Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **2** (2001), 185-192.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Problema do Controle Ótimo de Pragas para o Modelo Presa - Predador na Presença de Patógenos[1]

M. RAFIKOV[2], A.P. WYSE[3], Departamento de Física, Estatística e Matemática, UNIJUI - Universidade Regional do Noroeste do RS, Rua São Francisco 501, Cx.P. 560, 98700-000, Ijui, RS, Brasil.

Resumo. Neste trabalho foi considerado um problemas do controle ótimo de um sistema presa-predador com retardamento e sua aplicação ao controle biológico de pragas da lavoura. Para resolver o problema do controle ótimo para este sistema foi aplicada uma metodologia que transforma uma equação diferencial com retardamento em um sistema de equações diferenciais sem retardamento. O problema foi resolvido através da aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin.

1. Introdução

Este trabalho tem dois objetivos principais. Por um lado, foi tratado um modelo populacional com retardamento a fim de considerar a possibilidade da sua aplicação na modelagem matemática e computacional do controle de pragas. Por outro lado, foi proposto o algoritmo de otimização do controle de pragas com base no modelo com retardamento.

Conforme May [4] , no mundo real o crescimento populacional em muitos casos não responde imediatamente às mudanças da sua própria população ou de populações de seus inimigos naturais. Esta resposta acontece com um retardamento. Por exemplo, a contaminação de uma espécie de uma população de pragas pela doença acontece através do contato com uma espécie infectada ou com produtos da sua atividade. Neste caso, deve passar algum tempo τ até a praga revelar a presença da doença. Este período chama-se período de incubação da doença. Matematicamente este processo pode ser descrito através da equação diferencial com retardamento (delay time equation ou differental - difference equation [2]).

Se os modelos matemáticos do sistema presa - inimigo natural contêm equações com retardamento, a formulação e resolução dos problemas do controle ótimo de pragas torna-se mais difícil. Neste caso a dinâmica do sistema no instante t depende da pré-história do processo no intervalo $[-\tau, t]$. Isto impossibilita a aplicação da Programação Dinâmica [1] para a resolução do problema de controle ótimo. Neste artigo o problema do controle ótimo de pragas foi resolvido através do Princípio do Máximo de Pontryagin [5] .

[1] Os autores agradecem à CAPES e FAPERGS pelo apoio
[2] rafikov@main.unijui.tche.br
[3] anapaula@detec.unijui.tche.br

2. Modelo Matemático

Consideremos a interação entre pragas e predadores na presença de patógenos que causam diminuição da população de pragas. Esta interação é descrita pelo modelo

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) - bx^2 - \gamma x(t)x(t-\tau) - \delta x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -dy(t) + \beta x(t)y(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

sujeito as condições iniciais

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t), \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

para os valores de $t \in [-\tau, 0]$. Aqui temos as seguintes designações:

$x(t)$ e $y(t)$ representam as densidades de pragas e predadores, respectivamente;

τ representa a expectativa de vida de uma praga infectada.

A expressão $\gamma x(t)x(t-\tau)$ representa a taxa de contaminação de pragas pela doença. Esta taxa é proporcional à densidade de pragas no instante t e à densidade de pragas no instante $t - \tau$.

Seja $U(t)$ o número de presas retiradas do sistema no instante t e $V(t)$ o número de predadores introduzidos ao sistema no mesmo instante. O modelo que descreve a dinâmica do sistema com a aplicação do controle pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = &\quad a(x-U) - b(x-U)^2 - \gamma(x-U)\left(x(t-\tau) - U(t-\tau)\right) \\ &\quad -\delta(x-U)(y+V) - q_1 U, \\ \frac{dy(t)}{dt} = &\quad -d(y+V) + \beta(x-U)(y+V) + q_2 V, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde os coeficientes q_1 e q_2 representam constantes positivas que caracterizam as condições técnicas de aplicação de controle.

As funções de controle $U(t)$ e $V(t)$ devem satisfazer as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} 0 &\le U(t) \le x(t), \\ 0 &\le V(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Formulação do Problema

Suponhamos que seja desejável manter o nível de pragas abaixo dos danos econômicos e ter um baixo custo no uso da aplicação de controle. Para atingir esta meta temos que utilizar o critério de otimização

$$I = c_1 \left[q_1 \int_0^{n\tau} U(t)dt + \sum_{k=1}^{n} x(k\tau) \right] + c_2 \left[q_2 \int_0^{n\tau} V(t)dt - \sum_{k=1}^{n} y(k\tau) \right], \qquad (3.1)$$

onde os coeficientes c_1 e c_2 são constantes positivas que caracterizam a influência de cada tipo de controle.

