Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **3**, No. 2 (2002), 93-99.

Vibrações Livres e a Função de Green Temporal para um Modelo de Euler-Bernoulli

M.K. GIARETA[1], Departamento de Matemática, Universidade de Passo Fundo, 99.010-070 Passo Fundo, RS, Brasil

J.R. CLAEYSSEN[2], Instituto de Matemática - PPGMAp/Promec, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cx.P. 10673, 90.001-970, Porto Alegre, RS, Brasil.

Resumo. Este trabalho visa a obtenção da resposta impulso, ou função de Green temporal para uma viga longa e fina descrita pela equação de Euler-Bernoulli sob a influência de uma força axial. Simulações para a função de Green temporal são apresentadas para vigas fixas-livre, engastadas, e deslizante-apoiada.

1. O Modelo de Euler-Bernoulli

Este trabalho visa a derivação de uma formulação sistemática para a resposta livre de um modelo elástico Euler-Bernoulli, que descreve a dinâmica de uma viga, em termos da base temporal, gerada pela resposta impulso ou, função de Green no tempo e a determinação desta última de maneira espectral. Os modos flexurais do sistema podem ser calculados com o uso da base clássica de Euler ou, com a introdução de uma base, chamada de base dinâmica espacial, a qual é melhor condicionada diante variação dos parâmteros físicos. Neste problema são consideradas condições de contorno genéricas. As simulações foram realizadas com auxílio do software Maple.

A viga em estudo está sujeita ao efeito de uma força paralela ao eixo horizontal, além da força lateral já existente. A Figura 1 mostra o esquema de uma viga fixa-livre de comprimento L, onde $v(t,x)$ é o deslocamento transversal modificado por uma força axial N e $f(t,x)$ é a força externa ou carga. É assumido por simplicidade que a força axial é constante e que o equilíbrio transversal não é afetado pela força axial. Segundo a teoría de de Euler Bernoulli, a qual supõe que o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados e que as secções transversais planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após o deslocamento, tem-se o modelo

$$m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t,x), \tag{1.1}$$

[1]Projeto UPF-RS. E-mail: giareta@pas.matrix.com.br
[2]Auxílio FAPERGS. E-mail: julio@mat.ufrgs.br

Figura 1: Viga fixa livre sob ação da força axial N

onde A é a área transversal da viga, E o módulo de Young, I o momento de inércia, N a força axial, ρ a densidade linear. Este modelo é de natureza evolutiva, exigindo duas condições iniciais, $v(0,x) = v_0(x)$ e $v_t(0,x) = \dot{v}_0(x)$ que representam o deslocamento e velocidade iniciais da viga, respectivamente, e satisfazendo condições de contorno espaciais, com derivadas até terceira ordem avaliadas em ambas extremidades da viga, $X = 0$ e em $x = L$, tais condições podem ser escritas na forma genérica e matricial,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t,0) \\ v_x(t,0) \\ v_{xx}(t,0) \\ v_{xxx}(t,0) \\ v(t,L) \\ v_x(t,L) \\ v_{xx}(t,L) \\ v_{xxx}(t,L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

2. Modos Flexurais

A equação de Euler -Bernoulli pode ser escrita de forma compacta e, análoga a uma equação vibratória conservativa, como

$$M\ddot{v} + Kv = f(t,x), \qquad (2.1)$$

onde $M = m\mathcal{I}$ com $\mathcal{I}$ o operador identidade e K é o operador diferencial linear espacial de quarta ordem $K = EI\frac{d^4}{dx^4} + N\frac{d^2}{dx^2}$, atuando sob funções que satisfazem as condições de contorno (1.2).

Vibrações livres da forma oscilatória $v(t,x) = e^{i\omega t}X(x)$ existem quando X é uma solução não nula da equação modal $[K - \omega^2 M]X = 0$, isto é,

$$X^{iv}(x) + g^2 X^{ii}(x) - a^4 X(x) = 0, \qquad (2.2)$$

sujeita a condições de contorno. Aqui, os coeficientes são dados por $g^2 = \frac{N}{EI}$ e $a^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$. Pela propriedade de simetria dos operadores M e K, os modos de vibração satisfazem relações de ortogonalidade.

Escrevendo $X(x) = \Phi c$, onde Φ denota uma base de soluções $[\phi_1\ \phi_2\ \phi_3\phi_4]$, tem-se o sistema $\Delta c = 0$, $\Delta = B\Phi_o l$. Introduzindo a solução fundamental h(x) que satisfaz o problema de valor inicial

$$h^{iv}(x) + g^2 h^{ii}(x) - a^4 h(x) = 0 \tag{2.3}$$

com as condições iniciais $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$, $h'''(0) = 1$, o conjunto h, h', h'', h''' forma uma base de soluções. Em termos espectrais,

$$h(x) = \frac{\delta senh\epsilon x - \epsilon sen\delta x}{\delta^2 + \epsilon^2}, \tag{2.4}$$

onde $\delta^2 - \epsilon^2 = g^2$, $\delta^2 = g^2/2 + \sqrt{(g^4/2 - a^4)}$. Pelos valores iniciais de h(x), observa-se que o sistema $\Delta c = 0$ pode ser reduzido segundo as condições de contorno do sistema, pois

