Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **2** (2001), 135-143.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Precificação de Opções Européias de Ações com Dividendos e Volatilidade Estocástica

O. MÈNDEZ[1], S. STUMPF[2], Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, UNIJUÍ, Cx.P. 560, 98700-000 Ijuí, RS, Brasil.

Resumo. O problema da precificação de opções européias foi resolvido pela fórmula de Black e Scholes (Black, Scholes [1]). Para a derivação do modelo, supõe-se (além de outras coisas), que o preço da ação subjacente tem volatilidade constante e segue um movimento Browniano. Claramente a suposição de volatilidade constante, não é realista: no mundo real, a volatilidade constitui ela mesma uma variável de estado que deve ser considerada separadamente. Por causa dessa simplificação, os preços obtidos utilizando a fórmula de Black e Scholes apresentam vieses em relação aos valores reais das opções observados no mercado. A fórmula de Black-Scholes, então, não é válida sob essa suposição, e existem vários trabalhos onde a volatilidade é considerada numa forma mais geral. Entre eles, vamos mencionar o artigo de Hull e White (Hull, White [4]), onde analisa-se um modelo para o preço de uma opção de compra européia no caso de que a volatilidade do preço da ação subjacente é aleatória e independente do mesmo. Em nosso trabalho generalizamos o estudo de Hull e White em várias direções. Primeiramente, consideramos o efeito de dividendos no preço da call européia, obtendo uma expressão aproximada do mesmo. Utilizando a fórmula correspondente à paridade put-call no caso de opções de ações com dividendos obtivemos também uma expressão para o preço de uma put (européia) de ações com dividendos. Fizemos diversas simulações numéricas para estudar a variação dos preços com os diferentes parâmetros envolvidos e para comparar os valores obtidos com aqueles dados pela fórmula de Black-Scholes.

1. Introdução

A Matemática Financeira vem sendo uma das áreas em desenvolvimento mais rápido nas corporações bancárias e mundiais. Isto traz intrínseco um ímpeto crescente para o aprimoramento de modelos e métodos matemáticos.

É nesta área em expansão significativa que abordaremos o tema da precificação de opções européias de ações com dividendos e volatilidade estocástica.

Entendemos uma opção como um direito de comprar ou vender um subjacente (no nosso caso é a ação) numa data futura (data de expiração) por um determinado preço.

[1] mendez@main.unijui.tche.br
[2] sstumpf@globo.com

De especial importância são as opções de ações, ou seja, geralmente um contrato para comprar ou vender 100 ações de uma certa empresa.

Os principais participantes desses mercados podem ser identificados como:

· Hedgers - são aqueles que enfrentam o risco associado ao preço e que usam o mercado de opções para reduzi-lo ou eliminá-lo e com isso asseguram o preço da ação. Então, o preço a ser pago ou recebido está assegurado. Contudo, não há certeza de que o resultado com o hedging será melhor do que sem ele;

· Especuladores - desejam apostar nas oscilações futuras de preço de uma ação. Um investidor que acredita que uma ação vai subir pode comprar alguma quantia naquela companhia. Se ele estiver correto, ganha dinheiro, caso contrário, perde;

· Arbitradores - estão no negócio para se aproveitar da discrepância entre os preços em mercados diferentes. Pretendem obter um lucro sem risco, realizando transações simultâneas em mercados diferentes. Podemos dizer que a simples existência de arbitradores significa que, na prática, não haverá oportunidades de arbitragem porque quando eles comprarem a ação num determinado mercado, as forças de oferta e procura farão seu preço subir; do mesmo modo, quando eles venderem a ação num mercado diferente, seu preço cairá. Os dois preços, então, irão rapidamente tornar-se equivalentes à taxa de câmbio corrente.

No mercado de opções, existem basicamente dois tipos: as opções de compra (calls) e as opções de venda (put) que respectivamente, como o próprio nome sugere, oportunizam o direito de compra ou venda de um subjacente.

