

Análise Espectral da Matriz LTS_N para o Problema de Ordenadas Discretas Bidimensional Cartesiano com Fonte Fixa e Espalhamento Isotrópico

E.B. HAUSER¹, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Av. Ipiranga 6681, Porto Alegre, RS, Brasil

M.T.M.B. de VILHENA, Instituto de Matemática, UFRGS, Av. Bento Gonçalves 9500, 91509-900 Porto Alegre, RS

R.C. BARROS, Instituto Politécnico (IPRJ), Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Cx.P. 97282, 28601-970 Nova Friburgo, RJ.

Resumo. Neste trabalho utilizamos a análise do espectro das matrizes LTS_N para desenvolver um novo algoritmo para determinar a solução de problemas de ordenadas discretas em geometria cartesiana bidimensional com espalhamento isotrópico, fonte fixa e um grupo de energia.

1. Introdução

A formulação LTS_N multidimensional (em diferentes geometrias) foi desenvolvida por Zabadal e Vilhena [16] e utiliza a Transformada de Laplace para determinar soluções analíticas das equações S_N nodais integradas transversalmente. O caso bidimensional está sendo estendido para o problema de ordenadas discretas com altas ordens de quadratura por Hauser e Vilhena [9].

Neste estudo verificamos que a determinação do espectro, para o caso isotrópico, permite diagonalizar as matrizes LTS_N . Portanto, é possível construir uma solução analítica para o problema de ordenas discretas bidimensional de uma forma mais eficiente.

Analisamos o espectro das matrizes LTS_N bidimensionais, da forma $sI - A$. Isso nos permite diagonalizar a matriz A e encontrar uma expressão analítica mais simples para os fluxos angulares médios e fluxos angulares médios na fronteira. Essa análise espectral fundamenta-se em Barros e Larsen [3] e Case [7].

¹Departamento de Matemática, PUCRS. Esta autora agradece à Fundação de Amparo e Pesquisa do Rio Grande do Sul pelo auxílio financeiro parcial recebido.

2. O Método LTS_N Bidimensional

Sejam $\Psi_m(x, y)$ o fluxo angular de partículas na direção discreta $\Omega_m = (\mu_m, \eta_m)$ e w_m o respectivo peso na quadratura angular usada, $m = 1 : M$, $M = \frac{N(N+2)}{2}$, com N par; σ_t a seção de choque total e σ_{smn} a seção de choque diferencial de espalhamento. As condições de contorno abrangem fluxo incidente no domínio conhecido e reflexão especular. As equações S_N aparecem como

$$\mu_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x}(x, y) + \eta_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial y}(x, y) + \sigma_t \Psi_m(x, y) = Q(x, y) + \sum_{n=1}^M w_n \Psi_n(x, y) \sigma_{smn}. \quad (2.1)$$

Integrando a equação (2.1) com respeito a x entre os limites 0 e a , e dividindo por a , resulta a equação unidimensional, na variável y

$$\begin{aligned} \eta_m \frac{d\Psi_{my}}{dy}(y) + \frac{\mu_m}{a} [\Psi_m(a, y) - \Psi_m(0, y)] + \sigma_t \Psi_{my}(y) \\ = Q_y(y) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M w_n \sigma_s \Psi_{ny}(y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde, para $m = 1 : M$, $\Psi_m(a, y)$ e $\Psi_m(0, y)$ são os fluxos angulares nos contornos. A fonte média e o fluxo angular médio ao longo do contorno horizontal do domínio são definidos como

$$Q_y(y) = \frac{1}{a} \int_0^a Q(x, y) dx$$

e

$$\Psi_{my}(y) = \frac{1}{a} \int_0^a \Psi_m(x, y) dx.$$

Analogamente, integrando a equação (2.1) com respeito a y entre os limites 0 e b , e dividindo por b , resulta a equação unidimensional na variável x :

