

# Técnicas Numéricas para Simulação da Contração Planar de Fluidos Oldroyd-B<sup>1</sup>

L. GROSSI, M.F. TOMÉ, A.F. CASTELO, N. MANGIAVACCHI, J.A. CUMINATO, Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, 13566-590 São Carlos, SP, Brasil.

**Resumo.** O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um método numérico capaz de simular escoamentos viscoelásticos de um fluido Oldroyd-B para o problema da contração planar 4:1. Simulação numérica de escoamentos de fluidos viscoelásticos através de uma contração é propensa a erros acentuados na avaliação da tensão e do campo de velocidade próximo ao canto reentrante do estrangulamento. Introduzimos uma técnica numérica baseada em diferenças finitas, permitindo-nos analisar o comportamento de fluido Oldroyd-B com altos números de Weissenberg no problema da contração planar.

## 1. Introdução

Apesar do grande avanço ocorrido nas últimas décadas no desenvolvimento de métodos numéricos para resolver escoamentos complexos altamente elásticos de materiais polímeros, a simulação de escoamentos viscoelásticos através de geometrias complexas continua sendo ainda um desafio. Problemas que apresentam altos números de Weissenberg muitas vezes sofrem de instabilidade numérica e como consequência a convergência pode não ser atingida. Este fato é atribuído a vários fatores: a presença de singularidades geométricas e condições de contorno para o escoamento, deficiência do método para tratar o problema e o domínio dos termos não lineares nas equações. O problema da contração planar 4:1 utilizando os modelos Oldroyd-B e Upper Convected Maxwell tem sido estudado por vários pesquisadores usando métodos diferentes. Entre o grande número de trabalhos nesta área podemos citar [6], [2] e [1], os quais foram desenvolvidos utilizando o método dos elementos finitos. Entre estes destacamos o trabalho [6] que é considerado o pioneiro no tratamento de escoamentos a baixos números de Reynolds (“creeping flows”) de um fluido Oldroyd-B para o problema da contração planar. Os trabalhos [5], [8] e [10] utilizaram o método de volumes finitos e [14] o método de diferenças finitas. Dentre todos estes trabalhos existem alguns pontos de concordância sobre o chamado “problema de altos valores de Weissenberg”, para o qual muitos autores consideram a existência de um valor limitante para Weissenberg. Para números de Weissenberg

---

<sup>1</sup>Auxílio financeiro FAPESP

maiores que esse valor crítico, o método em consideração poderia não atingir a convergência. Porém ainda existem algumas controvérsias a respeito de quanto seria este valor limitante.

Este trabalho foi desenvolvido com base no código computacional GENSMAC [12], o qual resolve as equações de Navier-Stokes para variáveis primitivas sobre uma malha cartesiana uniforme.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um método numérico baseado na técnica de diferenças finitas para tratar escoamentos viscoelásticos do tipo Oldroyd-B e empregá-lo para problemas envolvendo a contração planar 4:1.

As equações básicas de escoamentos de um fluido Oldroyd-B são consideradas, e uma nova formulação é desenvolvida para o cálculo das componentes do tensor extra tensão sobre a fronteira rígida. Resultados numéricos, demonstrando a capacidade desta nova técnica na simulação de escoamentos viscoelásticos tipo Oldroyd-B para o problema da contração, são apresentados.

## 2. Equações Básicas

As equações básicas que governam os escoamentos viscoelásticos de fluidos tipo Oldroyd-B [3] são as equações constitutivas:

$$T_{ik} + \lambda_1 \overset{\nabla}{T}_{ik} = 2\mu_0 \left( d_{ik} + \lambda_2 \overset{\nabla}{d}_{ik} \right), \quad (2.1)$$

juntamente com a equação de quantidade de movimento

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i, \quad (2.2)$$

e conservação de massa ou (condição de incompressibilidade do fluido)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.3)$$

onde  $\mu_0$ ,  $\rho$  e  $v$  são viscosidade aparente, densidade e velocidade, respectivamente.