Portanto, o problema do controle ótimo consiste em escolher um programa de controle admissível que levará o sistema (2.3) do estado inicial (2.2) ao estado final, tal que o critério (3.1) seja minimizado.

A primeira equação diferencial com retardamento do sistema (2.3) pode ser substituído por um sistema de equações diferenciais ordinárias sem retardamento [3]. Então, o sistema será escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(t)}{dt} &= a(x_k - u_k) - b(x_k - u_k)^2 - \gamma(x_k - u_k)(x_{k-1} - u_{k-1}) \\ &\quad -\delta(x_k - u_k)(y_k - v_k) - q_1 u_k, \\ \frac{dy_k(t)}{dt} &= -d(y_k - v_k) + \beta(x_k - u_k)(y_k - v_k) + q_2 v_k, \end{aligned} \qquad (3.2)$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.

As funções x_k e y_k ,$(k = 1, 2, ..., n)$, devem satisfazer o seguinte sistema de condições iniciais:

$$\begin{array}{l} x_1 \left[(n-1)\,\tau \right] = \varphi(0) \\ x_2 \left[(n-1)\,\tau \right] = x_1(n\tau) \\ \ldots \\ x_n \left[(n-1)\,\tau \right] = x_{n-1}(n\tau) \\ y_1 \left[(n-1)\,\tau \right] = y_0 \\ y_2 \left[(n-1)\,\tau \right] = y_1(n\tau) \\ \ldots \\ y_n \left[(n-1)\,\tau \right] = y_{n-1}(n\tau), \end{array} \qquad (3.3)$$

e as funções de controle u_k e v_k, $(k = 1, 2, ..., n)$, devem satisfazer as condições iniciais similares às formuladas para as variáveis x_k e y_k. Assim:

$$\begin{array}{l} u_2 \left[(n-1)\,\tau \right] = u_1\,(n\tau) \\ \ldots \\ u_n \left[(n-1)\,\tau \right] = u_{n-1}\,(n\tau) \\ v_2 \left[(n-1)\,\tau \right] = v_1\,(n\tau) \\ \ldots \\ v_n \left[(n-1)\,\tau \right] = v_{n-1}\,(n\tau)\,. \end{array} \qquad (3.4)$$

Agora vamos rescrever o critério (3.1) em relação às funções x_k e y_k na forma:

$$I = c_1 \left[q_1 \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \sum_{k=1}^{n} u_k dt + \sum_{k=1}^{n} x_k(n\tau) \right] + c_2 \left[q_2 \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \sum_{k=1}^{n} v_k dt - \sum_{k=1}^{n} y_k(n\tau) \right]. \qquad (3.5)$$

O nosso problema de controle ótimo pode agora ser formulado para um sistema sem retardamento, isto é, encontrar as funções de controle u_k e v_k, que minimizam o critério (3.5) para o sistema (3.2) e satisfazem as condições de contorno (3.4).

4. Resolução do Problema

Resolveremos este problema de otimização de um sistema dinâmico utilizando o Princípio do Máximo de Pontryagin.

Introduziremos uma nova variável G, tal que:

$$G(T)=c_1\left[q_1\int_{(n-1)\tau}^{n\tau}\sum_{k=1}^{n}u_k dt+\sum_{k=1}^{n}x_k(n\tau)\right]+c_2\left[q_2\int_{(n-1)\tau}^{n\tau}\sum_{k=1}^{n}v_k dt-\sum_{k=1}^{n}y_k(n\tau)\right], \quad (4.1)$$

onde $T = n\tau$ e cuja derivada é:

$$\frac{dG(t)}{dt} = c_1\left[q_1\sum_{k=1}^{n}u_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{dx_k(n\tau)}{d(n\tau)}\right]+c_2\left[q_2\sum_{k=1}^{n}v_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{dy_k(n\tau)}{d(n\tau)}\right].$$

Substituindo as equações do sistema (3.2) na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dG(t)}{dt} &= c_1\sum_{k=1}^{n}\Big[a(x_k-u_k)-b(x_k-u_k)^2-\gamma(x_k-u_k)(x_{k-1}-u_{k-1})\\ &\quad -\delta(x_k-u_k)(y_k+v_k)\Big]+c_2\left[\sum_{k=1}^{n}\Big[d(y_k+v_k)-\beta(x_k-u_k)(y_k+v_k)\Big]\right].\end{aligned}$$

Faremos agora as seguintes designações:

$$\begin{aligned}\xi_k &= x_k-u_k,\\ \eta_k &= y_k+v_k,\end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.