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{d\Psi_{mx}}{dx}(x) + \frac{\eta_m}{b} [\Psi_m(x, b) - \Psi_m(x, 0)] + \sigma_t \Psi_{mx}(x) \\ = Q_x(x) + \sum_{n=1}^M w_n \sigma_{smn} \Psi_{nx}(x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde, para $m = 1 : M$, $\Psi_m(x, b)$ e $\Psi_m(x, 0)$ são os fluxos angulares nos contornos e, similarmente, a fonte média e o fluxo angular médio ao longo do contorno vertical do domínio são definidos como:

$$Q_x(x) = \frac{1}{b} \int_0^b Q(x, y) dy$$

e

$$\Psi_{mx}(x) = \frac{1}{b} \int_0^b \Psi_m(x, y) dy.$$

Aplicando a Transformada de Laplace com respeito a y na equação (2.2) e denotando $\mathcal{L}\{Q_y(y)\} = \overline{Q}_y(s)$ e $\mathcal{L}\{\Psi_{my}(y)\} = \overline{\Psi}_{my}(s)$, obtemos o sistema linear algébrico que representamos na seguinte forma matricial

$$(sI - A_y)\overline{\Psi}_y(s) = \Psi_y(0) + \overline{S}_y(s), \quad (2.4)$$

onde, para $i = 1 : M$ e $j = 1 : M$, os elementos da matriz \overline{A}_y , de ordem $M \times M$, têm a forma

$$a_y(i, j) = \begin{cases} -\frac{4\sigma_t - \sigma_{sii}w_i}{4\eta_i}, & \text{se } i = j \\ \frac{\sigma_{sij}w_j}{4\eta_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

O vetor das incógnitas é

$$\overline{\Psi}_y(s) = [\overline{\Psi}_{1y}(s) \overline{\Psi}_{2y}(s) \cdots \overline{\Psi}_{My}(s)]^T$$

e o vetor

$$\Psi_y(0) = [\Psi_{1y}(0) \Psi_{2y}(0) \cdots \Psi_{My}(0)]^T$$

tem seus elementos explicitados por $\Psi_{iy}(0) = \frac{1}{a} \int_0^a \Psi_m(x, 0) dx$, $i = 1 : M$.

O vetor $\overline{S}_y(s)$ possui componentes genéricos

$$\overline{S}_y(i) = \frac{\overline{Q}_y(s)}{\eta_i} - \frac{\mu_i}{a\eta_i} [\overline{\Psi}_i(a, s) - \overline{\Psi}_i(0, s)].$$

A solução dos sistema (2.4) é:

$$\overline{\Psi}_y(s) = (sI - A_y)^{-1}[\Psi_y(0) + \overline{S}_y(s)]. \quad (2.5)$$

Procedemos similarmente para as equações S_N nodais integradas transversalmente na direção y .

Para determinar os fluxos angulares aplicamos a Transformada de Laplace Inversa na equação (2.5). O resultado é

$$\Psi_y(y) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A_y)^{-1}[\Psi_y(0) + \overline{S}_y(s)]\}. \quad (2.6)$$

Precisamos determinar $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A_y)^{-1}\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A_x)^{-1}\}$. Para tanto, aplicamos o método da diagonalização [14] usado em problemas de transporte com elevados graus de anisotropia e elevada ordem de quadratura angular.

3. Descrição do Espectro da Matriz LTS_N para Problemas Bidimensionais

Uma análise espectral para problemas unidimensionais de transporte, em meio homogêneo, com espalhamento isotrópico, foi realizada por Case [7]. O estudo a ser

realizado nesse capítulo refere-se ao problema de ordenadas discretas \mathbf{S}_N bidimensional com espalhamento isotrópico e um grupo de energia e fundamenta-se em Case [7], Barros e Larsen [3], De Abreu [1] e Mello [11].

Descrivemos um processo para determinar os M autovalores e M autovetores da matriz \mathbf{LTS}_N bidimensional, válido somente para conjuntos simétricos de quadratura \mathbf{S}_N , com N par. Isto é, diferentes direções Ω_m podem ter o mesmo valor de μ_m e η_m . Conseqüentemente, para $N > 2$, as matrizes A_x e A_y possuem autovalores múltiplos.

