

Solução Numérica para um Problema de Cauchy Fuzzy que Modela o Decaimento Radioativo

G.L. DINIZ¹, Departamento Matemática, ICET, UFMT, 78.060-900 Cuiabá, MT, Brasil

J.F.C.A. MEYER², L.C. BARROS³, Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, 13.083-970 Campinas, SP, Brasil.

Resumo. O uso de materiais radioativos no último século trouxe sérios riscos para o meio ambiente, principalmente, com relação aos depósitos de lixo radioativo. Neste artigo, propomos um modelo fuzzy para descrever o fenômeno de decaimento radioativo, usando equações diferenciais fuzzy, cuja solução analítica clássica é bem conhecida. Aplicamos métodos do tipo Euler e Runge-Kutta para obter uma solução aproximada de um problema de valor inicial da equação diferencial ordinária linear fuzzy, que modela o decaimento radioativo. Os resultados numéricos fuzzy obtidos são comparados com a solução analítica fuzzy apresentada por Barros et al [2] para uma equação diferencial fuzzy similar.

1. Introdução

Segundo Ma, Friedman e Kandel [10], Chang e Zadeh [4] foram os primeiros a introduzir o conceito de derivadas fuzzy. Mais tarde, Dubois e Prade [5] usaram o princípio de extensão e suas aproximações, para obter os primeiros resultados com o cálculo diferencial para função fuzzy. Puri e Ralescu [13] discutiram outros métodos onde propuseram duas definições, uma baseada na diferencial de Hukuhara de uma multifunção, limitada ao cone convexo, e outra para espaços de Banach (ver [10]).

Kandel e Byatt [8, 9] aplicaram o conceito de equações diferenciais fuzzy para problemas dinâmicos fuzzy, mas foram Kaleva, Nieto, Ouyang et al e Seikkala [6, 7, 11, 12, 14] quem deram um tratamento rigoroso ao problema de valor inicial fuzzy (problema fuzzy de Cauchy).

Wu, Song e Lee [15] obtiveram um teorema de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy para as equações diferenciais fuzzy: $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ para aplicações fuzzy de variável real, cujos conjuntos são normais, convexos e de suporte compacto em \mathbb{R}^n com a função f satisfazendo a condição generalizada de Lipchitz.

¹ dinizgl@densis.fee.unicamp.br

² joni@ime.unicamp.br

³ laecioeb@ime.unicamp.br

A solução analítica fuzzy do problema de Cauchy para equação diferencial fuzzy de modelos que descrevem a dinâmica populacional foi apresentada em Barros et al [2].

A resolução de equações diferenciais fuzzy, via aproximação numérica, também é recente e uma das poucas referências é Ma, Friedman e Kandel [10], onde é apresentado um algoritmo numérico para resolver uma equação diferencial ordinária fuzzy, com um esquema baseado no clássico método de Euler, seguido de uma análise de erro e ilustrado com alguns problemas de Cauchy (linear e não-linear).

2. Preliminares

Seja \mathcal{U} um conjunto (no sentido clássico). Um subconjunto fuzzy \mathcal{F} em \mathcal{U} é o conjunto $\mathcal{F} = \{(x, \mu(x))\}$, onde $\mu : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ é a função *grau de pertinência* de $x \in \mathcal{U}$ ao conjunto fuzzy \mathcal{F} . Assim, o subconjunto fuzzy \mathcal{F} é definido por sua função μ e, muitas vezes, indicado por $\mu_{\mathcal{F}}$. Esta função pode ser pensada como uma generalização da função característica de um conjunto clássico.

Considere $\mathcal{E} = \{\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}$, onde μ satisfaz:

- i. $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(x_0) = 1$;
- ii. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \mu(\delta x + (1 - \delta)y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \forall \delta \in [0, 1]$;
- iii. μ é semicontínua superiormente;
- iv. $\overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) > 0\}}$ é compacto.

Neste caso, costuma-se dizer que o conjunto fuzzy é um número fuzzy.

Se $\mu \in \mathcal{E}$, definimos o *nível* α de μ por:

$$[\mu]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) \geq \alpha\}, 0 < \alpha \leq 1.$$

Assim, temos que $[\mu]^\alpha$ é um intervalo fechado $[\mu_1^\alpha; \mu_2^\alpha]$ para todo α com

$$0 < \alpha \leq 1, \text{ e } [\mu]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) > 0\}}.$$

Temos, ainda, que se $\mu, \nu \in \mathcal{E}$, então $\mu = \nu \iff [\mu]^\alpha = [\nu]^\alpha, \forall \alpha \in (0, 1]$.