Definimos a função de Hamilton:

$$\begin{aligned}H &= \lambda_0\left[c_1\left(\sum_{k=1}^{n}(a\xi_k-b\xi_k^2-\gamma\xi_k\xi_{k-1}-\delta\xi_k\eta_k)\right)+c_2\left(\sum_{k=1}^{n}(d\eta_k-\beta\xi_k\eta_k)\right)\right]+\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\left[\lambda_k\left(a\xi_k-b\xi_k^2-\gamma\xi_k\xi_{k-1}-\delta\xi_k\eta_k-q_1u_k\right)\right]+\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\left[\mu_k\left(-d\eta_k+\beta\xi_k\eta_k+q_2v_k\right)\right],\end{aligned} \quad (4.3)$$

onde λ_0, λ_k e η_k são variáveis conjugadas determinadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_0}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial G} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = constante \\
\frac{d\lambda_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_k} \\
\frac{d\mu_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_k},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$, e pelas condições finais:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(n\tau) &= -1 \\
\lambda_k(n\tau) &= 0 \\
\mu_k(n\tau) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.

De (4.4) e (4.5) temos que:

$$\lambda_0 = -1 \tag{4.6}$$

As condições necessárias do máximo da função H são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_k} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_k} - q_1 \lambda_k = 0, \\
\frac{\partial H}{\partial v_k} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_k} - q_2 \mu_k = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Da primeira equação do sistema (4.7) temos:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = -q_1 \lambda_k, \quad \text{mas} \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_k} = \frac{\partial H}{\partial x_k}, \tag{4.8}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.
Então:

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = -q_1 \lambda_k.$$

Consequentemente, a segunda equação do sistema (4.4) pode ser escrita como:

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = q_1 \lambda_k,$$

cuja solução geral é dada pela expressão

$$\lambda_k = A_k e^{q_1 t}, \tag{4.9}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.

Aplicando a segunda condição final de (4.5) em (4.9) obtemos $A_k = 0$ e portanto

$$\lambda_k = 0, \tag{4.10}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.

Por análise similar, obtemos o valor da expressão geral de μ_k

$$\mu_k = B_k e^{-q_2 t},$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.

Aplicamos agora a terceira condição final de (4.5) na expressão acima, obtendo assim:

$$\mu_k = 0, \tag{4.11}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$.

Aplicando os resultados (4.5), (4.10) e (4.11) na expressão da Hamiltoniana (4.3), obtemos:

$$H = -c_1 \left(\sum_{k=1}^{n} (a\xi_k - b\xi_k^2 - \gamma\xi_k\xi_{k-1} - \delta\xi_k\eta_k) \right) - c_2 \left(\sum_{k=1}^{n} (d\eta_k - \beta\xi_k\eta_k \right).$$

Agora, a partir de (4.6) obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} &-c_1 a + 2c_1 b\xi_k + c_1\gamma\xi_{k-1} + c_1\gamma\xi_{k+1} + c_1\delta\eta_k + c_2\beta\eta_k = 0, \\ &c_1\delta\xi_k - c_2 d + c_2\beta\xi_k = 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$ e $\xi_0 = \varphi(t)$.

Então, do sistema (4.12) encontramos:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{c_2}{c_1\delta + c_2\beta}, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, ..., n, \\ \eta_1 &= \frac{c_1^2 a\delta + c_1c_2a\beta - 2c_1c_2bd - c_1^2\varphi(t)\gamma\delta - c_1c_2\varphi(t)\gamma\beta + c_1c_2\gamma d}{(c_1\delta + c_2\beta)^2}, \\ \eta_k &= \frac{c_1^2 a\delta + c_1c_2a\beta - 2c_1c_2bd - 2c_1c_2\gamma d}{(c_1\delta + c_2\beta)^2}, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Utilizando as restrições (2.4), as designações (4.2) e os valores de ξ_k, η_1 e η_k calculados em (4.13) obtemos:

$$u_k(t) = \begin{cases} x_k - \xi_k & \text{se} \quad x_k > \xi_k \\ 0 & \text{se} \quad x_k \leq \xi_k, \end{cases} \qquad v_k(t) = \begin{cases} \eta_k - y_k & \text{se} \quad y_k < \eta_k \\ 0 & \text{se} \quad y_k \geq \eta_k. \end{cases} \tag{4.14}$$

5. Aplicação dos Resultados para o Controle da Lagarta da Soja *Anticarsia gemmatalis* na Presença do Fungo *Nomuraea rileyi*

Vamos considerar os coeficientes $a = 0,216$, $b = 0,0001$, $\gamma = 0,00075$, $\delta = 0,0108$, $d = 0,173$ e $\beta = 0,0031$, $q_1 = q_2 = c_1 = c_2 = 1$.