$T_{ik}$  é o tensor extra tensão simétrico. A derivada contra-variante  $\overset{\nabla}{T}_{ik}$  é definida por

$$\overset{\nabla}{T}_{ik} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial t} + v_m \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_m} T_{mk} - \frac{\partial x_k}{\partial x_m} T_{im}$$

e

$$d_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

é o tensor razão de deformação;  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são constantes temporais de relaxação e retardação, respectivamente. Notamos que tomando  $\lambda_2 = 0$  obtemos o modelo de Maxwell. Para resolvermos as equações (2.1)–(2.3) introduzimos a seguinte mudança de variáveis

$$T_{ik} = 2\mu_0 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) d_{ik} + S_{ik}, \quad (2.4)$$

onde  $S_{ik}$  representa a contribuição não-newtoniana do tensor extra tensão. Substituindo a equação (2.4) nas equações (2.1) e (2.2) obtemos:

$$S_{ik} + \lambda_1 \overset{\nabla}{S}_{ik} = 2\mu_0 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) d_{ik}, \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_0 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i. \quad (2.6)$$

Considerando escoamentos bidimensionais cartesianos e denotando  $L$ ,  $U$  e  $\nu_0$  valores de referência para comprimento, velocidade e viscosidade, introduzimos a adimensionalização

$$u = U\bar{u}, \quad v = U\bar{v}, \quad x = L\bar{x}, \quad z = L\bar{z}, \quad t = \frac{L}{U}\bar{t}, \quad p = \rho U^2 \bar{p}, \quad \nu = \nu_0 \bar{\nu}, \quad S_{ik} = \frac{(\mu_0 U)}{L} \bar{S}_{ik}, \quad \mathbf{g} = g\bar{\mathbf{g}}.$$

Deste modo, as equações (2.5), (2.6) e (2.3) produzem as seguintes equações adimensionais (as barras foram abandonadas por conveniência).  $S^{xx}$ ,  $S^{yy}$  e  $S^{xy}$  são as componentes do tensor  $\mathbf{S}$ ,  $u$  e  $v$  componentes do vetor velocidade  $\mathbf{u}$ .

$$S^{xx} + We \left( \frac{\partial S^{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial S^{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial S^{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} S^{xx} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} S^{xy} \right) = 2 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.7)$$

$$S^{yy} + We \left( \frac{\partial S^{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial S^{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial S^{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} S^{xy} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} S^{yy} \right) = 2 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.8)$$

$$S^{xy} + We \left( \frac{\partial S^{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial S^{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial S^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} S^{xx} - \frac{\partial u}{\partial y} S^{yy} \right) = \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial S^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S^{xy}}{\partial y}\right) + \frac{1}{Fr^2} g_x, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial S^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S^{yy}}{\partial y}\right) + \frac{1}{Fr^2} g_y, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.12)$$

onde  $Re = UL/\nu_0$ ,  $We = \lambda_1(U/L)$  e  $Fr = \sqrt{Lg}/U$  denotam os números de Reynolds, Weissenberg e Froude [9], respectivamente.

### 3. Condições de Contorno

Para resolver as equações (2.7)–(2.12) é necessário impor condições de contorno para as componentes de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{S}$ .

### 3.1. Cálculo da Tensão na Fronteira Rígida

Para a equação de quantidade de movimento (2.10) e (2.11) é suficiente tomarmos  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Para as equações dos tensores extra tensão podemos dizer que as fronteiras rígidas são características e as tensões  $S^{xx}$ ,  $S^{yy}$  e  $S^{xy}$  sobre a fronteira são calculadas a partir das equações (2.7)–(2.9) (as quais supomos serem válidas na fronteira rígida) com a condição inicial  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ .

Introduzindo a seguinte mudança de variável  $\mathbf{S} = e^{-\frac{1}{W_e}t} \tilde{\mathbf{S}}$  nas equações (2.7)–(2.9), obtemos:

$$\left( \frac{\partial \tilde{S}^{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{S}^{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{S}^{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \tilde{S}^{xx} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \tilde{S}^{xy} \right) = \frac{2}{W_e} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) e^{\frac{1}{W_e}t} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{S}^{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{S}^{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{S}^{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \tilde{S}^{xy} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \tilde{S}^{yy} \right) = \frac{2}{W_e} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) e^{\frac{1}{W_e}t} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.2)$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{S}^{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{S}^{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{S}^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \tilde{S}^{xx} - \frac{\partial u}{\partial y} \tilde{S}^{yy} \right) = \frac{1}{W_e} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) e^{\frac{1}{W_e}t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3.3)$$

Para o cálculo do tensor na fronteira rígida paralela ao eixo- $x$  impomos  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  nas equações (3.1)–(3.3). Após algum tratamento algébrico podemos mostrar que as componentes do tensor extra-tensão  $\mathbf{S}$  na fronteira rígida, são dados por:

$$\begin{aligned} S^{yy}(t + \delta t) &= 0, \\ S^{xy}(t + \delta t) &= e^{-\frac{1}{W_e}\delta t} S^{xy}(t) + \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{W_e}\delta t} \right], \\ S^{xx}(t + \delta t) &= e^{-\frac{1}{W_e}\delta t} S^{xx}(t) + \delta t \left[ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) e^{-\frac{1}{W_e}\delta t} S^{xy}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t + \delta t) S^{xy}(t + \delta t) \right]. \end{aligned}$$

Analogamente, fazemos o mesmo processo para as equações da fronteira rígida paralela ao eixo- $y$ .

