

Geração Automática de Malhas de Elementos Finitos e a Estrutura de Dados Winged-Edge Modificada

J.P. GOIS¹, M.A. PITERI, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho objetivamos discutir a aplicação do problema de triangulação à geração automática de malhas de elementos finitos triangulares. A discretização de um objeto bidimensional arbitrário é realizada através da técnica de avanço da fronteira em duas fases, enquanto a completa representação do objeto e da malha é feita usando-se a estrutura de dados topológica *winged-edge modificada*, desenvolvida originariamente para a representação de objetos físicos poliedrais no contexto da Visão Computacional e da Modelagem de Sólidos. Apresentamos, ainda, uma discussão pormenorizada dos diferentes aspectos teóricos associados a esta estrutura, bem como dos operadores topológicos de Euler, que são os responsáveis por manterem a consistência da conectividade durante o processo construtivo da malha. É exatamente aqui que ocorre a contribuição mais relevante deste trabalho, que está associada à forma como esses operadores foram devidamente integrados à técnica de avanço da fronteira.

1. Introdução

Obter a triangulação de um objeto no R^n é um problema clássico em computação. Recentemente, a comunidade associada à área de *Geometria Computacional* que estuda problemas geométricos do ponto de vista computacional tem intensificado seus estudos quanto a esta questão. Apesar dos problemas teóricos que o problema suscita em diferentes dimensões, as aplicações mais imediatas estão ligadas aos espaços euclidianos de dimensões 2 e 3 [7]. Para entender a sua importância é suficiente dizer que, para um número significativo de aplicações tridimensionais, a representação primária de um objeto é dada por um conjunto finito de pontos, que são posteriormente combinados em subconjuntos de ordem 3, dando origem a um conjunto de triângulos que irá aproximar a superfície do objeto. Entre as aplicações mais relevantes, podemos citar:

- Visão por computador e visualização de superfícies matemáticas;
- Reconstrução de superfícies e de objetos 3D a partir de seções transversais;
- Geração de malhas de elementos finitos.

¹ex-graduando bolsista PIBIC/CNPq e mestrando bolsista FAPESP.

No contexto deste trabalho nosso objetivo é discutir o problema de triangulação no âmbito de sua aplicação à geração automática de malhas de elementos finitos. Nesse sentido, usaremos a técnica de avanço da fronteira em duas fases, que está associada a uma família de métodos de triangulação que reduz de forma sistemática o interior da geometria do domínio a ser discretizada após a construção de cada novo elemento triangular [7, 9].

O Método de Elementos Finitos (**MEF**) é atualmente um dos mais importantes métodos numéricos utilizados para se obter a solução aproximada de problemas físicos modelados através de Equações Diferenciais Parciais (**EDP**).

Dois características devem ser realçadas em relação ao **MEF**, ambas decorrentes do fato de ele utilizar uma abordagem numérica. A primeira característica intrínseca ao **MEF** é a necessidade de uma quantidade significativa de dados de entrada e de saída. A segunda característica está relacionada ao fato de que numa malha de elementos finitos a regularidade dos elementos influencia decisivamente o resultado final da solução obtida.

Independente do problema físico estudado, se o **MEF** estiver envolvido, a atividade de *pré-processamento* é sempre necessária, e consiste, entre outras atividades, da decomposição do domínio do objeto estudado no nível geométrico e topológico. A decomposição de uma perspectiva geométrica está associada à triangulação propriamente dita, enquanto do ponto de vista topológico, a preocupação é manter a conectividade entre as entidades topológicas *vértices*(pontos), *arestas*(segmentos) e *faces*(triângulos) presentes numa malha de elementos finitos. A próxima seção descreve a técnica de triangulação usada para se atingir os propósitos enunciados.

2. Técnica de Avanço da Fronteira

Para um mesmo conjunto de pontos no R^n , é possível obter, dependendo do critério utilizado, diferentes triangulações. Assim, a escolha do método de triangulação, conjuntamente com o critério de formação dos elementos, é fundamental para o sucesso do sistema de pré-processamento.

A técnica de avanço da fronteira, como sugere seu nome, pertence a uma família de métodos de triangulação que reduz de forma sistemática a geometria do domínio a ser discretizado [9, 10, 12]. As principais características dessa técnica são:

- Processar geometrias arbitrárias;
- Basear-se somente em informações da fronteira para obter a discretização;
- Gerar malhas com boa regularidade, local e globalmente;
- Poder ser integrada à técnica de Delaunay;
- Permitir concentrar elementos em sub-regiões do domínio.