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_{14} & A_{13} & A_{12} & A_{11} \\ A_{24} & A_{23} & A_{22} & A_{21} \\ B_{1k}h^{(k-1)}(L) & B_{1k}h^{(k)}(L) & B_{1k}h^{(k+1)}(L)1 & B_{1k}h^{(k+2)}(L) \\ B_{2k}h^{(k-1)}(L) & B_{2k}h^{(k)}(L) & B_{2k}h^{(k+1)}(L)1 & B_{2k}h^{(k+2)}(L) \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

onde nas últimas duas linhas é utilizada notação tensorial, abreviação para indicar somatória com variação d o índice k=1:2. Deve ser observado que as condições iniciais de $h(x)$ independem dos parâmetros da equação, portanto a base dinâmica comporta-se melhor do que a base espectral clássica formada em termos das raízes da correspondente equação caraterística.

3. A Resposta Livre Através da Função de Green Temporal

Pelo método espectral de Fourier, a resposta livre da equação do movimento da viga (1.1) pode ser descrita na forma

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x), \tag{3.1}$$

onde $X_n(x)$ são os modos e os $v_n(t)$ os coeficientes temporais.

Por substituição na equação homogênea e utilizando a ortogonalidade dos modos, decorre que os coeficientes temporais $v_n(t)$ satisfazem à equação

$$\ddot{v}_n(t) + \omega_n^2 v_n(t) = 0. \tag{3.2}$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (3.2) no tempo τ por $h(t-\tau) = \frac{\text{sen}\omega_n(t-\tau)}{\omega_n}$ e integrando-a por partes em τ de 0 a t, obtém - se

$$v_n(t) = \cos(w_n t)v_n(0) + \frac{\text{sen}(w_n t)}{w_n}\dot{v}_n(0). \tag{3.3}$$

Subtituindo-se na série (3.1), decorre que

$$v(t,x) = \int_0^L \quad [\frac{\partial h}{\partial t}(t,x,s)mv_0(s) + h(t,x,s)m\dot{v}_0(s)]ds, \tag{3.4}$$

onde

$$h(t,x,s) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{X_n(s)X_n(x)}{\|X_n\|^2})\frac{\text{sen}w_n t}{w_n}\frac{1}{m} \tag{3.5}$$

é a *solução dinâmica* do sistema distribuído, que para $t > 0$ corresponde à resposta impulso ou a função de Green de valor inicial. Aqui, $\|X_n\|$ denota a norma integral quadrática do modo X_n.

A fórmula obtida para v(t,x), em termos da função de Green temporal, pode ser escrita na forma compacta

$$v = \frac{d\mathsf{h}}{dt}[mv_0] + \mathsf{h}[m\dot{v}_0], \tag{3.6}$$

onde h é abreviação do operador dinâmico

$$\mathsf{h}(t)\phi(x) = \int_0^L h(t,x,s)\phi(s)ds. \tag{3.7}$$

A introdução deste operador permite obter uma estrita analogia com a solução de um sistema conservativo concentrado $M\ddot{v} + Kv = f(t)$. Os operadores h e $\dot{\mathsf{h}}$, possuem como núcleos a função de Green e sua derivada temporal, e podem ser associados com as matrizes $\frac{sen(\sqrt{(M^{-1}K)}t}{\sqrt{(M^{-1}K)}}$ e $cos(\sqrt{(M^{-1}K)}t$ que atuam sobre deslocamentos concentrados espacialmente. O cálculo, igual ao caso concentrado, pode ser realizado através de métodos espectrais e não espectrais. Devido à ortogonalidade dos modos, decorre que para cada modo tem-se a relação

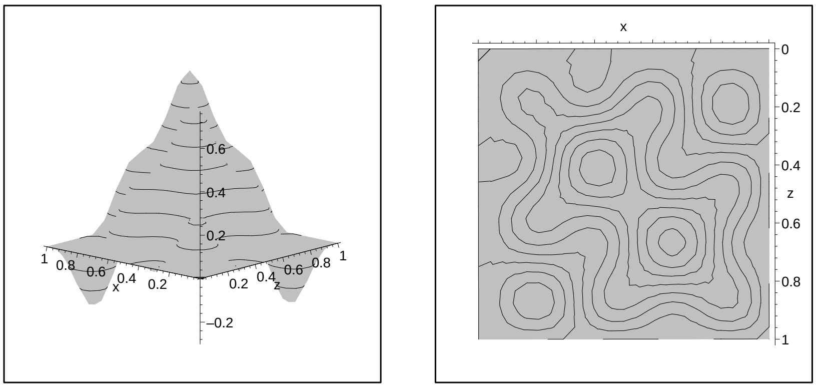
$$\mathsf{h}(t)X_n = \frac{sen(\omega_n t)}{\omega_n}X_n,$$

ou seja, são são autofunções do operador h(t).

