Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **3**, No. 1 (2002), 165-171.

Soluções Superluminais de Energia Finita das Equações de Maxwell

E.C. de OLIVEIRA[1], Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, 13083-970 Campinas, SP, Brasil.

W.A. RODRIGUES Jr.[2], Department of Mathematics, University of Liverpool, Liverpool L69 3BX, UK.

Resumo Obtém-se soluções (exatas) superluminais de energia finita para as equações de Maxwell e discute-se o significado físico de tais soluções.

1. Introdução

Recentemente alguns trabalhos [6, 17] apareceram na literatura mostrando que em algum meio hipotético existe a possibilidade da existência de pulsos eletromagnéticos superluminais (soluções das equações de Maxwell) tal que suas *frentes* viajam no meio com velocidades *superluminais*. As soluções descobertas em [6, 17], apesar de seu interesse teórico têm energia *infinita* e como tal não podem ser produzidas no mundo físico. Somente aproximações de abertura finita para estas ondas podem eventualmente ser produzidas (supondo a existência do tal meio especial). O objetivo deste trabalho é mostrar que em contraste com as soluções descobertas em [6, 17] (que, como já afirmado têm energia infinita), existem soluções das equações de Maxwell no vácuo que são *soluções* (*exatas*) *superluminais de energia finita*. Estas soluções, como veremos, aparecem como soluções de problemas tipo Sommerfeld [1, 9]. Estudamos também o aparente paradoxo que ocorre quando uma solução superluminal gerada em um sistema inercial L é observada pelos observadores em repouso em um sistema inercial Z que se move com velocidade $|\vec{V}| = V$ em relação a L. Discutimos também se tais soluções podem ser geradas no mundo físico.

2. Pulso Escalar Superluminal

Começa-se lembrando como escrever configurações do campo eletromagnético em termos dos potenciais de Hertz [15, 11]. Suponha-se que temos um potencial de

[1] capelas@ime.unicamp.br
[2] W.Rodrigues@liverpool.ac.uk. Em afastamento do Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, 13083-970 Campinas, SP.

Hertz, $\vec{\Pi}_m$, de tipo magnético.[3] Então, o campo eletromagnético associado é dado por

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{\Pi}_m), \qquad \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_m.$$

Toma-se $\vec{\Pi}_m = \Phi \hat{e}_z$. Logo, desde que o potencial de Hertz (no vácuo) satisfaz a equação de onda homogênea, tem-se que

$$\square \Phi = 0. \tag{2.1}$$

O problema de *Sommerfeld* (não deve ser confundido com o problema de *Cauchy*) a ser considerado aqui é o seguinte: Em um dado sistema de referência (laboratório[4]) procuramos por uma solução $\Phi_X : (t, \vec{x}) \mapsto C$ (onde C é o corpo dos números complexos) para a equação 2.1 satisfazendo as seguintes condições de contorno[5] no plano $z = 0$,

$$\begin{cases} \Phi_X(t,\rho,0) = \mathbf{T}(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega B(\omega) J_0(\omega\rho \operatorname{sen}\eta) e^{-i\omega t}, \\ \left.\frac{\partial \Phi_X(t,\rho,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = i\mathbf{T}(t)\cos\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega B(\omega) J_0(\omega\rho \operatorname{sen}\eta) k(\omega) e^{-i\omega t}, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\mathbf{T}(t) = [\Theta(t+T) - \Theta(t-T)]$, Θ é a função de Heaviside, $k(\omega) = \omega$, e η é uma constante chamada ângulo de axicon [12, 2, 5, 13, 3, 8] e $B(k)$ é uma distribuição de freqüências apropriada. Como mostrado em [2] a solução da equação 2.1 (para $z > 0, t > T$) que satisfaz as condições de Sommerfeld é

$$\Phi_X(t,\rho,z) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega B(\omega) J_0(\omega\rho \operatorname{sen}\eta) e^{-i\omega(t - z\cos\eta)} & \text{para} \quad |t - z\cos\eta| < T \\ 0 & \text{para} \quad |t - z\cos\eta| > T. \end{cases} \tag{2.3}$$