O preço de uma opção de ações pode ser afetado por algumas variáveis, tais como: preço atual da ação, preço de exercício, data de vencimento, taxa de juro livre de risco, volatilidade do preço da ação e dividendos esperados durante a vida da opção.

O primeiro e mais direto fator que influencia o prêmio de uma opção é o seu preço atual (que representaremos pela letra S).

O preço de exercício da opção (que representaremos pela letra X) refere-se ao valor futuro pelo qual o bem será negociado.

Outro fator que afeta o preço da opção é a data do vencimento, ou seja, o dia em que a posição será exercida. Aqui, precisamos diferenciar dois tipos de opções: as americanas e as européias. Aquelas podem ser exercidas a qualquer momento, até o vencimento. Estas podem ser exercidas somente na data de expiração. Representaremos o tempo de expiração pela letra T.

A taxa de juro livre de risco (r) igualmente afeta o preço da ação de forma que quando crescem as taxas de juro, os preços da ação tendem a cair, o que eleva o preço das opções de venda e diminui os preços das opções de compra.

A medida da incerteza quanto às oscilações futuras no preço da opção de ações é a definição de volatilidade (σ). Em termos estatísticos, é o desvio padrão do preço da ação fornecido em um ano. Os seus valores típicos estão no intervalo de 0,2 a 0,4 ao ano.

Um sexto e último fator que influencia no preço de uma opção são os seus dividendos (D_0). A palavra dividendo deve ser interpretada, no contexto da precificação de opções, como a redução no preço da ação na data ex-dividendo (quando seu preço cai a um valor que reflete o dividendo pago por ação), causada pelo próprio dividendo. Em outras palavras, dizemos que dividendo é o pagamento efetuado ao possuidor da ação pela companhia emissora de parte do lucro da empresa.

2. Um Modelo de Precificação para Ações com Dividendos

Já vimos que os dividendos são pagamentos efetuados a acionistas dos lucros obtidos pela companhia. Somente o acionista recebe dividendos, o detentor da opção não recebe. Companhias individuais geralmente fazem dois ou quatro pagamentos ao ano.

Vamos considerar uma estrutura simples de pagamento. Suponha que em um tempo dt a ação subjacente paga um dividendo D_0Sdt onde D_0 é uma constante. O dividendo produzido é definido conforme a proporção do preço da ação pago por unidade de tempo.

Primeiramente, consideramos o efeito dos pagamentos de dividendos no preço da ação. Considerações de arbitragem mostram que em cada espaço de tempo dt, o preço da ação deve cair pela quantia de pagamento de dividendos, D_0dt ; além disso existem as oscilações costumeiras. Então, o preço de uma ação é um processo estocástico, visto que tem uma variável aleatória dependente do tempo e segue a equação diferencial, conforme apresentado no livro de Wilmott e Dewynne ([7] p. 91):

$$dS = (\phi - D_0)Sdt + \sigma Sd\widetilde{z}, \tag{2.1}$$

que é a representação matemática de um modelo simples de precificação.

Podemos ver que ao preço de uma ação associamos um retorno esperado (ϕ) acompanhado da redução no preço da ação (D_0) e uma volatilidade (σ), ambos considerados constantes para este simples modelo.

Já $\widetilde{z}(t)$ representa um movimento Browniano (ou Processo de Wiener) com as seguintes propriedades:

1. $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ então $z(t_i) - \widetilde{z}(t_{i-1})$ e $\widetilde{z}(t_{i-1}) - \widetilde{z}(t_{i-2})$ são independentes para $i = 1, 2, ..., n$.

2. Se $0 < s < t$ então $Z(t) - \widetilde{Z}(s)$ é uma variável aleatória com distribuição normal, média zero e variância t - s.

2.1. Precificação de Opções Européias de Ações com o Uso do Modelo de Black-Scholes

O estudo da precificação de opções de ações teve uma importante contribuição de Fischer Black e Myron Scholes [1].