### 3.2. Fronteiras de Entrada e Saída

No plano de entrada do fluido, isto é no “inflow”, impomos as componentes da velocidade como:

$$u_n = U \quad e \quad u_t = 0,$$

enquanto que para as componentes  $\mathbf{S}$  do tensor extra tensão adotamos a estratégia de Crochet [3] e Mompean [8], isto é,

$$S^{xx} = 0, \quad S^{xy} = 0 \quad e \quad S^{yy} = 0.$$

Na saída de fluido, isto é, no “outflow”, impomos a condição homogênea de Newmann para as componentes da velocidade e para as componentes do tensor extra tensão  $\mathbf{S}$  (ver Mompean [8] e Phillips [10]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial n} &= 0, & \frac{\partial u_t}{\partial n} &= 0, \\ \frac{\partial S^{xx}}{\partial n} &= \frac{\partial S^{xy}}{\partial n} = \frac{\partial S^{yy}}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nas equações (3.4) os subscritos  $n$  e  $t$  denotam as direções normal e tangencial na fronteira, respectivamente.

## 4. Método de Solução

Para resolver as equações de quantidade de movimento e as equações das componentes do tensor extra tensão empregamos o seguinte procedimento. Suponhamos que em um dado tempo, digamos  $t_n$ , o campo de velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$  e o tensor extra tensão  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t_n)$  sejam conhecidos; os valores de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{S}$  na fronteira são fornecidos. Para calcular o campo de velocidade, o tensor extra tensão e a pressão no tempo atualizado  $t_{n+1} = t_n + \delta t$ , onde  $\delta t$  é o tamanho do passo no tempo, procedemos como segue:

**Passo 1:** Calcular o campo de velocidade intermediário,  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ , de

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial S^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S^{xy}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_x \right]_{t_n}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial S^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S^{yy}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_y \right]_{t_n}, \quad (4.2)$$

com  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ , usando-se as condições corretas de fronteira para  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ . Nas equações (4.1) e (4.2) consideramos  $\tilde{p}(\mathbf{x}, t_n) = 0$

**Passo 2:** Conhecido  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ , resolver a equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n+1}). \quad (4.3)$$

Sujeita à seguinte condição de fronteira (mais detalhes são encontrados em [12]):

$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\partial n} = 0$  na fronteira rígida, onde  $n$  é a direção normal ao contorno rígido.

**Passo 3:** Calcular o campo de velocidade final dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \nabla \psi(\mathbf{x}, t_{n+1}). \quad (4.4)$$

**Passo 4:** Calcular o campo de pressão.

$$p(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{p}(\mathbf{x}, t_n) + \frac{\psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\delta t}. \quad (4.5)$$

**Passo 5:** Atualizar as componentes não-newtonianas do tensor extra-tensão na fronteira rígida de acordo com as condições dadas na seção 3.1.

**Passo 6:** Calcular as componentes do tensor extra tensão,  $S^{xx}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ ,  $S^{xy}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ ,  $S^{yy}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ , (aqui empregamos a forma conservativa para os termos convectivos das equações (2.7)–(2.9)):

$$\frac{\partial S^{xx}}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial u S^{xx}}{\partial x} - \frac{\partial v S^{xx}}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} S^{xx} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} S^{xy} + \frac{1}{We} \left[ 2 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - S^{xx} \right] \right]_{t_n}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial S^{yy}}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial u S^{yy}}{\partial x} - \frac{\partial v S^{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} S^{xy} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} S^{yy} + \frac{1}{We} \left[ 2 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\partial v}{\partial y} - S^{yy} \right] \right]_{t_n}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial S^{xy}}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial u S^{xy}}{\partial x} - \frac{\partial v S^{xy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} S^{xx} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} S^{yy} + \frac{1}{We} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - S^{xy} \right] \right]_{t_n}. \quad (4.8)$$

## 5. Discretização das Equações Governantes

As equações (4.1)–(4.8) serão resolvidas aplicando a técnica de diferenças finitas. Uma malha diferenciada bidimensional com espaçamentos  $\delta x$ ,  $\delta y$  é utilizada. Uma célula computacional é mostrada na figura 1.