Chamamos Φ_X de um pulso escalar X superluminal. Agora, como é bem conhecido, a densidade de energia para uma configuração do campo complexo, como Φ_X, é

$$u = (\partial_t \Phi_X)(\partial_t \Phi_X^*) + (\partial_x \Phi_X)(\partial_x \Phi_X^*) + (\partial_y \Phi_X)(\partial_y \Phi_X^*) + (\partial_z \Phi_X)(\partial_z \Phi_X^*),$$

e a energia da configuração do campo pode ser calculada pela integral de volume de u num hiperplano de tempo constante, digamos $t = T' > T$. O cálculo se torna mais simples se efetuado em coordenadas *cilíndricas*. Lembrando que da equação 2.3 segue-se que o suporte do pulso em $t = T'$ é $\triangle z = 2T/\cos\eta$, temos

[3] No que se segue usam-se unidades tais que a velocidade da luz seja $c = 1$.
[4] O laboratório é modelado por um campo vetorial tipo tempo $\partial/\partial t$.
[5] A necessidade destas condições de contorno é provada em [12].

$$\mathcal{E} = \frac{8\pi T}{\operatorname{sen}^2\eta\cos\eta}\int_{-\infty}^{\infty}|B(k)|^2\,kdk, \tag{2.4}$$

onde os termos de energia cinética e potencial têm contribuições iguais. A equação 2.4 fornece energia *finita* para o pulso escalar X para uma infinidade de funções distribuições de freqüência $B(k)$, tais que $|B(k)|^2$ seja nulo para $k < 0$. Um exemplo trivial é $B(k) = [\Theta(k) - \Theta(k - k_0)]$, com k_0 uma constante.

3. Caso Eletromagnético

Agora, estuda-se o caso eletromagnético. As componentes não nulas do campo eletromagnético[6] correspondendo a um potencial de Hertz magnético $\vec{\Pi}_m = \Phi_X \hat{e}_z$ é (para $z > 0$, $t > T$)

$$\begin{cases} E_\theta = i\operatorname{sen}\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty} dkB(k)k^2J_1(k\rho\operatorname{sen}\eta)e^{-ik(t-z\cos\eta)}, & \\ B_\rho = \frac{-i}{2}\operatorname{sen}2\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty} dkB(k)k^2J_1(k\rho\operatorname{sen}\eta)e^{-ik(t-z\cos\eta)}, & \text{para } |t - z\cos\eta| < T, \\ B_z = \operatorname{sen}^2\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty} dkB(k)k^2J_0(k\rho\operatorname{sen}\eta)e^{-ik(t-z\cos\eta)}, & \\ E_\theta = B_\rho = B_z = 0, & \text{para } |t - z\cos\eta| > T. \end{cases}$$

Agora, usando a densidade de energia padrão do campo elétrico [15, 11], a energia do pulso eletromagnético X superluminal resulta em,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_X &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\int_0^{\infty}\left[E_\theta E_\theta^* + B_\rho B_\rho^* + B_z B_z^*\right]\rho d\rho dz d\theta \\ &= \frac{4\pi T}{\cos\eta}\int_{-\infty}^{\infty}|B(k)|^2\,k^3dk. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A equação 3.1 fornece energia finita para soluções superluminais das equações de Maxwell satisfazendo as condições de contorno de Sommerfeld (aqui expressas através das condições para o potencial de Hertz associado) para uma infinidade de possíveis distribuições de freqüências $B(k)$, como no caso escalar.

4. Conclusões

Temos quatro comentários a fazer antes de terminar este trabalho, a saber:

---

[6] Chamado de um pulso eletromagnético X superluminal [12, 2].

(i) Qual é a nossa solução de energia finita (para a equação de onda escalar) como vista por um observador num sistema de Lorentz $Z \in \sec TM$,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(\partial_t + V\partial_z),$$

que está em movimento com velocidade $V = \cos\eta$ relativa ao laboratório (o sistema $L = \partial_t \in \sec TM$)?