Consideremos a equação homogênea associada às equações \mathbf{S}_N integradas transversalmente na direção vertical do domínio

$$\mu_m \frac{d\Psi_{xm}}{dx}(x) + \sigma_t \Psi_{xm}(x) = \frac{\sigma_s}{4} \sum_{n=1}^M w_n \Psi_{xn}(x), \quad (3.1)$$

onde $m = 1 : M$. Supomos que para cada m exista uma solução da forma:

$$\Psi_{mx}(x) = \alpha_m(s) e^{sx}. \quad (3.2)$$

Substituindo a equação (3.2) na equação (3.1), escrevemos o resultado

$$\alpha_m(s) \mu_m s e^{sx} + \alpha_m(s) \sigma_t e^{sx} = \frac{\sigma_s}{4} \sum_{n=1}^M \alpha_n(s) e^{sx} w_n$$

que equivalentemente pode ser escrito na forma

$$\alpha_m(s) (s \mu_m + \sigma_t) = \frac{\sigma_s}{4} \sum_{n=1}^M \alpha_n w_n. \quad (3.3)$$

Aqui, podemos considerar $\sum_{n=1}^M \alpha_n w_n \neq 0$ ou $\sum_{n=1}^M \alpha_n w_n = 0$.

Como a normalização é arbitrária, na primeira possibilidade assumimos

$$\sum_{n=1}^M \alpha_n(s) w_n = 1, \quad (3.4)$$

e a equação (3.3) assume a forma

$$\alpha_m(s) (s \mu_m + \sigma_t) = \frac{\sigma_s}{4}.$$

Logo,

$$\alpha_m(s) = \frac{\sigma_s}{4(s \mu_m + \sigma_t)}. \quad (3.5)$$

A partir das equações (3.4) e (3.5) determinamos, em analogia ao descrito em [7], a equação de dispersão

$$\sum_{n=1}^M \frac{w_n}{s \mu_n + \sigma_t} = \frac{4}{\sigma_s}, \quad (3.6)$$

cujas N raízes reais aparecem aos pares $\pm s_1, \pm s_2, \pm s_3, \dots, \pm s_{\frac{N}{2}}$, e constituem N autovalores de (3.3) de um total de M necessários. Os respectivos autovetores são determinados a partir da equação (3.5).

Os autovalores $M - N = \frac{N^2}{2}$ restantes são obtidos considerando a segunda condição

$$\sum_{n=1}^M \alpha_n(s) w_n = 0 \quad (3.7)$$

que, quando substituída na equação (3.3), produz

$$\alpha_m(s)(s\mu_m + \sigma_t) = 0. \quad (3.8)$$

Assim, se para $m = 1 : M$,

$$s = -\frac{\sigma_t}{\mu_m}, \quad (3.9)$$

podemos escolher $\alpha_m(s) \neq 0$ de modo a satisfazer simultaneamente as equações (3.7) e (3.8). Os autovalores dados na equação (3.9) são de multiplicidade ≥ 1 e os termos α_m correspondentes constituem um conjunto de $M - N$ autovetores linearmente independentes.

Um procedimento análogo é aplicado à equação homogênea associada às equações nodais S_N na variável y . Como ilustração, consideremos o conjunto de quadratura angular S_4 apresentado em [10]. Construiremos o espectro da matriz LTS_4 bidimensional na variável x , utilizando a análise espectral da equação (3.1).

Aplicando a condição (3.4) ao problema de autovalores (3.3) obtivemos a relação de dispersão (3.6), a qual, para $N = 4$ gera quatro autovalores reais: $\pm s_1$ e $\pm s_2$. Os respectivos autovetores (linearmente independentes), são obtidos da equação (3.5).