Devemos observar que, nos métodos de triangulação de duas fases, a geração dos pontos no interior da geometria antecede a triangulação propriamente dita, o que acaba por condicionar a regularidade dos elementos triangulares. Após a completa

obtenção da malha, podemos aumentar a sua qualidade global através de processos de perturbação nas coordenadas dos *vértices* [4, 6].

Segue-se, em linhas gerais, o pseudocódigo da técnica de avanço da fronteira para a triangulação de domínios planares arbitrários [9, 11].

Algorithm 1 Pseudocódigo da técnica de Avanço da Fronteira em duas fases

Passo 1: obtenha a discretização da fronteira do domínio, cujos segmentos darão origem a um conjunto de bases. Estas serão definidas como a fronteira de avanço inicial Γ_2 . Obtenha a lista de pontos que pertencem à fronteira de avanço e ao interior do domínio.

Passo 2: Enquanto $\Gamma_2 \neq \phi$ faça

Passo 2.1: selecione a próxima base de Γ_2

Passo 2.2: encontre a coleção de pontos candidatos para a formação do triângulo associado à base escolhida;

Passo 2.3: dentre os pontos obtidos no Passo 2.2, encontre o ponto ótimo que atenda aos requisitos de consistência topológica e ao critério geométrico para formação do elemento triangular;

Passo 2.4: gere o elemento triangular a partir da base e o ponto ótimo escolhido;

Passo 2.5: atualize a lista de bases e a lista de pontos da fronteira de avanço e do interior.

3. Estrutura de Dados Topológica Winged-Edge Modificada

Uma estrutura de dados topológica representa a completa topologia do objeto em estudo [2], já que estamos trabalhando no plano, todas as possíveis relações de adjacência entre as entidades topológicas, *vértices*, *arestas* e *faces* presentes numa subdivisão planar. Uma característica fundamental associada a essas estruturas é que qualquer informação relativa à topologia pode ser obtida em tempo constante ou proporcional ao número de entidades envolvidas, independentemente da dimensão do problema, quer a malha possua 1 milhão de elementos triangulares ou 100 mil elementos, já que estas informações são de natureza local [1, 2, 8].

A estrutura de dados topológica *winged-edge* concentra a maior parte de suas informações na entidade *aresta* (Figura 1). Isto acontece em função do fato de que em qualquer modelo poliedral *manifold*, uma *aresta* pertence a exatamente duas *faces*, ou seja, este número é invariante [1].

Da forma como foi concebida originariamente, esta estrutura não permite representar diretamente uma *face* com mais de uma componente conexa (buracos em seu interior).

Com a introdução da entidade *ciclo* [3], pode-se representar *faces* com mais de uma componente conexa e, assim, a estrutura passa a ser referenciada como *winged-edged modificada* [5].

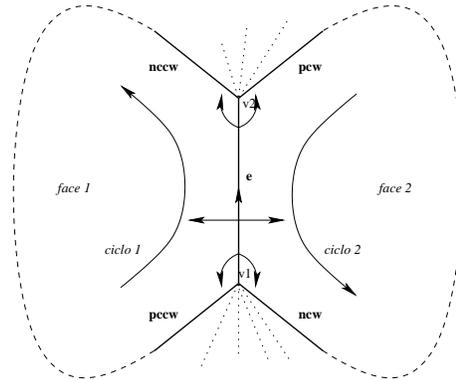


Figura 1: Representação diagramática da estrutura de dados topológica winged-edge modificada.

Na Figura 2, é possível observar o modelo hierárquico topológico usado em nossa implementação e que pode ser visto como o modelo computacional associado a qualquer objeto bidimensional. A rigor, a entidade *shell* não necessitaria ser utilizada, mas o seu uso acrescenta um nível a mais de abstração ao modelo. Esse modelo é útil na medida em que ilustra a organização e todas as possíveis relações entre as diferentes entidades topológicas e acaba por influenciar a arquitetura do núcleo de representação do sistema implementado.