Como pode ser verificado facilmente a solução transformada é:

$$\Phi'_X(t',\rho,z') = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega B(\omega) J_0(\omega\rho \operatorname{sen}\eta) e^{-i\omega \operatorname{sen}\eta t'}, & \text{para} \quad |t'| < T/\operatorname{sen}\eta, \\ 0, & \text{para} \quad |t'| > T/\operatorname{sen}\eta. \end{cases} \tag{4.1}$$

A solução é independente da coordenada espacial z e corresponde a uma onda estacionária ocupando "espaço de repouso" do sistema Z e que existe somente para o intervalo de tempo $\triangle t' = 2T/\operatorname{sen}\eta$. É este um resultado não físico? Se não, qual é o significado de tal onda para os observadores do sistema Z? Com um diagrama de Minkowski pode-se mostrar que a onda é estacionária por um período finito de tempo e depois desaparece, de acordo com a ordenação do tempo do sistema Z, porque ela está indo o para *passado* dos observadores Z. Isto deve ser um fenômeno normal se a teoria da relatividade é verdadeira, e movimentos superluminais genuínos existem. Os observadores no sistema Z computarão uma energia infinita para aquela onda, mas desde que eles *conheçam* a teoria da relatividade eles interpretarão o fenômeno como segue: a onda estacionária existente, por um período finito de tempo, em nosso sistema de referência é uma onda superluminal de energia finita produzida no laboratório (o sistema L) que se move com velocidade $-1/\cos\eta$ relativamente ao nosso sistema (i.e., o sistema Z). Naturalmente, os físicos do sistema Z não podem produzir tal onda em seu sistema, devido a duas razões. A primeira razão é que a onda, de acordo com eles, tem energia infinita e a segunda razão, que é também a crucial é que o dispositivo que a produz está em repouso em um outro sistema (o sistema L). De acordo com o Princípio de Relatividade os físicos do sistema Z podem reproduzir em seus sistemas o dispositivo usado no sistema L e lançar uma onda como aquela dada pela equação 2.3 (com condições de contorno do tipo da equação 2.2) com (t,ρ,z) substituídos por (t',ρ,z'). Naturalmente, se isso fosse possível chegaríamos a situações paradoxais bem conhecidas[7], que fortunadamente não necessitam ser discutidos aqui (veja (iii) abaixo).

Note também que os matemáticos que habitam o sistema Z concientes da interpretação de seus colegas físicos podem obter diretamente a solução dada pela equação 4.1, resolvendo um problema de valor no contorno *misto*, onde as condições de contorno são:

$$\Phi'_X(t',\rho,z')|_{z'=-\cos\eta t'} = \mathbf{T}(t',T,\eta)\,\Omega(\rho,\eta,\omega,t')$$

[7]Mais detalhes são encontrados em [8].

e

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial z'} - \gamma V\frac{\partial}{\partial t'}\right)\Phi'_X(t',\rho,z')|_{z'=-\cos\eta t'} = i\cos\eta\mathbf{T}(t',T,\eta)\,\Omega(\rho,\eta,\omega,t'),$$

onde introduzimos a notação $\mathbf{T}(t',T,\eta) = [\Theta(\operatorname{sen}\eta t' + T) - \Theta(\operatorname{sen}\eta t' - T)]$ e

$$\Omega(\rho,\eta,\omega,t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega B(\omega) J_0(\omega\,\rho\operatorname{sen}\eta) e^{-i\omega\operatorname{sen}\eta t'}.$$

(ii) Naturalmente, uma análise análoga vale para as soluções superluminais de energia finita das equações de Maxwell que encontramos. Observamos aqui que a existência das soluções superluminais encontradas, não estão em conflito com o famoso resultado do problema de Cauchy concernente às equações de Maxwell. Aquele resultado afirma: "qualquer configuração do campo eletromagnético com suporte compacto em $t = 0$, digamos para $|\vec{x}| \leq R$ é tal que o campo é nulo para $t > 0$ para todo $|\vec{x}| \geq R + t$".[8] De fato, as soluções encontradas como solução de nosso problema de Sommerfeld são tais que para qualquer $t > T$ a onda e suas derivadas normais não possuem suporte *compacto* em nenhuma hipersuperfície tipo espaço, $t = T'$, $T' > T$.