Ademais, aplicando a segunda restrição, equação (3.7), em (3.3) determinamos os oito autovalores restantes: $\pm \frac{\sigma_t}{\mu_1}$, simples, e $\pm \frac{\sigma_t}{\mu_2}$ de multiplicidade três. Os respectivos autovetores, todos linearmente independentes, são determinados pelo processo que descrevemos a seguir. Considerando o conjunto de pesos e quadratura angular dado em [10], ordenamos as direções angulares de forma que

- Ω_m , $m = 2, 3, 11$ e 12 possuem a mesma abcissa μ_2 ,
- Ω_m , $m = 5, 6, 8$ e 9 possuem a mesma abcissa $-\mu_2$,
- Ω_m , $m = 1$ e 10 possuem a mesma abcissa μ_1 ,
- Ω_m , $m = 4$ e 7 possuem a mesma abcissa $-\mu_1$.

Portanto, podemos escolher:

- $\alpha_m(\frac{\sigma_t}{\mu_2}) \neq 0$, para $m = 2, 3, 11$ e 12 ; caso contrário $\alpha_m(\frac{\sigma_t}{\mu_2}) = 0$,
- $\alpha_m(-\frac{\sigma_t}{\mu_2}) \neq 0$, para $m = 5, 6, 8$ e 9 ; caso contrário $\alpha_m(-\frac{\sigma_t}{\mu_2}) = 0$,
- $\alpha_m(\frac{\sigma_t}{\mu_1}) \neq 0$, para $m = 1$ e 10 ; caso contrário $\alpha_m(\frac{\sigma_t}{\mu_1}) = 0$,

- $\alpha_m(-\frac{\sigma_t}{\mu_1}) \neq 0$, para $m = 4$ e 7 ; caso contrário $\alpha_m(-\frac{\sigma_t}{\mu_1}) = 0$.

Em continuidade, a equação (3.7) aparece como

$$w_2\alpha_2\left(\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) + w_3\alpha_3\left(\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) + w_{11}\alpha_{10}\left(\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) + w_{12}\alpha_{12}\left(\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) = 0. \quad (3.10)$$

O conjunto solução da equação (3.10) (de 4 incógnitas) é um subespaço vetorial de dimensão 3 do espaço solução do problema de autovalores (3.3). Assim, correspondendo ao autovalor de multiplicidade três $\frac{\sigma_t}{\mu_2}$, podemos escolher 3 autovetores linearmente independentes.

Um raciocínio similar fornece:

$$\begin{aligned} w_5\alpha_5\left(-\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) + w_6\alpha_6\left(-\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) + w_8\alpha_8\left(-\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) + w_9\alpha_9\left(-\frac{\sigma_t}{\mu_2}\right) &= 0, \\ w_1\alpha_1\left(\frac{\sigma_t}{\mu_1}\right) + w_{10}\alpha_{10}\left(\frac{\sigma_t}{\mu_1}\right) &= 0, \\ w_4\alpha_4\left(-\frac{\sigma_t}{\mu_1}\right) + w_7\alpha_7\left(-\frac{\sigma_t}{\mu_1}\right) &= 0. \end{aligned}$$

4. A Solução LTS_N Bidimensional com Elevada Ordem de Quadratura Angular das Equações S_N

Conforme analisamos na seção anterior para o caso isotrópico de fonte fixa, as matrizes A_y e A_x possuem M autovalores reais, dos quais N são simples e simétricos e $M - N$ simétricos com multiplicidade ≥ 1 . Isto é, a multiplicidade de cada autovalor deste subconjunto do espectro é igual à repetição da ordenada discreta μ_m (ou η_m) correspondente, subtraída de uma unidade.