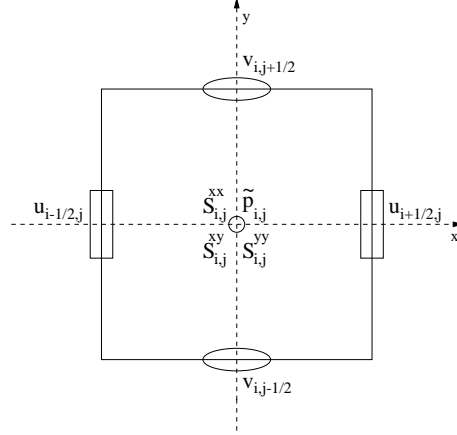


Figura 1: Célula Computacional.

As componentes  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  da velocidade são discretizadas nos pontos  $(i + 1/2, j)$ ,  $(i, j + 1/2)$ , respectivamente; e as componentes  $S^{xx}$ ,  $S^{yy}$  and  $S^{xy}$  do tensor extra tensão são aplicados no centro da célula  $(i, j)$  (ver Figura 1). Estas equações são aproximadas por diferenças finitas como segue: as derivadas temporais são discretizadas pelo método de Euler explícito enquanto que os termos viscosos, o gradiente de pressão e as derivadas espaciais das componentes do tensor extra tensão são aproximados por diferenças centrais. Para os termos convectivos utilizamos o esquema “upwind” de alta ordem, VONOS (Variable-Order-Non-Oscillatory-Scheme), cujos detalhes podem ser encontrados em [4].

## 6. Resultados Numéricos

As equações discretizadas por diferenças finitas foram implementadas no código GENSMAC (Generalized-Simplified-Marker-and-Cell) [12] para simular escoamentos viscoelásticos do tipo Oldroyd-B.

Consideramos o escoamento de um fluido através de um canal de largura  $D$  que sofre um estrangulamento e passa a escoar em um canal de largura  $D_1 = D/4$  (este problema é conhecido como contração planar 4:1). A Figura 2 apresenta o domínio do escoamento para nosso problema, no qual podemos observar que existe uma simetria. Devido a este fato, na Figura 3, apresentamos os resultados das simulações apenas na metade inferior do domínio.

O problema da contração é muito citado na literatura [14], [11], [8], [10], e tem sido intensivamente estudado tanto experimentalmente quanto numericamente.

Neste problema podemos observar o aparecimento de vórtices no canto inferior e superior ao estrangulamento, e definimos o comprimento do vórtice como  $L_{vort} = \frac{X}{D/2}$ .

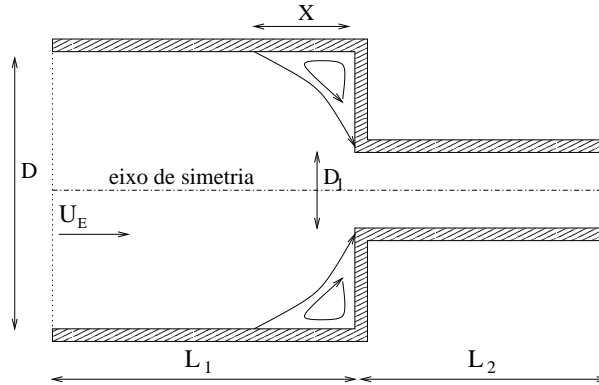


Figura 2: Domínio do escoamento.

Para simular este problema os seguintes dados de entrada foram empregados: o comprimento das cavidades  $L_1 = 0.015\text{m}$  e  $L_2 = 0.015\text{m}$  e as larguras das cavidades dadas por  $D = 0.08\text{m}$  e  $D_1 = 0.02\text{m}$ . A velocidade na entrada é  $U_E = 0.25\text{ ms}^{-1}$ .

Na Figura 3 observamos o comportamento do escoamento viscoelástico de um fluido Oldroyd-B através de uma contração 4:1 após atingir o estado estacionário.