(iii) É possível construir um dispositivo físico de modo a lançar um pulso eletromagnético superluminal X com energia finita? Nossa resposta é *não*. Realmente, aproximações de abertura finita (AAF) para a produção experimental de soluções superluminais tipo X das equações de Maxwell (que, naturalmente têm energia finita) já foram obtidas [14, 10], como previstas em [13, 3, 8]. Entretanto, estas AAF são tais que seus picos movem-se [12] com velocidade $v > 1$ mas suas frentes sempre se movem com a velocidade da luz. Este resultado foi previsto em [8] e endossado por resultados experimentais de [10] como provado em [12]. Agora, no que concerne as soluções que encontramos, a tentativa de produzi-las (por uma antena) como ondas físicas reais implicaria na existência de uma antena que se estendesse em todo plano $z = 0$, durante o intervalo de tempo $-T < t < T$. Naturalmente, isto é fisicamente impossível pois não existem antenas de área infinita.

(iv) Além das soluções superluminais encontradas, existem também soluções *subluminais* de energia finita (que serão discutidas oportunamente). Ainda que as novas soluções superluminais não possam ser produzidas por dispositivos físicos, acreditamos que uma possível razão para a não existência *natural* destas 'partículas' de luz em nosso universo, é que se elas existissem implicariam imediatamente em uma violação do Princípio de Relatividade. Conjecturamos ainda que a existência destas novas soluções podem eventualmente também encontrar aplicações no entendimento de alguns problemas fundamentais concernentes ao fenômeno da não localidade em mecânica quântica [7], mas não discutiremos tais questões nesta breve nota.

Agradecimentos: Agradecemos os Drs. D.S. Thober and A.L. Xavier por várias discussões e ao Dr. I. Porteous por ter lido atentamente o manuscrito.

[8] Uma prova de um teorema análogo para a equação de onda homogênea pode ser encontrado em [16]. Para as equações de Maxwell veja [4].

Abstract: We exhibit exact finite energy superluminal solutions of Maxwell equations in vacuum and discuss the physical meaning of these solutions.

Referências

[1] L. Brillouin, "Wave Propagation and Group Velocity", Academic Press, New York, 1960.

[2] E. Capelas de Oliveira, W.A. Rodrigues Jr, D.S. Thober and A.L. Xavier, Thoughtful comments on 'Bessel beams and signal propagation', *Phys. Lett. A*, **284** (2001), 296-303.

[3] E. Capelas Oliveira and W.A. Rodrigues, Jr., Superluminal electromagnetic waves in free space, *Ann. der Physik*, **7** (1998), 654-659.

[4] R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", vol. 2, John Wiley and Sons, New York, 1966.

[5] J. Durnin, Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory, *J. Opt. Soc. Am. A*, **4** (1987), 651-654.

[6] P. Ghose and M.K. Samal, Lorentz invariant superluminal tunneling, *Phys. Rev. E*, **64** (2001), to appear.

[7] A.A. Grib and W.A. Rodrigues, Jr., "Nonlocality in Quantum Physics", Kluwer Acad./Plenum Publ., New York, 1999.

[8] J.E. Maiorino and W.A. Rodrigues, Jr., What is Superluminal Wave Motion?, electronic book at http://www.cptec.br/stm, *Sci. and Tech. Mag.*, **4**, No. 2 (1999).

[9] F.A. Mehmeti, "Transient Tunnel Effect and Sommerfeld Problem", Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[10] D. Mugnai, A. Ranfagni and R. Ruggeri, Observation of superluminal behaviors in wave propagation, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 4830-4833.

[11] W.K.H. Panofski and M. Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.

[12] W.A. Rodrigues Jr., D.S. Thober and A.L. Xavier, Jr., Causal explanation for observed superluminal behavior of microwave propagation in free space, *Phys. Lett. A*, **284** (2001), 217-224.

[13] W. A. Rodrigues, Jr. and J.Y. Lu, On the existence of undistorted progressive waves (UPWs) of arbitrary speeds $0 \leq v \leq \infty$ in nature, *Found. Phys.*, **27** (1997), 435-508.

[14] P. Saari and K. Reivelt, Evidence of X-shaped propagation-invariant localized light waves, *Phys. Rev. Lett.*, **21** (1997), 4135-4138.

[15] J.A. Stratton, "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill, New York, 1941.

[16] M.E. Taylor, "Pseudo Differential Operators", Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.

[17] X. Zhou, Possibility of a light pulse with speed greater than c, *Phys. Lett. A*, **278** (2001), 1-5.