A seguir, são apresentadas simulações para a função de Green temporal para uma vigas fixa apoiada, biapoiada e livre-livre em determinados instantes de tempo devido a periodicidade.

3.1. Viga Fixa Apoiada

Tem-se as condições de contorno $v(t,0) = 0, v_x(t,0) = 0, v(t,L) = 0, v_{xx}(t,L) = 0$.

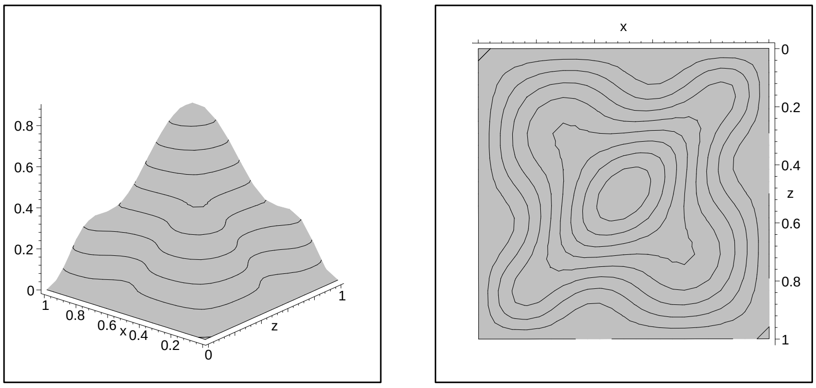


(a) (b)

Figura 2: (a) Gráfico $3D$ da função de Green em t=3 (b) Linhas de contorno.

3.2. Viga Biapoiada

Tem-se as condições de contorno $v(t,0) = 0, v_{xx}(t,0) = 0, v(t,L) = 0, v_{xx}(t,L) = 0$.

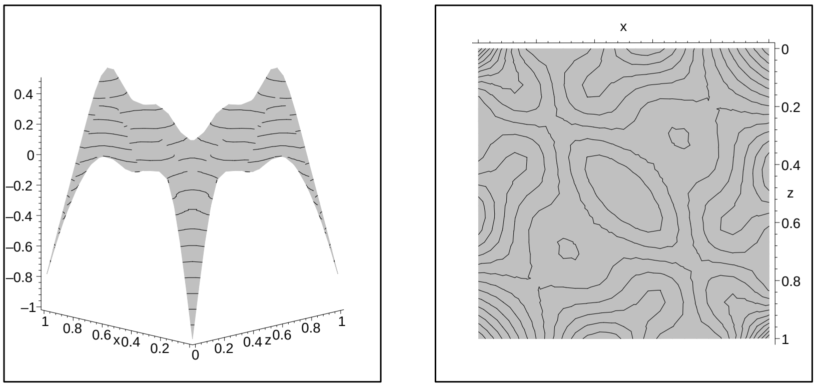


(a) (b)

Figura 3: (a) Gráfico $3D$ da função de Green em t=4.4 (b) Linhas de contorno.

3.3. Viga Livre-Livre

Tem-se as condições de contorno $v_{xx}(t,0) = 0$, $v_{xxx}(t,0) = 0$, $v_{xx}(t,L) = 0$, $v_{xxx}(t,L) = 0$.



(a) (b)

Figura 4: (a) Gráfico $3D$ da função de Green em t=3 (b) Linhas de contorno.

4. Conclusões

A equação que descreve o modelo de Euler-Bernoulli pode ser considerada de maneira análoga a de um sistema conservativo concentrado em termos da resposta impulso, ou função de Green temporal. Observa-se que a simetria da função de Green em cada instante do tempo é decorrência do fato de o problema modal ser simétrico e que os padrões serem mantidos com o tempo é devido a periodicidade temporal. A formulação utilizada foi direta, evitando a redução para um sistema de primeira ordem, através do espaço de estado, com a qual é obscurecida a simetria do problema.

Referências

[1] J. Claeyssen, G. Suazo, C. Jung, A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations, *Applied Numerical Mathematics*, **30** (1999), 65-78.

[2] J.R. Claeyssen, L.D. Chiwiacowsky, G.S. Suazo, The impulse response in the symbolic computating of modes for beams and plates, *Applied Numerical Mathematics*, **40** (2002), 119-135.

[3] D. Findeisen, "System Dynamics and Mechanical Vibrations", Springer-Verlag, 2001.

[4] M.K. Giareta, J.R. Claeyssen, Vibrações forçadas com força axial, em "Aplicon" (J.M. Balthazar et al., eds.), USP, São Carlos, 2001.

[5] J. Ginsberg, "Mechanical and Structural Vibrations", John Wiley, 2001.

[6] A.J. Hull, A closed form solution of a longitudinal bar with a viscous boundary condition, *J. Sound Vib.*, **169**, No. 1 (1994), 19-28.

[7] R.A.L. Soder, J.R. Claeyssen, Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial, em "XXIII CNMAC", Santos, São Paulo, 2000.