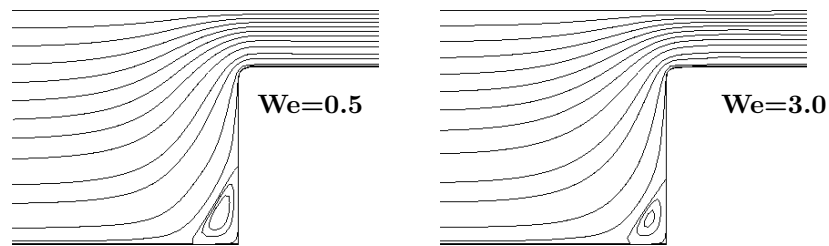


Figura 3: Linhas de corrente para o problema da contração planar 4:1 do escoamento de um fluido Oldroyd-B com  $Re=1.0$  e  $We=0.5$  e  $3.0$ .

Para mostrarmos que a técnica apresentada nesse trabalho simula escoamentos viscoelásticos de um fluido Oldroyd-B para o problema da contração 4:1, apresentamos a seguir os resultados de simulações numéricas para dois tipos de escoamentos: escoamentos inerciais com  $Re = 1.0$  e escoamentos a baixos números de Reynolds (“creeping flows”) onde  $Re = 0.0001$ . Para os dois problemas usamos diferentes valores de Weissenberg e a mesma razão  $\lambda_1/\lambda_2 = 1/9$ . Para o primeiro caso usamos uma malha de espaçamento  $\delta x = \delta y = 0.00025\text{ mm}$ , com  $(242 \times 82)$  células). No segundo caso, foi considerada uma malha onde  $\delta x = \delta y = 0.0005\text{ mm}$ , com  $(122 \times 42)$  células).

Podemos observar na figura 3 que o comprimento do vórtice decresce com o aumento do número de Weissenberg. Este fato pode ser analisado pela tabela 1 que mostra esta relação entre o comprimento de vórtice e o número de Weissenberg. Na figura 4 comparamos os resultados obtidos com os resultados de outros trabalhos. Podemos observar que existe uma certa variação entre os resultados obtidos pelos diversos autores. Os resultados deste trabalho estão em melhor concordância com os resultados obtidos por Phillips [10].

We	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$L_{vort}$	1.153	1.121	1.092	1.043	1.005	0.971	0.968

Tabela 1: Relação entre o comprimento de vórtice e o número de Weissenberg para  $Re = 1.0$

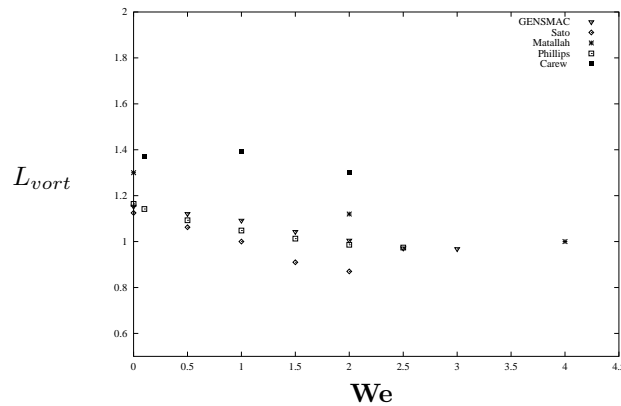


Figura 4: Comprimento do vórtice para  $Re=1$ .

Na tabela 2 apresentamos os resultados das simulações de escoamentos a baixos números de Reynolds (“creeping flows”). Na figura 5 comparamos estes resultados com resultados de importantes trabalhos da literatura. Observamos que existe também uma certa variação entre os resultados obtidos pelos diversos autores. Notamos que grande parte dos outros trabalhos o valor limitante para Weissenberg foi 4, isto é, não foi possível a convergência para  $We > 4.0$ , enquanto que conseguimos obter convergência ao simular com  $We = 7.0$ . Os resultados deste trabalho estão em melhor concordância com os resultados obtidos por Phillips [10] e Matallah [7].

We	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$L_{vort}$	1.429	1.453	1.449	1.452	1.437	1.435
We	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	7.0
$L_{vort}$	1.4349	1.4404	1.4353	1.4343	1.4348	1.4319

Tabela 2: Relação entre o comprimento de vórtice e o número de Weissenberg para  $Re = 0.0001$



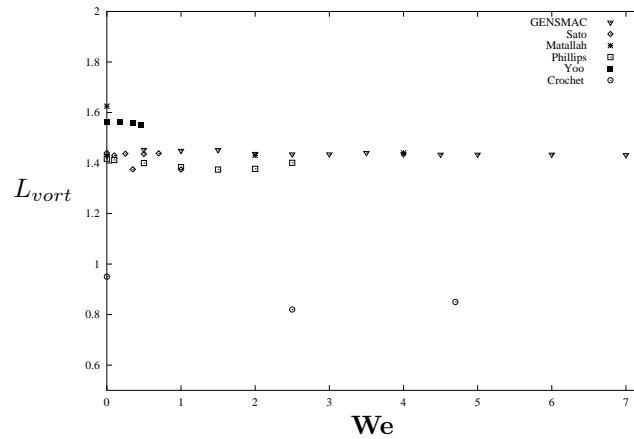


Figura 5: Comprimento do vórtice para  $Re = 0.0001$ .