Black e Scholes (B-S) partiram das seguintes hipóteses:

1. O preço da ação segue o modelo lognormal, isto é, o que fundamenta é o movimento aleatório (mudanças proporcionais no preço num curto período de tempo são normalmente distribuídas). Ainda podemos dizer que neste modelo, a

volatilidade e o retorno esperado são constantes, ao passo que as variáveis só podem ser positivas.

2. A taxa de juro livre de risco e a volatilidade da ação são funções conhecidas do tempo ao longo da vida da opção.

3. Não existem custos de transação associados as carteiras (portfolios).

4. A ação não receberá nenhum dividendo durante a vida da opção. (Esta suposição pode ser derrubada se os dividendos forem conhecidos anteriormente).

5. Não há possibilidades de arbitragem, ou seja, travar um lucro sem risco, realizando transações simultâneas em mercados diferentes.

6. A negociação com títulos é contínua.

Embasados nessas premissas, podemos afirmar que o elemento chave das teorias de Black e Scholes que conduzem as suas fórmulas de precificação é que na ausência de oportunidades de arbitragem o retorno da carteira em qualquer período curto de tempo deve ser a taxa de juro livre de risco.

Com isso, podemos apresentar o que B-S propuseram para opções européias de ações com dividendos, considerando D_0 constante.

A partir da aceitação do fato de que o preço da ação segue a equação (2.1) mostrada anteriormente, B-S demonstraram utilizando considerações de arbitragem que o preço da opção de compra européia, supondo que temos uma opção cujo valor é $C(S,t)$, satisfaz a Equação Diferencial, apresentada em Wilmott e Dewynne ([7] p. 92):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - D_0) S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \tag{2.2}$$

Com as condições de fronteira:

$$C(S,t) = \max(S - X, 0),$$

$$C(0,t) = 0,$$

$$C(S,t) \approx S e^{-D_0(T-t)} \text{ quando } S \to \infty.$$

Vamos agora apresentar a solução analítica da opção de compra européia com dividendos quando a taxa de juros e a volatilidade são constantes.

Neste caso, para uma opção de compra, temos:

$$C = e^{-D_0(T-t)} S N(d_{10}) - X e^{-r(T-t)} N(d_{20}), \tag{2.3}$$

onde N é dado por

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \tag{2.4}$$

e

$$d_{10} = \frac{\log\left(\frac{S}{X}\right) + (r - D_0 + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{2.5}$$

$$d_{20} = \frac{\log\left(\frac{S}{X}\right) + (r - D_0 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_{10} - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{2.6}$$

Para encontrarmos a solução duma opção de venda usamos a relação

$$C + D_0 + Xe^{-r(T-t)} = P + S, \tag{2.7}$$

chamada paridade entre opções put e call.

Estas opções podem ser combinadas de tal modo a apresentarem correlações entre si de modo que podemos determinar que o preço duma opção de venda é:

$$P = C + D_0 + Xe^{-r(T-t)} - S. \tag{2.8}$$

Vale ressaltar que se considerarmos $D_0 = 0$, ou seja, referirmo-nos a opções de ações que não pagam dividendos, caímos no modelo clássico de Black e Scholes.

3. Opções Européias de Ações com Dividendos e Volatilidade Estocástica

Vimos que o problema da precificação de opções européias foi resolvido pela fórmula de Black e Scholes (Black, Scholes [1]). Neste modelo, supõe-se que o preço da ação subjacente tem volatilidade constante e segue um movimento Browniano.

Porém, a suposição de volatilidade constante não é verdadeira. No mundo real, a volatilidade constitui ela mesma uma variável de estado que deve ser considerada separadamente.

Em nosso trabalho consideraremos o efeito dos dividendos no preço da call européia, obtendo uma expressão aproximada do mesmo para o caso da volatilidade estocástica. Obteremos também, utilizando a fórmula correspondente à paridade put-call, uma expressão para o preço duma put européia.

3.1. Um Modelo para a Volatilidade Estocástica

Seja $dS = (\phi - D_0)Sdt + \sigma Sd\tilde{z}$, onde $V = \sigma^2$ (V = volatilidade) obedece o seguinte processo estocástico:

$$dV = \mu V dt + \xi V dz, \tag{3.1}$$

onde μ refere-se ao valor médio esperado da volatilidade e ξ a variância da volatilidade. O z é um movimento Browniano.