Teorema 1 (de Representação [6, 14]) *Seja $[\mu_1^\alpha, \mu_2^\alpha]$ uma família de intervalos não vazios, $0 < \alpha \leq 1$. Se*

- i. $[\mu_1^{\alpha_i}, \mu_2^{\alpha_i}] \subset [\mu_1^{\alpha_j}, \mu_2^{\alpha_j}]$ para $0 < \alpha_j \leq \alpha_i$, $i, j = 1, 2$ e
- ii. $[\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_1^{\alpha_k}; \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_2^{\alpha_k}] = [\mu_1^\gamma; \mu_2^\gamma]$ com $\alpha_k \uparrow \gamma$ e $\gamma \in (0, 1]$;

então, $\exists \mu \in \mathcal{E}$ com $[\mu]^\alpha = [\mu_1^\alpha, \mu_2^\alpha], \forall \alpha \in (0, 1]$ e $[\mu]^0 = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [\mu_1^\alpha; \mu_2^\alpha]}$.

Inversamente, se $\mu \in \mathcal{IE}$, então $[\mu]^\alpha$ satisfaz (i) e (ii).

Em virtude do Teorema de Representação podemos definir operações entre números fuzzy através de seus α -níveis.

Sejam μ e ν elementos de \mathcal{IE} , com $[\mu]^\alpha = [\mu_1^\alpha, \mu_2^\alpha]$ e $[\nu]^\alpha = [\nu_1^\alpha, \nu_2^\alpha]$, então:

(a) $\mu + \nu = [\mu + \nu]^\alpha \doteq [\mu_1^\alpha + \nu_1^\alpha; \mu_2^\alpha + \nu_2^\alpha]$; (*adição fuzzy*).

(b) $\mu \times \nu \doteq [\min\{\mu_i^\alpha; \nu_j^\alpha\}; \max\{\mu_i^\alpha; \nu_j^\alpha\}]$; $i, j = 1, 2$; (*multiplicação fuzzy*).

3. Descrição do Problema e o Modelo Matemático

O número de desintegrações por unidade de tempo mede a atividade radioativa de uma substância. Este fenômeno é devido à emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleos de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os primeiros experimentos que resultaram em tal compreensão foram realizados por Rutheford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século XIX e início do XX, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante.

O uso desse tipo de material deixa o público em geral em estado de alerta, e os benefícios que o uso de tais materiais pode trazer, somente podem ser avaliados se os seus perigos são dimensionados. O primeiro passo desse processo seria, talvez, o conhecimento das origens desses materiais.

A formulação matemática (ver Bassanezzi e Ferreira [3]) que modela o processo de decaimento radioativo, pode ser descrita da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (3.1)$$

onde $N = N(t)$ é o número de átomos radioativos presentes na amostra no instante t e $\lambda > 0$ é a constante de desintegração radioativa, que pode ser obtida experimentalmente.

O sinal negativo na equação (3.1) é porque o número de átomos radioativos diminui com o passar do tempo, com isso a taxa de variação instantânea dN/dt deve ser negativa. A constante de desintegração λ , característica de cada elemento radioativo, permite dizer se este elemento tem vida curta ou longa.

A solução analítica clássica da equação (3.1) é dada por:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (3.2)$$

sendo $N_0 = N(0)$ a quantidade inicial destes átomos.

Levando em conta que $N = (N_a/A)m$, onde A é o número de massa do elemento radioativo e N_a é o número de Avogadro, que vale $6,02 \times 10^{23} \text{ mol s}^{-1}$, daí a razão N_a/A é constante para cada elemento.

Assim, em termos da massa do material radioativo, a lei de atividade pode ser expressa por:

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}. \quad (3.3)$$

Este é o tratamento clássico para o problema, no entanto, apesar da simplicidade da equação a dificuldade maior está na contagem, para a obtenção dos parâmetros identificados no modelo. Os dados coletados, bem como o método adotado, quase sempre estão carregados de imprecisão e elementos de incerteza causados tanto pelo próprio processo de medição, como por algum tipo de subjetividade na adoção do método.

Desta forma, com o intuito de dar um tratamento matemático às questões que apresentam incertezas, o uso de sistemas fuzzy pode ser visto como uma ferramenta indispensável para a análise e compreensão do fenômeno em estudo. Para isto, adotaremos o processo “fuzzyness” como em Barros et al [1] e Kaleva [6].