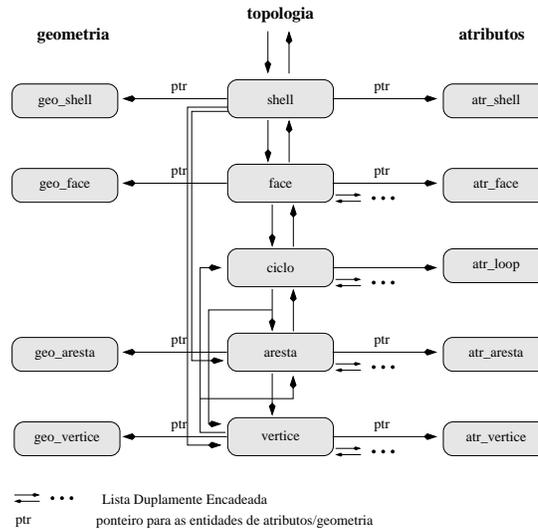


Figura 2: Modelo hierárquico e as respectivas entidades topológicas associadas a um objeto planar, em particular, uma malha de elementos finitos.

Embora outras geometrias possam ser tratadas pelo modelo topológico, em particular pela entidade *aresta*, em nossa implementação trabalhamos apenas com curvas de grau 1 (segmentos de retas).

4. Operadores de Euler

Todas as operações construtivas realizadas sobre uma subdivisão planar representada pela estrutura de dados winged-edge modificada são realizadas por primitivas topológicas denominadas operadores de Euler. Esses operadores mantêm a consistência das relações de conectividade entre as diferentes entidades topológicas presentes no modelo, além de encapsular completamente toda a complexidade de ordem geométrica e topológica associada ao código [2, 5, 10].

Somente 5 operadores de Euler são suficientes para a completa manipulação construtiva de uma subdivisão planar arbitrária [3](Figura 3). São eles:

- msflv** : **m**ake **s**hell, **f**ace, **l**oop and **v**ertex;
- mve** : **m**ake **v**ertex and **e**dge;
- mfle** : **m**ake **f**ace loop and **e**dge;
- mev** : **m**ake **e**dge and **v**ertex;
- mekl** : **m**ake **e**dge and **k**ill loop.

O operador **msflv** inicia o processo de construção de um objeto primitivo. É composto por uma *shell*, por uma *face*, um *ciclo* e um *vértice*. Esse operador é usado apenas uma única vez para a inicialização do modelo topológico (Figura 3(a)).

O operador **mve** cria um novo *vértice* v_3 ao longo de uma *aresta* já existente, subdividindo-a e dando origem a uma nova *aresta* e_1 (Figura 3(b)).

O operador **mfle** introduz uma nova *aresta*, ligando-a a dois *vértices* pertencentes a um mesmo *ciclo*, criando uma nova *face* e um novo *ciclo* (Figura 3(c)).

O operador **mev** tem por finalidade criar um novo *vértice* v_2 , conectando-o a um outro já existente, v_1 , através de uma nova *aresta* e . Isto faz com que ambos os *ciclos* da *aresta* e sejam coincidentes (Figura 3(d)).

O operador **mekl** faz a união de dois *ciclos* pertencentes à mesma *face* e introduz uma nova *aresta* e , definida por um *vértice* de cada *ciclo* (Figura 3(e)).

5. Integração entre a Técnica de Avanço da Fronteira e os Operadores de Euler

Esta seção apresenta a contribuição mais relevante deste trabalho, que consiste na integração entre a técnica de Avanço da Fronteira e os operadores de Euler.

Durante o processo construtivo da triangulação de uma região planar arbitrária ocorrem somente 4 situações topológicas. Para facilitar a sua compreensão uma representação geométrica de cada um desses casos pode ser observada em detalhes na figura 5, bem como os respectivos operadores de Euler utilizados em cada situação.