Hull e White partiram das seguintes hipóteses:

1. μ e ξ não dependem de S;
2. co-variância $(dz, d\tilde{z}) = 0$.

3.2. Obtenção das Fórmulas de Precificação de Opções Européias

Supondo $dV = \mu V dt + \xi V dz$ e um argumento de arbitragem (semelhante àquele de Black-Scholes) demonstra que o preço duma call européia satisfaz a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + 2\rho\sigma^3\xi S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \xi^2 V^2\right] - rC = rS\frac{\partial C}{\partial S} - \mu\sigma^2\frac{\partial C}{\partial V},$$

com condições de fronteira semelhantes as de Black-Scholes.

Resolver explicitamente esta equação é muito mais difícil que resolver a equação de Black-Scholes com volatilidade constante. Por isso, propomos uma aproximação (desenvolvimento em série) para a solução, baseados no artigo de Hull e White [4].

Para obtermos as fórmulas que nos propomos seguimos o raciocínio abaixo exposto.

A solução está dada pela integral:

$$C(S_t, \sigma_t^2) = \int C(\overline{V}) h(\overline{V})/\sigma_t^2) d\overline{V},$$

onde $C(\overline{V})$ corresponde ao preço de uma call européia do modelo de Black-Scholes:

Não parece ser possível obter uma forma analítica para a distribuição de $\overline{V}$. É, portanto, possível calcular todos os momentos de $\overline{V}$ quando μ e ξ são constantes.

Quando $\mu \neq 0$:

$$E(\overline{V}) = \frac{e^{\mu(T-t)} - 1}{\mu(T-t)} V_0,$$

$$E(\overline{V}^2) = \left[\frac{2e^{2\mu+\xi^2)(T-t)}}{(\mu+\xi^2)(2\mu+\xi^2)(T-t)^2} + \frac{2}{\mu(T-t)^2}\left(\frac{1}{2\mu+\xi^2} - \frac{e^{\mu(T-t)}}{\mu+\xi^2}\right)\right] V_0^2.$$

E, quando $\mu = 0$:

$$E(\overline{V}) = V_0,$$

$$E(\overline{V}^2) = \frac{2(e^{\xi^2(T-t)} - \xi^2((T-t)-1)}{\xi^4(T-t)^2} V_0^2,$$

$$E(\overline{V}^3) = \frac{e^{3\xi^2(T-t)} - 9e^{\xi^{2(T-t)}} + 6\xi^2(T-t) + 8}{3\xi^6(T-t)^3} V_0^3.$$

Expandindo $C(\overline{V})$ em uma série de Taylor, temos

$$C(S_t, \sigma_t^2) = C(\overline{\overline{V}}) + \frac{\partial C}{\partial \overline{V}} E(\overline{\overline{V}} - \overline{V}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \overline{V}^2}(\overline{\overline{V}}) E(\overline{\overline{V}} - \overline{V})^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C}{\partial \overline{V}^3}(\overline{\overline{V}}) E(\overline{\overline{V}} - \overline{V})^3 + \ldots$$

Considerando:

$$\overline{\overline{V}} = V_0 = \sigma_0^2$$
$$k = \xi^2(T-t)$$

podemos encontrar as fórmulas desejadas.

1^o) Quando $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}
&C = C(\sigma^2) \\
&+\tfrac{1}{2}\tfrac{e^{-D_0(T-t)}S\sqrt{T-t}N\prime(d_{10})(d_{10}d_{20}-1)}{4\sigma^3} \times \left[\tfrac{2\sigma^4(e^k-k-1)}{k^2} - \sigma^4\right] \\
&+\tfrac{1}{6}\tfrac{e^{-D_0(T-t)}S\sqrt{T-t}N\prime(d_{10})\left[(d_{10}d_{20}-3)(d_{10}d_{20}-1)-(d_{10}^2+d_{20}^2)\right]}{8\sigma^5} \\
&\times\sigma^6\left[\tfrac{e^{3k}-(9+18k)e^k+(8+24k+18k^2+6k^3)}{3k^3}\right] + ...
\end{aligned}$$