Sejam V_{y_i} e V_{x_i} os autovetores associados aos autovalores s_i e r_i de A_y e A_x respectivamente. V_{y_i} e V_{x_i} constituem as colunas das matrizes dos autovetores \mathbf{V}_y e \mathbf{V}_x . Como os autovetores são linearmente independentes as matrizes A_y e A_x são diagonalizáveis. Portanto:

$$A_y = \mathbf{V}_y \mathbf{D}_y \mathbf{V}_y^{-1},$$

onde \mathbf{D}_y é matriz diagonal dos autovalores e \mathbf{V}_y é a matriz dos autovetores correspondentes a A_y . Assim, escrevemos

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A_y)^{-1}\} = \mathbf{V}_y \mathcal{L}^{-1}\{(sI - \mathbf{D}_y)^{-1}\} \mathbf{V}_y^{-1} = \mathbf{V}_y e^{\mathbf{D}_y y} \mathbf{V}_y^{-1}. \quad (4.1)$$

Levando o resultado (4.1) em (2.6), representando a operação convolução por $*$, determinamos a forma matricial para os fluxos angular médio em função dos fluxos angulares médios na origem e dos fluxos angulares na fronteira

$$\Psi_y(y) = [\mathbf{V}_y e^{\mathbf{D}_y y} \mathbf{V}_y^{-1}] \Psi_y(0) + [\mathbf{V}_y e^{\mathbf{D}_y y} \mathbf{V}_y^{-1}] * S_y(y). \quad (4.2)$$

O espaço solução de cada um dos sistemas de equações diferenciais ordinárias (2.2) e (2.3) é constituído por M autovetores V_{y_i} e V_{x_i} , linearmente independentes, multiplicados por exponenciais, cujos expoentes são os autovalores s_i e r_i de A_y e A_x respectivamente. Portanto, expressamos os fluxos angulares médios e os fluxos angulares transversos (na fronteira) como

$$\Psi_y(y) = \sum_{i=1}^M B1_i V_{y_i} e^{s_i y} = \mathbf{V}_y e^{D_y y} \mathbf{B1},$$

$$\Psi(0, y) = \sum_{i=1}^M B2_i V_{y_i} e^{s_i y} = \mathbf{V}_y e^{D_y y} \mathbf{B2},$$

$$\Psi(a, y) = \sum_{i=1}^M B3_i V_{y_i} e^{s_i y} = \mathbf{V}_y e^{D_y y} \mathbf{B3},$$

onde $\mathbf{BK} = [BK_1, BK_2, \dots, BK_M]^T$, $K = 1 : 3$, são vetores que contêm as $3M$ constantes BK_i , $i = 1 : M$, $K = 1 : 3$, que, ao serem calculadas, determinam completamente a solução (4.2). Para tanto, resolve-se um sistema linear compatível, de $3M$ equações, obtidas da definição dos fluxos angulares médios em $x = a$ e $y = b$ e, da aplicação das condições de contorno.

Procedendo de forma similar para a variável x , geramos mais $3M$ equações com constantes BK_i , $i = 1 : M$, $K = 4 : 6$.

As equações são acopladas num único sistema linear pelos elementos $\Psi_{iy}(0) = \frac{1}{a} \int_0^a \Psi_m(x, 0) dx$ e $\Psi_{ix}(0) = \frac{1}{a} \int_0^a \Psi_m(0, y) dy$, $i = 1 : M$, de $\Psi_y(0)$ e $\Psi_x(0)$, conhecidos em apenas $M/2$ direções.

Assim, determinas as $6M$ constantes, os fluxos angulares médios ficam completamente estabelecidos por