Para uma primeira aproximação, considerando a condição inicial como um conjunto fuzzy, adotaremos a seguinte equação diferencial ordinária fuzzy:

$$u'(t) = -\lambda u(t), \quad u(0) = u_0 \in \mathcal{IE}, \quad (3.4)$$

onde $u'(t)$ é a derivada de Hukuhara, $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{IE}$, e $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$, ou seja,

$$[u]^\alpha = [[u_1]^\alpha; [u_2]^\alpha].$$

A existência e unicidade da solução de (3.4), para T intervalo fechado de \mathbb{R}_+ , é apresentada em Barros et al, Kaleva e Nieto [1, 6] e [11].

Em virtude do Teorema de representação e levando em conta as operações definidas por (a) e (b), o problema de Cauchy fuzzy: $u'(t) = -\lambda u(t)$, $u(0) = u_0$, é equivalente à família de sistemas bidimensionais clássicos:

$$\begin{cases} [u_1'(t)]^\alpha = -\lambda [u_2(t)]^\alpha, & [u_1(0)]^\alpha = [u_{1_0}]^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1, \\ [u_2'(t)]^\alpha = -\lambda [u_1(t)]^\alpha, & [u_2(0)]^\alpha = [u_{2_0}]^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $[u_1(t)]^\alpha$ e $[u_2(t)]^\alpha$ são os α -níveis da solução em cada instante t , $[u_{1_0}]^\alpha$ e $[u_{2_0}]^\alpha$ são os α -níveis de u_0 .

Para cada α , a solução analítica do sistema descrito por (3.5), conforme Barros et al [2], é dada por:

$$\begin{cases} [u_1(t)]^\alpha = \frac{[u_{1_0}]^\alpha - [u_{2_0}]^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{[u_{1_0}]^\alpha + [u_{2_0}]^\alpha}{2} e^{-\lambda t}, \\ [u_2(t)]^\alpha = \frac{[u_{2_0}]^\alpha - [u_{1_0}]^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{[u_{2_0}]^\alpha + [u_{1_0}]^\alpha}{2} e^{-\lambda t}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Novamente, de acordo com o Teorema de representação, essas soluções são os α -níveis da solução fuzzy $u(t)$.

Para o sistema dado por (3.6) definimos, em cada instante t , o diâmetro do intervalo $[[u_1(t)]^\alpha; [u_2(t)]^\alpha]$, para os α -níveis $0 < \alpha \leq 1$, da seguinte forma:

$$diam[[u_1(t)]^\alpha; [u_2(t)]^\alpha] = [u_2(t)]^\alpha - [u_1(t)]^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t \in [0, T]. \quad (3.7)$$

Com isso, podemos notar que os diâmetros, em cada α -nível, são crescentes com o tempo. Isto pode ser interpretado como o aumento da incerteza com o passar do tempo, o que é bem razoável, de fato.

4. Método Numérico

Para a obtenção das aproximações numéricas das soluções de cada equação dada no sistema (3.5), faremos uma discretização do intervalo $[0, T]$, para um T prefixado, através de um conjunto $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$; em seguida, construímos o esquema numérico para as aproximações seguindo o método de Euler, como sugerido em Ma, Friedman e Kandel [10], que se baseia nas aproximações de primeira ordem para $[u'_1]^\alpha$ e $[u'_2]^\alpha$ dadas pelas diferenças avançadas:

$$[z'(t_i)]^\alpha \approx \frac{[z(t_i + h)]^\alpha - [z(t_i)]^\alpha}{h}. \quad (4.1)$$

Daí, chamando $z_i = z(t_i)$, com $t_i = t_0 + ih$ para $1 \leq i \leq n$ e $h = (T - t_0)/n$ e usando (4.1) em (3.5), teremos:

$$\begin{cases} [u_{1_{i+1}}]^\alpha = [u_{1_i}]^\alpha - h\lambda [u_{2_i}]^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1, \\ [u_{2_{i+1}}]^\alpha = [u_{2_i}]^\alpha - h\lambda [u_{1_i}]^\alpha & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Os códigos numéricos para as aproximações foram desenvolvidos através do MATLAB, onde incluímos os resultados numéricos para o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (para comparação), que estão apresentados através de gráficos, para melhor visualização. Nas figuras, apresentamos a solução numérica fuzzy (Euler(+)) e Runge-Kutta(*) e a solução analítica fuzzy descrita por (3.6).