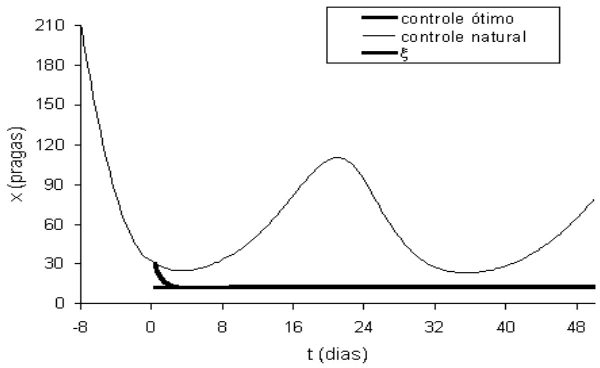

Figura 1: Densidade Populacional de pragas com e sem a aplicação de controle ótimo.

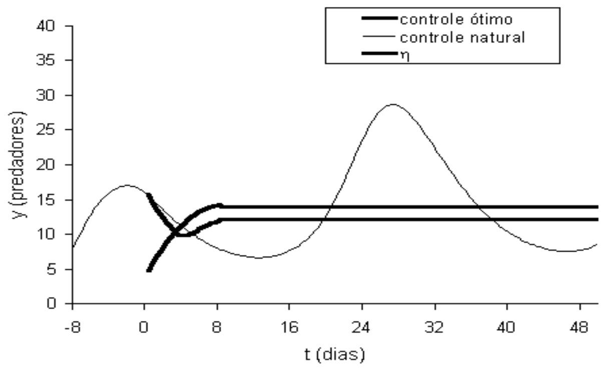

Figura 2: Densidade Populacional de predadores com e sem a aplicação de controle ótimo.

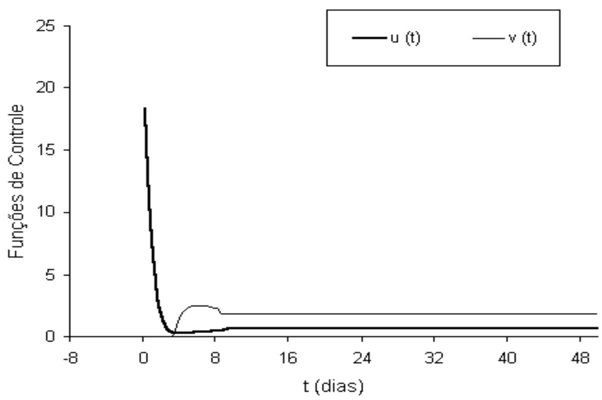

Figura 3: Funções de controle $u(t)$ e $v(t)$.

Lagartas da espécie *Anticarsia gemmatalis* quando infectadas pelo fungo *Nomuraea rileyi*, possuem uma expectativa de vida de aproximadamente 8 dias, o que nos leva a considerar $\tau = 8$ dias.

Neste estudo foram considerados vários tipos de funções iniciais $\varphi(t)$, porém, veremos aqui, apenas a função inicial quadrática pois essa função adequou-se melhor aos dados coletados.

Observando a simulação representada na figura 1, é possível perceber uma acentuada redução do número de pragas em função da aplicação do controle ótimo. O número de pragas foi reduzido de 55,6 para 13,12 pragas, o que representa uma redução de 76,4%.

Este equilíbrio, de 13,12 pragas é obtido mantendo uma retirada de 0,67 pragas e uma adição de 1,88 predadores ao dia.

Abstract. The optimal control problem of the prey-predator delay system and its application to the biological pest control in crops was considered in this work. A methodology, that transforms a differential defference equation in a system of ordinary differential equations, was applied to solve the optimal control problem. The problem was solved by the application of the Maximum Pripciple of Pontryagin.

Referências

[1] R. Bellman, "Dynamic Programming", Princeton University Peress, New Jersey, 1959.

[2] R. Bellman e K.L. Cooke, "Differential Difference Equations", Academic Press, New York, 1963.

[3] L.E. Elsgolts e S.B. Norkin, "Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments", Academic Press, New York, 1973.

[4] R.M. May, Time delay versus stability in population models with two and three trophic levels, *Ecology* **54** (1973), 315-325.

[5] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze e E.F. Mischenko, "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Interscience, New York, 1962.