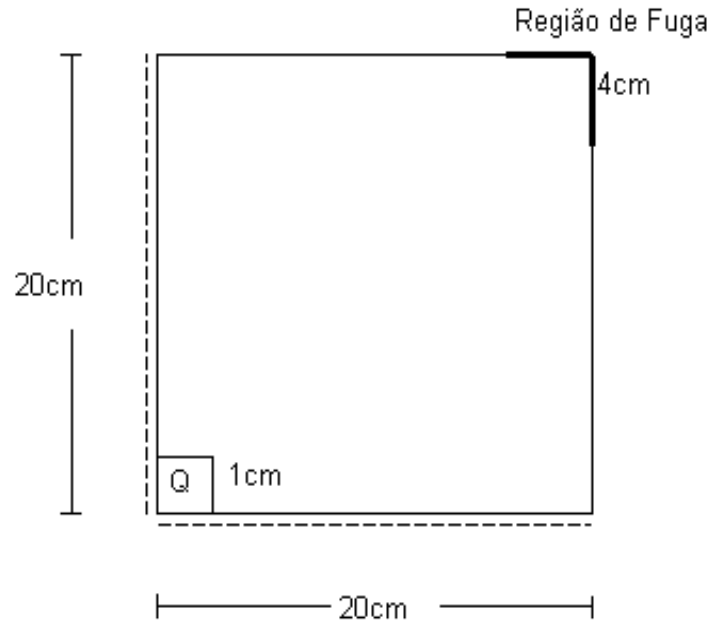
$$\Psi_y(y) = [\mathbf{V}_y e^{D_y y} \mathbf{V}_y^{-1}] \Psi_y(0) + [\mathbf{V}_y e^{D_y y} \mathbf{V}_y^{-1}] * S_y(y)$$

e

$$\Psi_x(x) = [\mathbf{V}_x e^{D_x x} \mathbf{V}_x^{-1}] \Psi_x(0) + [\mathbf{V}_x e^{D_x x} \mathbf{V}_x^{-1}] * S_x(x).$$

5. Problema Ilustrativo e Considerações Finais

No desenvolvimento deste trabalho aplicamos alguns dos resultados preliminares obtidos num problema de transporte de nêutrons, com espalhamento isotrópico, numa placa quadrada de 20cm de lado. É um problema com parâmetros materiais difusivos, isto é, baixa absorção. A seção de choque total é de $\sigma_t = 1 \text{cm}^{-1}$ e a seção de espalhamento $\sigma_s = 0.99 \text{cm}^{-1}$. Junto ao vértice $(0, 0)$ existe uma fonte de nêutrons de intensidade unitária. Utilizamos o conjunto de quadratura angular com simetria de nível, descrito por Lewis e Miller [10]. O domínio do problema ilustrativo é representado na figura abaixo, as faces pontilhadas têm contorno reflexivo e as demais, vácuo.



Com a completa resolução do problema ilustrativo, obtivemos resultados preliminares para $N = 4$, na determinação da fuga de nêutrons no canto superior direito na região mostrada na figura, calculando a corrente parcial através dos fluxos angulares transversos emergentes do contorno. A tabela abaixo compara o resultado obtido com os disponíveis na literatura.

Método	Fuga de Nêutrons($cm^{-2}s^{-1}$)
SGF-ExpN[11]	0.4211×10^{-2}
LTS_NNodal [16]	$0,4800 \times 10^{-2}$
LTS_NNodal – ElevadaQuadratura	0.2467×10^{-3}

N	$Cond(Ax) \cong Cond(Ay)$	$\rho(Ax) \cong \rho(Ay)$
2	149.500004	1.732050
4	274.482498	2.856969
6	373.319082	3.750438
8	466.794625	4.582575
12	623.512476	5.980410
16	763.433030	7.196481

Os resultados da tabela acima permitem descrever o crescimento do raio espectral da matriz \mathbf{LTS}_N ($\rho(A_x)$), aproximando-o por uma função potência (com expoente menor do que um): $\rho_{A_x}(N) \cong 1.093N^{0.684}$. A conclusão de que a ordem de crescimento do raio espectral $\rho(A_x)$ é menor do que N está auxiliando na análise do erro e estudo da convergência que estamos desenvolvendo paralelamente a esse trabalho.

Também, determinamos o número de condicionamento da matriz \mathbf{LTS}_N , utilizando como medida o $Cond(Ax) = \|Ax\| \cdot \|Ax^{-1}\|$ e a norma matricial escolhida é norma do máximo das linhas $\|Ax\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^M |a_x(i, j)|, 1 \leq i \leq M\}$. Verificamos que $Cond(Ax)$ é pequeno se comparado com a matriz de Hilbert de ordem M , $H(M)$, um exemplo típico de matriz mal condicionada. Por exemplo, $Cond(H(4)) = 28375$, $Cond(H(12)) \cong .411544 \times 10^{17}$, $Cond(H(24)) \cong .814326 \times 10^{35}$.