5. Resultados

Para as simulações onde aplicamos o modelo, consideramos como condição inicial, para todos os materiais radioativos, uma massa “em torno de 100g”, descrita pelo seguinte conjunto fuzzy:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x - 90}{10}, & \text{se } 90 \leq x < 100, \\ \frac{110 - x}{10}, & \text{se } 100 \leq x \leq 110, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

O gráfico da figura 1, abaixo, é o conjunto fuzzy dado pela equação (5.1), onde os pontos marcados representam os α -níveis utilizados para iniciar as aproximações para os métodos numéricos.

Para a constante de desintegração λ , característica de cada elemento radioativo, utilizamos os valores apresentados em Bassanezi e Ferreira [3], para os seguintes elementos:

- Chumbo (Pb^{210}): $\lambda = 0,315 \times 10^{-1}$ ano $^{-1}$;
- Rádio (Ra^{226}): $\lambda = 0,440 \times 10^{-3}$ ano $^{-1}$.

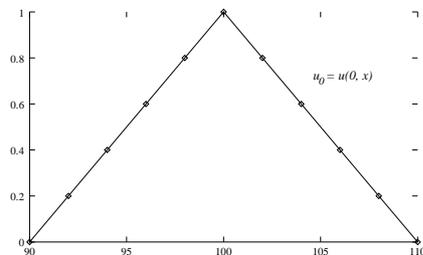


Figura 1: Condição inicial dada pela equação (5.1)

O intervalo de tempo considerado foi de zero a cento e vinte anos, com 60 iterações, ou seja, $h = 2,0$ para (Pb^{210}). A seguir, apresentamos os gráficos das soluções analíticas e numéricas para o elemento Pb^{210} nas figuras 2 e 3.

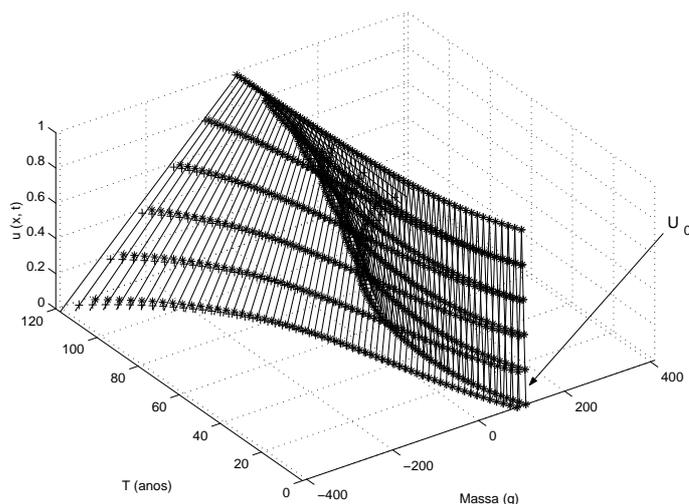


Figura 2: Gráfico do decaimento de Pb^{210} , u_0 dado por (5.1) e $h = 2,0$.

Na figura abaixo, apresentamos o resultado obtido na última iteração, ou seja, em $t = 120$ anos (figura 3-a). Para o cálculo do erro que aparece na figura 3-b, chamando de “ u ” a solução analítica, de “ v ” a solução numérica obtida pelo método de Euler e de “ y ” a obtida por Runge-Kutta de 4ª ordem, definimos o erro da seguinte forma:

$$\text{Erro}_{\text{Euler}} = \text{norm}(u - v);$$

$$\text{Erro}_{\text{Runge-Kutta}} = \text{norm}(u - y);$$

onde $(u - v)$ e $(u - y)$ são calculados ponto-a-ponto, em cada instante t , e “norm” é a norma euclidiana, dada por:

$$\text{norm}(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}.$$

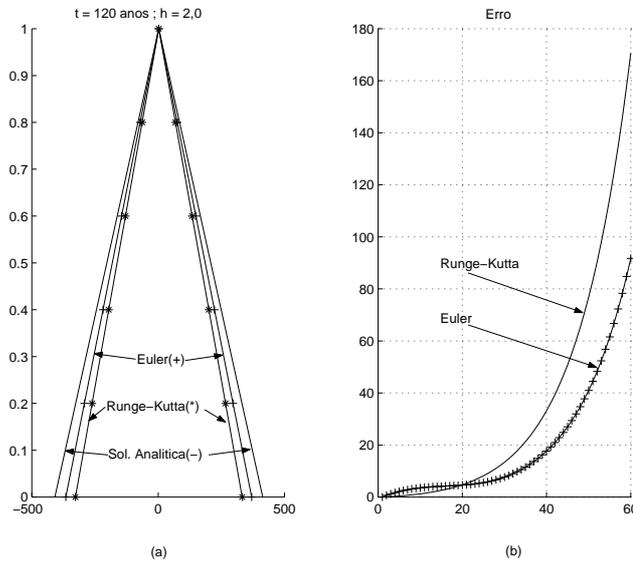


Figura 3: Comparação de resultados para Pb^{210} , u_0 dado por (5.1) e $h = 2,0$.