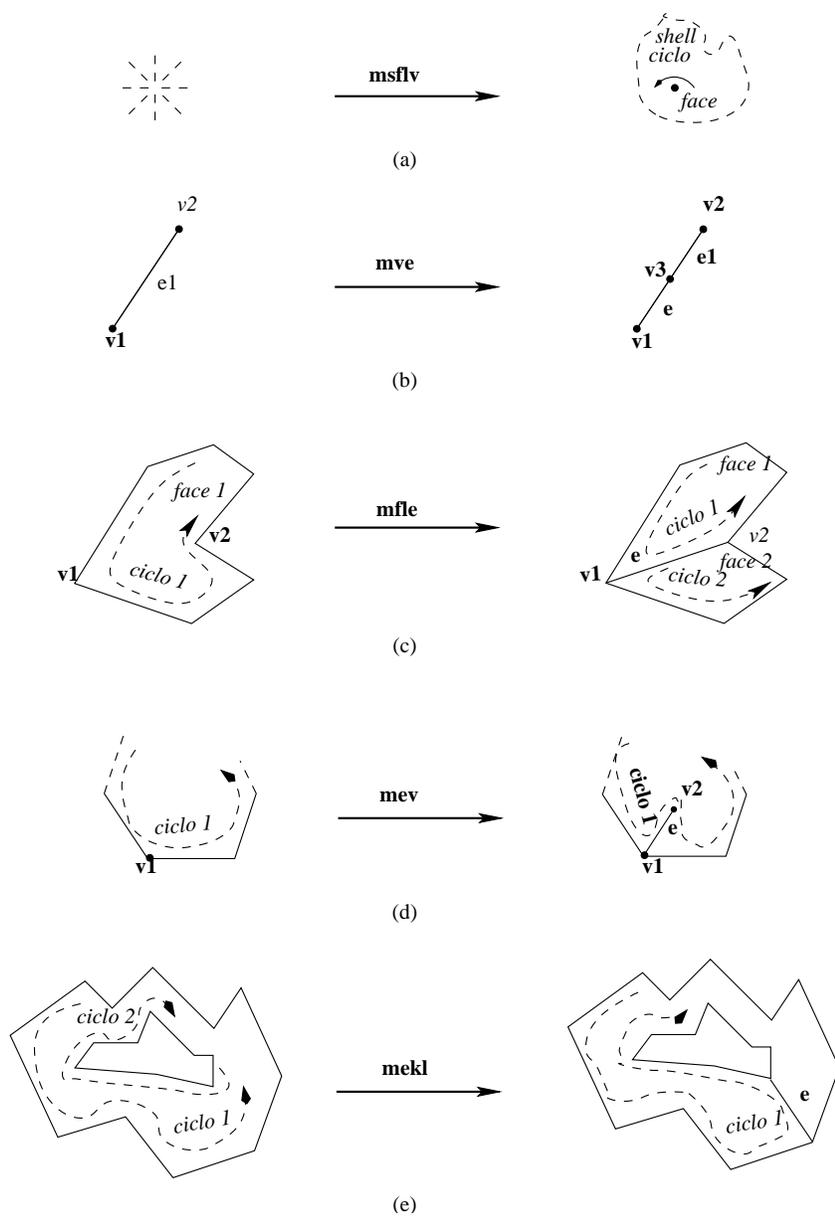


Figura 3: Representação diagramática dos 5 operadores de Euler necessários durante o processo de construção da malha.

Por outro lado, o Algorithm 2 apresenta o pseudo-código que classifica o exato momento em que ocorrem as situações ilustradas na Figura 5, para a formação de um novo elemento triangular quando usamos a técnica de avanço da fronteira.

O Algorithm 2 em conjugação com a análise da Figura 5 permite verificar como foi possível realizar a integração entre os operadores de Euler e a técnica de Avanço da Fronteira.

A Figura 4 ilustra a discretização de uma geometria bidimensional arbitrária composta por múltiplas componentes conexas que foi obtida a partir da implementação realizada.

Algorithm 2 Classificação de todos os casos que podem ocorrer durante o processo de discretização usando a técnica de Avanço da Fronteira.

Para cada uma das bases da lista Γ_2 **faça**

Passo 1: Encontre o ponto ótimo c ;

Passo 2: Não há *arestas* incidentes ao ponto ótimo c , Figura 5(a);

Passo 3: Há *arestas* incidentes ao ponto ótimo c ;

Passo3.1: Uma delas é incidente a um dos *vértices* da base(ab), Figura 5(b);

Passo 3.2: Nenhuma delas é incidente aos *vértices* da base(ab);

Passo 3.2.1: O ponto ótimo c e a base(ab) pertencem ao mesmo *ciclo*. O Operador **mfle** é executado criando uma nova *face*. No caso da *face* não ser triangular, uma nova lista de base Γ_2 é criada com as *arestas* que compõem o *ciclo* j , e a lista de bases Γ_2 original é atualizada de modo a conter somente as bases correspondentes às *arestas* do *ciclo* 1 resultante, Figura 5(c);

Passo 3.2.2: O ponto ótimo c e a base(ab) localizam-se em *ciclos* diferentes. O Operador **mekl** é executado unindo estes dois *ciclos* pertencentes a mesma *face*, Figura 5(d).