2^o) Quando $\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&C = C(\sigma^2) + \tfrac{1}{2}\tfrac{e^{-D_0(T-t)}S\sqrt{T-t}N\prime(d_{10})(d_{10}d_{20}-1)}{4\sigma^3}\times \\
&\left\{\sigma^4 - \tfrac{2\sigma^4(e^{\mu(T-t)}-1)}{\mu(T-t)} + \left[\tfrac{2e^{(2\mu+\xi^2)(T-t)}}{(\mu+\xi^2)(2\mu+\xi^2)(T-t)^2} + \tfrac{2}{\mu T^2}\left(\tfrac{1}{2\mu+\xi^2} - \tfrac{e^{\mu(T-t)}}{\mu+\xi^2}\right)\right]\sigma^4\right\}.
\end{aligned}$$

A partir da paridade put-call, obtivemos as fórmulas correspondentes para a put:

$$P = C + D_0 + Xe^{-r(T-t)} - S.$$

1^o) Quando $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}
&P = C(\sigma^2) \\
&+\tfrac{1}{2}\tfrac{e^{-D_0(T-t)}S\sqrt{T-t}N\prime(d_{10})(d_{10}d_{20}-1)}{4\sigma^3} \times \left[\tfrac{2\sigma^4(e^k-k-1)}{k^2} - \sigma^4\right] \\
&+\tfrac{1}{6}\tfrac{e^{-D_0(T-t)}S\sqrt{T-t}N\prime(d_{10})\left[(d_{10}d_{20}-3)(d_{10}d_{20}-1)-(d_{10}^2+d_{20}^2)\right]}{8\sigma^5} \\
&\times\sigma^6\left[\tfrac{e^{3k}-(9+18k)e^k+(8+24k+18k^2+6k^3)}{3k^3}\right] \\
&+D_0 + Xe^{-r(T-t)} - S.
\end{aligned}$$

2^o) Quando $\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&P = C(\sigma^2) + \tfrac{1}{2}\tfrac{e^{-D_0(T-t)}S\sqrt{T-t}N\prime(d_{10})(d_{10}d_{20}-1)}{4\sigma^3}\times \\
&\left\{\sigma^4 - \tfrac{2\sigma^4(e^{\mu(T-t)}-1)}{\mu(T-t)} + \left[\tfrac{2e^{(2\mu+\xi^2)(T-t)}}{(\mu+\xi^2)(2\mu+\xi^2)(T-t)^2} + \tfrac{2}{\mu T^2}\left(\tfrac{1}{2\mu+\xi^2} - \tfrac{e^{\mu(T-t)}}{\mu+\xi^2}\right)\right]\sigma^4\right\} \\
&+D_0 + Xe^{-r(T-t)} - S.
\end{aligned}$$

4. Resultados

1. O mercado de opções é indicado para investidores com diferentes objetivos: para quem deseja correr riscos em busca de uma rentabilidade maior e não vai precisar do dinheiro de imediato, para aqueles que usam o mercado de opções para reduzir ou eliminar o risco associado ao preço da ação e também para aqueles que desejam apostar nas oscilações futuras do preço de uma ação.

2. O modelo de Black-Scholes resolve o problema de uma opção européia de ações que apresenta um problema de fronteira com condições de contorno considerando a volatilidade constante.

3. Os preços obtidos utilizando a fórmula de Black-Scholes apresentam vieses em relação aos valores reais das opções observados no mercado. Isso pode ser observado no gráfico que obtivemos.