Para Ra^{226} obtivemos resultados mais satisfatórios, no sentido de melhor aproximação entre a solução analítica e as numéricas. Na figura 4, a seguir, utilizamos 100 iterações e $h = 30,0$.

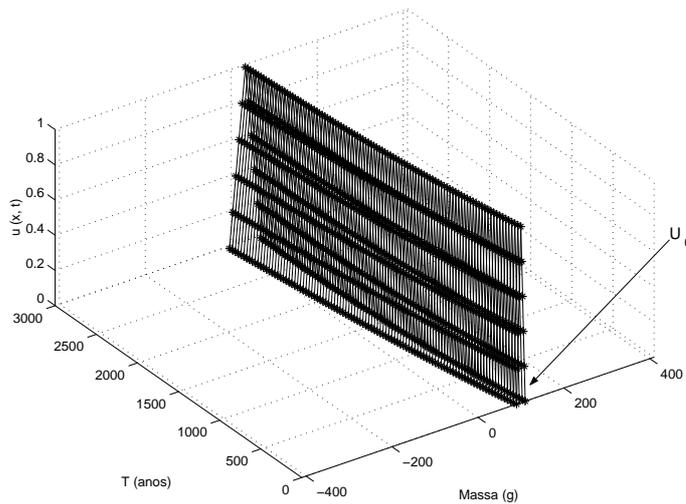


Figura 4: Gráfico do decaimento de Ra^{226} , u_0 dado por (5.1) e $h = 30,0$.

Os resultados apresentados nas figuras 5-a e 5-b, a seguir, mostram a boa apro-

ximação obtida pelos dois métodos, cujos gráficos estão sobrepostos para o instante final $t = 3000$ anos, onde a solução analítica se justapõe às dadas por Euler(+) e Runge-Kutta (*).

O erro apresentado na figura 5-b foi calculado da mesma forma, indicada anteriormente para a figura 3-b.

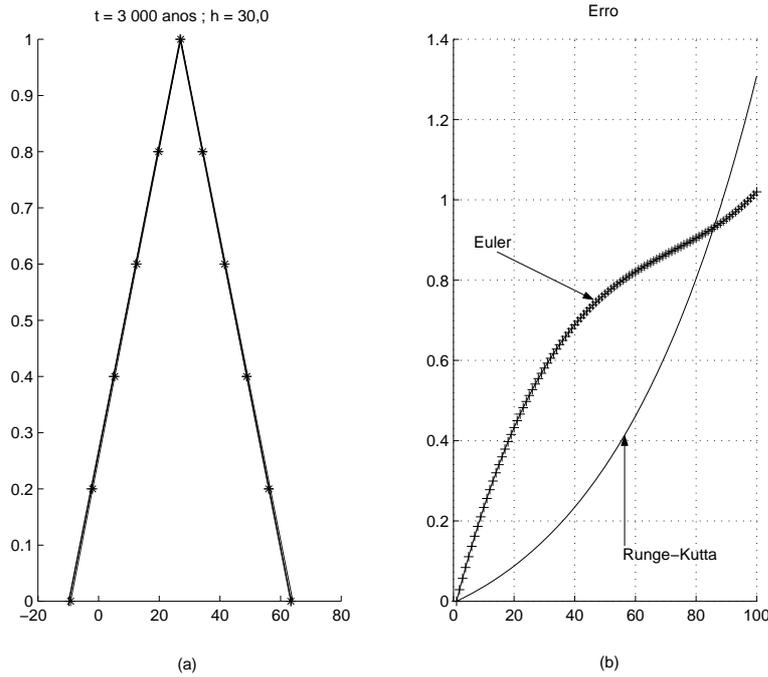


Figura 5: Comparação de resultados para Ra^{226} , u_0 dado por (5.1), $h = 30,0$.