6. Conclusão

Neste trabalho, são apresentados alguns resultados de um sistema de geração automática de malhas adaptativas bidimensionais que está em desenvolvimento. O sistema irá incorporar uma série de funcionalidades típicas de um ambiente de *pré-processamento* voltado para o MEF e será disponibilizado para o domínio público. O seu núcleo de representação é baseado numa poderosa estrutura de dados topológica denominada *winged-edge modificada*, capaz de abstrair todas informações de natureza geométrica, topológica e de atributos, presentes num modelo físico, e de suportar a integração de subsistemas de *análise* e de *pós-processamento* (visualização de grandezas físicas escalares, vetoriais e tensoriais). Primitivas topológicas denominadas operadores de Euler foram implementadas e integradas à técnica de triangulação de avanço da fronteira. Os resultados alcançados até o presente momento reforçam e contribuem para consolidar a escolha da estrutura de dados como núcleo de representação de nosso sistema e a escolha da técnica de triangulação uti-

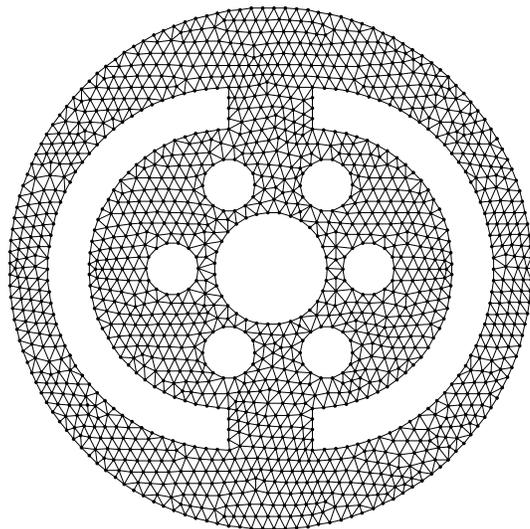


Figura 4: Exemplo 1: Malha triangular com múltiplas componentes conexas. O número de *faces*, *arestas* e *vértices* são respectivamente: 2456, 3911 e 1447.

lizada. As próximas etapas do trabalho prevêem a possibilidade da integração entre as técnicas de triangulação de **Avanço da Fronteira** com a de **Delaunay**, explorando as principais características associadas a cada uma delas e a geração de malhas adaptativas. O estudo que permitiu realizar a classificação de todas as situações topológicas que ocorrem durante o processo de construção de uma malha, quando usamos a técnica de triangulação de avanço da fronteira e quais os operadores de Euler a serem aplicados em cada situação, se constitui na maior contribuição deste trabalho.

Agradecimentos: Gostaríamos de agradecer às pertinentes sugestões apresentadas por ambos os pareceristas e às agências de fomento CNPq e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

Abstract. The main purpose of this work is to discuss the application of a triangulation problem to generate in automatic way the triangular finite element mesh. The decomposition of a arbitrary 2D object is made using the advancing front technique, while the representation of the mesh and the object is done by a topological data structure *modified winged-edge*, originally developed to represent polyhedral physical objects in the computational vision and solid modeling context. We present a discussion about the theoretical different aspects related with these structures, as so to the topological Euler operators. These operators are responsible to keep all the connections during the mesh constructive process. Details how we proceed to integrate the advancing front methods with the Euler operators, as the implementation was done, complete this work.

