jr, A well-balanced flow equation for noise removal and edge detection, submetido para publicação.
- [4] C.A.Z. Barcelos e Y. Chen, Heat flows and related minimization problem in image restoration, *Computers and Mathematics with Applications*, **39** (2000), 81-97.
- [5] J.F. Canny, A computational approach to edge detection, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **8** (1986), 679-698.
- [6] V.Caselle, F.Catté, T.Cool e Dibos, A geometric model for active contours in image processing. *Numerische Mathematik*, **66** (1993), 1-31.
- [7] A. Chambolle e P.L. Lions, Image recovery via total variation minimization and related problems, *Numerische Mathematik*, **76** (1997), 167-188.

- [8] Y. Chen, B.C. Vemuri e L. Wang, Image denoising and segmentation via non-linear diffusion, *Comput. Math. Appl.*, **39** (2000), 131-149.
- [9] L.C. Evans e J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature, *I. J. Differ. Geom.*, **33** (1991).
- [10] F. Guichard e J.M. Morel, Image iterative smoothing and PDE's - School on Mathematica Problems in Image Processing, *ICTP, Trieste, It.*, (2000), 305.
- [11] J. Malik e P. Perona, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE TPAMI*, **12**, No. 7 (1990), 629-639.
- [12] D. Marr e E. Hildreth, Theory of edge detection, *Proc. Royal Soc. Lond.*, **B 207** (1980), 187-217.
- [13] J.M. Morel e S. Solimini, "Variational Methods in Image Segmentation", Birkhäuser, Boston, 1995.
- [14] S. Osher e J. Sethian, Fronts propagating with curvature depend. Algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation, *J. Comput. Phys.*, **79** (1988), 12-49.
- [15] L. Rudin, S. Osher e E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, **60** (1992), 259-268.
- [16] J.A. Sethian, "Level Set Methods", Cambridge University Press, 1996.
- [17] J. Shah, A common framework for curve evolution, segmentation and anisotropic diffusion, "IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition", 1996.
- [18] A.J. Tabatabai and O.R. Mitchel, Edge location to subpixel values in digital imagery, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, No. 2 (1984), 188-201.