6. Conclusões

O método produziu aproximações bem mais satisfatórias entre a solução numérica fuzzy e a solução analítica fuzzy para Ra^{226} (figuras 4 e 5) do que para Pb^{210} (figuras 2 e 3), no sentido que, graficamente, estas soluções ficam cada vez mais diferentes. Mais precisamente, verificamos que a diferença entre os diâmetros dos intervalos da solução analítica fuzzy para as soluções numéricas fuzzy, em cada α -nível, foi um pouco menor ao longo do tempo em Ra^{226} comparado a Pb^{210} .

Apesar disso, foram compatíveis com a solução analítica fuzzy, uma vez que os diâmetros dos intervalos, para cada α -nível, são crescentes com o tempo. Isto se explica pelo fato que, com o passar do tempo, aumenta a impossibilidade de afirmar precisamente o valor da emissão de radiação em cada instante. Este fato é, tecnicamente falando, uma consequência do conceito de taxa de variação fuzzy. Esta leva em conta as incertezas passadas e presentes para prever o futuro, já que

$u'(t) = f(t, u(t))$ e f é uma função fuzzy. O que, conforme mencionado antes, pode ser interpretado como aumento da incerteza com o passar do tempo.

A precisão do método numérico empregado (tipo Euler) é da ordem de h , para cada iteração. Mesmo assim, ele apresentou-se como um método confiável de aproximação da solução para escalas de tempo grande, como no caso do decaimento radioativo.

Para o α -nível 1 ($\alpha = 1$), houve maior similaridade entre os resultados numéricos fuzzy e a solução analítica fuzzy. Porém, neste caso a solução fuzzy coincide com a solução determinística, apresentada no tratamento clássico do problema, dado pela equação (3.3), como provado em Barros et al [1].

Cabe observar, que para cada t fixo a solução $u(t)$ mantém a forma inicial, ou seja, tipo triangular, o que geralmente não acontece para outros tipos de condição inicial para equações diferenciais fuzzy, como a considerada em (3.4).

Em futuros trabalhos, poderemos considerar o parâmetro λ como um conjunto fuzzy (tipo triangular) de modo a melhorar o modelo, uma vez que o valor de λ apresenta alguma incerteza também.

Abstract. The use of radioactive materials in the last century brought serious risk to the environment, mainly with reference to radioactive dumps. In this work, we have proposed a fuzzy model to describe the radioactive decay using fuzzy differential equations, the classic analytical solution of which is well known. We use the Euler and Runge-Kutta methods to obtain an approximate solution of an initial value problem of a fuzzy linear ordinary differential equation modelling radioactive decay. We compare the numerical results with the fuzzy analytical solution presented by Barros et al [2] for the similar fuzzy differential equation.

Referências

- [1] L.C. Barros, R.C. Bassanezi e P.A. Tonelli, Remarks on deterministic orbits in fuzzy dynamical systems, em “Seventh IFSA World Congress”, Vol. II, pp. 22-26, Prague, 1997.
- [2] L.C. Barros, R.C. Bassanezi e P.A. Tonelli, Fuzzy modelling in population dynamics, *Ecological Modelling* **128** (2000), 27-33.
- [3] R.C. Bassanezi e W.C. Ferreira Jr., “Equações Diferenciais com Aplicações”, Ed. Harbra, São Paulo, 1978.
- [4] S.L. Chang e L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and Control, *IEEE Trans. Systems Man Cybernetics* **2** (1972), 30-34.
- [5] D. Dubois e H. Prade, Towards fuzzy differential calculus: Part 3, differentiation, *Fuzzy Sets and System* **8** (1982), 225-233.
- [6] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* **24** (1987), 301-317.

- [7] O. Kaleva, The Cauchy problem for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* **35** (1990), 389-396.
- [8] A. Kandel e W.J. Byatt, Fuzzy differential equations, em “Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society”, pp. 1213-1216, Tóquio, 1981.
- [9] A. Kandel e W.J. Byatt, Fuzzy process, *Fuzzy Sets and Systems* **4** (1980), 117-152.
- [10] M. Ma, M. Friedmam e A. Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* **105** (1999), 133-138.
- [11] J.J. Nieto, The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* **102** (1999), 259-262.
- [12] H. Ouyang e Y. Wu, On fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* **32** (1989), 321-325.
- [13] M.L. Puri e D.A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.* **91** (1983), 552-558.
- [14] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems* **24** (1987), 319-330.
- [15] C. Wu, S. Song e E.S. Lee, Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **202** (1996), 629-644.