Como continuidade do presente trabalho, pretendemos implementar o algoritmo para elevadas quadraturas, estabelecer uma relação entre o erro global do fluxo aproximado e o erro global na fórmula de quadratura e verificar se as soluções aproximadas convergem para a solução exata.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Ruben Panta Pazos e Augusto Vieira Cardona pelas idéias e discussões matemáticas que enriqueceram este trabalho.

Abstract. In this work we describe the spectral analysis of the \mathbf{LTS}_N matrix to develop a new algorithm that generates an analytic solution of the discrete ordinates problem considering two-dimensional cartesian geometry, isotropic scattering and one energy group.

Referências

- [1] M.P. de Abreu, On the spectrum of the one-speed slab-geometry discrete ordinates operator in neutron transport theory, *Annals of Nuclear Energy*, **25** (1998), 1209-1219.
- [2] L.B.Barichello, M.T.B. Vilhena, A new analytical approach to solve the neutron transport equation, *Kerntechnik*, **56** (1991), 334-336.
- [3] R.C. Barros, "A Spectral Nodal Method for the Solution of Discrete Ordinates Problems in a One and Two Dimensional Cartesian Geometry", Tese de Doutorado, University of Michigan, 1990.
- [4] R.C. Barros, M. Yavuz, M.P. Abreu, Progress in spectral nodal methods applied to discrete ordinates transport problems, *Progress in Nuclear Energy*, **12-33** (1998), 117-154.
- [5] R.C. Barros, E. W. Larsen, A spectral nodal method for one-group X,Y-geometry discrete ordinates problems, *Nuclear Science and Engineering*, **34-111** (1992), 34-45.

- [6] R.C. Barros, E.W. Larsen, A numerical method for one-group slab-geometry discrete ordinates problems, *Nuclear Science and Engineering*, **19-104** (1990), 199-208.
- [7] K. Case, E. Zweifel, “Linear Transport Theory”, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- [8] G.H. Golub, C.F.V. Loan, “Matrix Computation”, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [9] E.B.Hauser, Formulação LTS_N bidimensional para o problema de ordenadas discretas com elevada quadratura, em “Seleção do XXII CNMAC” (E.X.L. de Andrade, G.N. Silva e A. Sri Ranga, eds.), Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 1, pp. 111-123, SBMAC, 2000.
- [10] E. Lewis, W. Miller, “Computational Methods of Neutron Transport”, John Wiley-Sons, New York, 1984.
- [11] J.A.M. Mello, “Modelagem Espectro-Nodal Exponencial para Problemas Monoenergéticos de Penetração Profunda segundo a Teoria de Transporte de Nêutrons na Formulação de Ordenadas Discretas em Geometria Cartesiana Bidimensional”, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2000.
- [12] J.M.Ortega, W.C.Rhheinboldt, “Iterative Solution of Non Linear Equations in Several Variables”, Academic Press, New York, 1970.
- [13] R.P. Panta, M.T.B. Vilhena, Convergence in transport theory , *Applied Numerical Mathematics*, **9** (1999), 79-92.
- [14] C.F.Segatto, M.T.B. Vilhena, M.G. Gomes, The one-dimensional “ $LTSN$ ” solution in a slab with high degree of quadrature, *Annals of Nuclear Energy* **26** (1999), 925-934.
- [15] J. Zabadal, M.T.B. Vilhena, L.B. Barichello, An analytical solution for the two-dimensional discrete ordinate problem in a convex domain, *Progress in Nuclear Energy*, **17** (1995).
- [16] J. Zabadal, “Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discretas Multidimensional”, Tese de Doutorado, PROMEC,UFRGS, 1994.