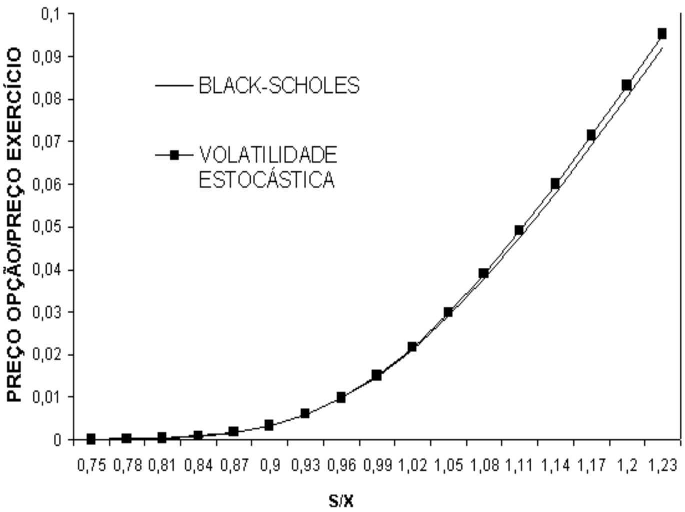

Figura 1: Preço da Opção Européia de Ações call com dividendos quando $\mu = 0, r = 0.02, \sigma = 0.15, \xi = 1, D_0 = 0.2, T - t = 0.5(180 dias)$. Fonte: Hull e White [4].

Deste gráfico podemos dizer que o preço de Black-Scholes é semelhante ao preço obtido com volatilidade estocástica se S é menor que X ou S=X. Se S é maior que X, Black-Scholes é menor do que o preço obtido pela fórmula com volatilidade estocática.

4. Utilizando o modelo para volatilidade estocástica e embasados no artigo de Hull-White [4], obtivemos expressões aproximadas para a precificação de opções européias de ações com dividendos e volatilidade estocástica.

5. A comparação dos dados reais com os teóricos é bastante difícil na prática, já que é muito difícil observar a correlação entre os preços das opções de ações e os dividendos pagos ao possuidor. Contudo, como observamos, os preços obtidos pela

fórmula clássica de Black-Scholes apresentam vieses que são parcialmente corrigidos pela intodução da volatilidade estocástica.

6. Variando um parâmetro e considerando todos os demais constantes, pode-se verificar o que acontece tanto com os preços de uma opção call como da put.

Abstract. The problem of pricing European options was solved by the Black and Scholes formula (Black, Scholes [1]). It is supposed (besides other things), for the derivation of the model, that the price of the underlying asset has constant volatility and it follows a Brownian movement. Clearly the supposition of constant volatility, is not realistic: in the real world, the volatility is a state variable that should be considered separately. In consequence of that simplification, the prices obtained using the Black and Scholes formula present inclinations in relation to the real values of the options observed in the market. Then, The Black-Scholes formula is not valid under that supposition, and there are several works where the volatility is considered in a more general form. Among them, we will mention the article of Hull and White (Hull, White [4]), where a model for the price of an European option purchase is analyzed in the case that the volatility of the underlying asset price is aleatory and independent of the asset price. In our work we generalized the study of Hull and White in several directions. Firstly, we considered the effect of dividends in the price of the European call, obtaining an approximate expression of that price. Using the formula corresponding to the parity put-call in the case of options of assets with dividends also obtained an expression for the price of a put (European) of assets with dividends. We made several numeric simulations to study the variation of the prices with different involved parameters and to compare the values obtained with those data by the Black-Scholes formula.

Referências

[1] F. Black e M.S. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81** (1973), 637-659.

[2] S.L. Heston, A closed form solution for options with stochastic volatility, *Review of Financial Studies* **6** (1993), 327-343.

[3] J. Hull e A. White, An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility, *Advences in Futures and Options Research* **3** (1988), 29-61.

[4] J. Hull e A. White, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *The Journal of Finance* **XLII**, No. 2, (1987).

[5] R.A. Kuske e J.B. Keller, Optimal exercise boundary for an american put Option. *Applied Mathematical Finance* **5** (1988), 107-116.

[6] R.C. Merton, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* **4** (Spring 1973), 141-83.

[7] P. Wilmott e S.H.J. Dewynne, "The Mathematics of Financial Derivatives", Cambridge Editors, 1995.