## 7. Conclusão

Neste trabalho, descrevemos uma nova técnica numérica que nos permite analisar escoamentos viscoelásticos de fluidos Oldroyd-B. Apresentamos os resultados numéricos obtidos para escoamentos inerciais e para escoamentos a baixos números de Reynolds (“creeping flows”). Comparamos nossos resultados com os existentes na literatura tais como [2], [7], [10], [11], [14] e [3].

Pelas figuras 4 e 5 podemos observar que os resultados obtidos estão, qualitativamente, próximos aos demais e, quantitativamente, em concordância com aqueles obtidos por [10] e [7]. Embora aqui tenha sido apenas tratado o problema da contração que é um escoamento confinado, esta técnica também tem sido aplicada a problemas com superfícies livres com bons resultados [13].

Futuramente, pretendemos aplicar esta técnica para estudar o aparecimento dos “lip vortex” e estendê-la ao tratamento de escoamentos viscoelásticos de fluidos Oldroyd-B com simetria axial.

**Abstract.** The aim of this work is the development of a numerical method capable of simulating the 4:1 planar contraction of the viscoelastic flow of an Oldroyd-B fluid. Numerical calculations of the flow of viscoelastic fluids through an abrupt contraction are prone to large errors in the evaluation of the stress and velocity fields near the re-entrant corner. We introduce a numerical technique using finite differences that has allowed us to calculate Oldroyd-B fluids at considerably high values of the Weissenberg number in planar contraction problems.

## Referências

- [1] E. Brasseur, M.M. Fyrillas, G.C. Georgiou e M.J. Crochet, The time-dependent extrudate-swell problem of an Oldroyd-B fluid with slip along the wall, *J. Rheol.*, **42**, No. 3 (1998), 549-566.

- [2] E.O.A. Carew, P. Townsed, and M.F. Webster, A Taylor-Petrov-Galerkin algorithm for viscoelastic flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **50** (1993), 253-287.
- [3] M.J. Crochet, A.R. Davis and K. Walters, "Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow", Elsevier, New York, 1984.
- [4] V.G. Ferreira, M.F. Tomé, N. Mangiavacchi, A.F. Castelo, J.A. Cuminato, A.O. Fortuna and S. Mckee, High order upwinding and the hydraulic jump, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, to appear.
- [5] X. Huang, N. Phan-Thien e R.I. Tanner, Viscoelastic flow between eccentric rotating cylinders: Unstructured control volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **64** (1996), 71-92.
- [6] J.M. Marchal, and M.J. Crochet, A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **26** (1987), 77-114.
- [7] H. Matallah, P. Townsend and M. F. Webster, Recovery and stress-splitting schemes for viscoelastic flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **75** (1998), 139-166.
- [8] G. Mompean, E M. Deville, Unsteady finite volume of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **72** (1997), 253-279.
- [9] R.L. Panton, "Incompressible Flow", John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [10] T.N. Phillips and A.J. Williams, Viscoelastic flow though a planar contraction using a semi-Lagrangian finite volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **87** (1999), 215-246.
- [11] T. Sato and S.M. Richardson, Explicit numerical simulation of time-dependent viscoelastic flows problems by a finite element/finite volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **51** (1994), 249-275.
- [12] M.F. Tome e S. McKee, GENSMAC: A Computational Marker-and-Cell Method for Free Surface Flows in General Domains, *J. of Computational Physics*, **110** (1994), 171-186.
- [13] M.F. Tome, N. Mangiavacchi, J.A. Cuminato, A. Castelo e S. McKee, A Marker-and-Cell technique for simulating unsteady viscoelastic free surface flows, *Notas do ICMC*, **63** (2001).
- [14] J.Y. Yoo, and Y. Na, A numerical study of the planar contraction flow of a viscoelastic fluid using the SIMPLER algorithm, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **30** (1991), 89-106.