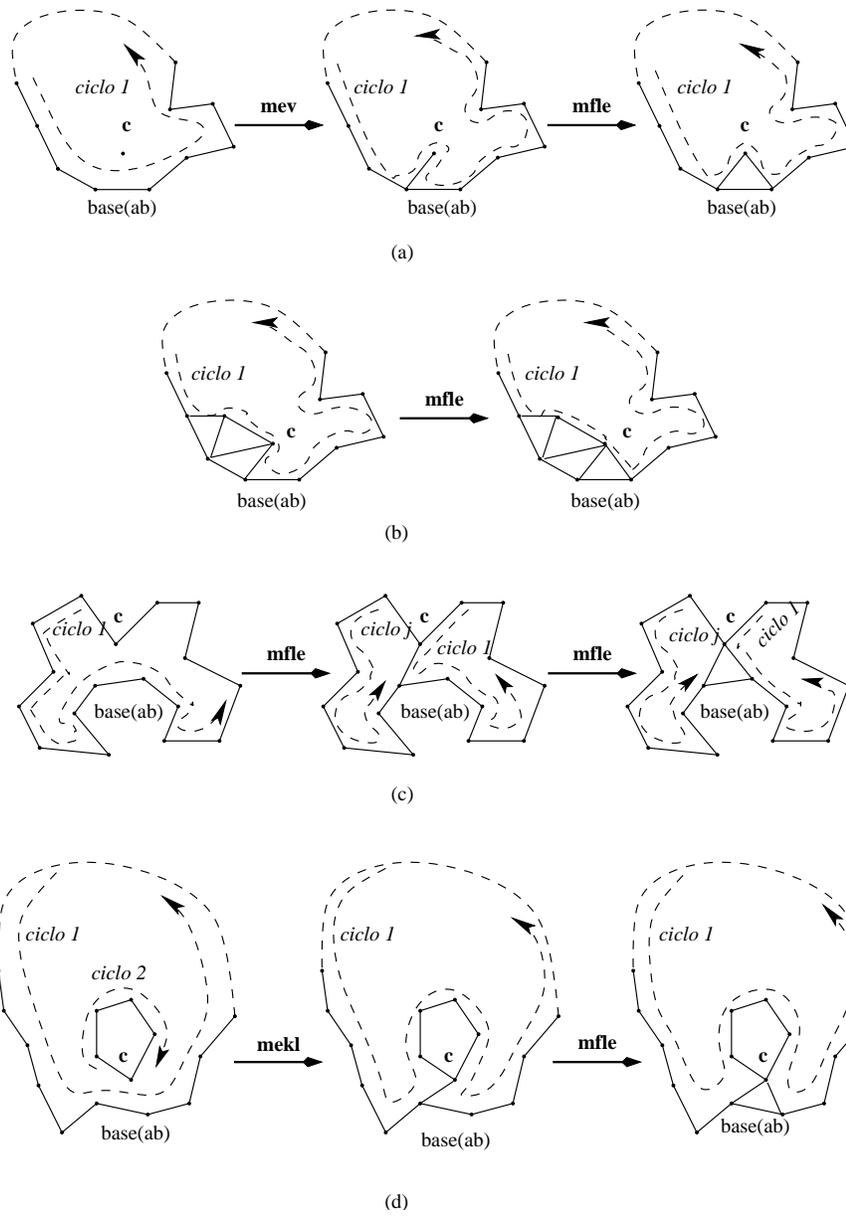


Figura 5: Integração entre os operadores de Euler e a Técnica de Avanço da Fronteira.

Referências

- [1] B.G. Baumgart, “Winged-Edge Polyhedron Representation”, Tech. Report. STAN-CS-320, Stanford University Computer Science Department, 1972.
- [2] M.W. Beall, M.S. Shepard, A general topology-based mesh data structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, No. 9 (1997), 1573-1596.
- [3] I. Braid, R. Hillyard e I. Stroud, Stepwise construction of polyedra in geometric modelling, em “Mathematical Methods in Computer Graphics and Design” (K. Bradlie Ed.), Academic Press, London, p.123-141, 1980.
- [4] S.A. Cannan, M.B. Stephenson e T.D. Blacker, Optismoothing : an optimization driven aproach to mesh smoothing, *Finite Elements, Analysis and Design*, **13** (1993), 185-190.
- [5] R. Ficher, “Genesys - Um Sistema De Modelagem de Sólidos”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Informática - PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1991.
- [6] W.F. Frey e D.A. Field, Mesh relaxation : a new technique for improving triangulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31** (1991), 1121-1133.
- [7] P.L. George, “Automatic Mesh Generation: Applications to Finite Element Mesh”, John Wiley & Sons, 1991.
- [8] A.S. Glassner, Maintaining winged-edge models, em “Graphics Gems IV”, vol. II, Academic Press, Inc., pp. 191-200, 1991.
- [9] W. Kwok, K. Haghighi, E. Kang, An efficient data structure for advancing-front triangular mesh generation technique, *Communication in Numerical Methods in Engineering*, **11** (1995), 465-473.
- [10] M.A. Piteri e J.P.B.M. Almeida, Hierarchical 2D mesh generation using topological data structures, em “Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computers” (E.R.A. Oliveira et al., eds.), Macau, vol.II, pp. 981-986, 1995.
- [11] M.A. Piteri, J.P.B.M. Almeida, Controlling the propagation of the advancing front in three dimensional mesh generation, em “Computational Methods in Engineering and Science” (J. Bento et al., eds.), Elsevier Science Ltd, Oxford, p. 911-921, 1999.
- [12] M.A. Piteri, “Geração Automática de Malhas Hierárquico-Adaptativas em Domínios Bidimensionais e Tridimensionais”, Tese de Doutorado, DECivil, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, PO, 1999.