Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, (2001), 193-201.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Geração de Matrizes de Rigidez e Retores de Ações Nodais Equivalentes com o Emprego da Formulação Hermitiana Livre[1]

A.C. RIGITANO, H.M. BOTTURA, Departamento de Engenharia Civil, FEB-UNESP, Av. Luiz Edmundo C. Coube s/n, 17033-360 Bauru, SP, Brasil

J.E. LAIER, Departamento de Estruturas, EESC-USP, Av. Dr. Carlos Botelho, 1465, 13560-250 São Carlos, SP, Brasil.

1. Introdução

Este trabalho mostra inicialmente os aspectos básicos da geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes por métodos de análise mais conhecidos, para em seguida apresentar outra possibilidade de solução desse problema, estando a atenção voltada ao caso de barras elásticas sem efeito de segunda ordem, submetidas a ações axiais estáticas, tema clássico dos textos introdutórios ao método dos elementos finitos.

A abordagem que se faz, denominada formulação hermitiana livre, consiste em trabalhar-se com o operador de diferenças finitas hermitiano trapezoidal (deduzido segundo a metodologia de Collatz [1]), aplicando-o às funções deslocamento u e força normal N que descrevem o comportamento da estrutura.

O objetivo é gerar a matriz de rigidez e o vetor de ações nodais equivalentes, mostrando o erro de aproximação do resultado (erro local), informação decorrente de propriedade intrínseca do operador citado que não é contemplada nas formulações dos métodos de análise de uso corrente.

Para efeito comparativo entre a formulação proposta e outras mais conhecidas, são apresentadas de maneira expedita as soluções tradicionais da matriz de rigidez

Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

e do vetor de ações nodais equivalentes através do método direto e do método dos elementos finitos, conforme a seguir se expõe.

2. Barra Elástica: Geração da Matriz de Rigidez e Vetor de Ações Nodais Equivalentes pelos Caminhos Tradicionais

Seja a barra submetida a ações p uniformemente distribuídas em sua direção axial, para a qual admite-se comportamento elástico (módulo de elasticidade do material E), área da seção transversal A, comprimento L, sendo $\{F\} = \{\ F_i \quad F_j\ \}^T$ as forças e $\{u\} = \{\ u_i \quad u_j\ \}^T$ os deslocamentos que ocorrem nas extremidades i e j do elemento, conforme mostra a Fig.1.

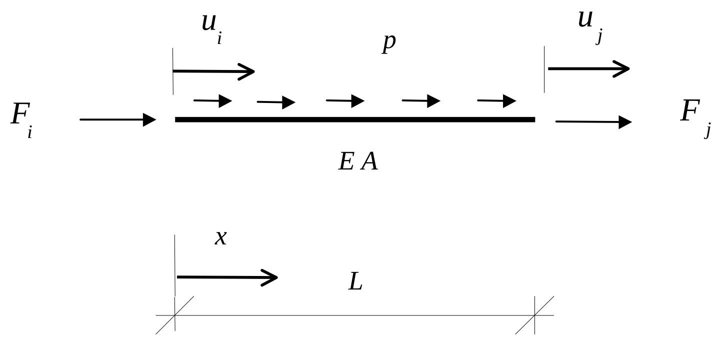

Figura 1: Barra sob ação axial uniformemente distribuída.

A análise de tal estrutura leva a uma relação entre os deslocamentos nodais e forças nodais do tipo:

$$\{F\} = [k]\,\{u\} + \{r_e\} \tag{2.1}$$

na qual $[k]$ denomina-se matriz de rigidez e $\{r_e\}$ são as forças nodais equivalentes às ações distribuídas p atuantes no elemento (reações de viga).

Para a obtenção de expressões análogas a (2.1) existem, segundo Cook [2], três caminhos tradicionais: o método direto, que emprega conceitos básicos da Resistência dos Materiais; o método variacional e o método dos pesos reduzidos, sendo os dois últimos conhecidos como métodos de elementos finitos, mais gerais e largamente empregados na solução numérica de problemas da Teoria da Elasticidade, variantes sobre as quais são feitas considerações expeditas no que se segue.

2.1. Geração de $[k]$ e $\{r_e\}$ pelo Método Direto

Para a barra elástica, elemento estrutural bastante simples, o método direto permite a geração da matriz de rigidez tendo como base a conhecida expressão da Resistência dos Materiais:

$$F = \frac{EA}{L} u, \tag{2.2}$$

com o uso da qual podem ser obtidas as forças F_i e F_j nas extremidades i e j, procedendo-se deslocamentos unitários nesses nós de extremidade.

Assim sendo, a primeira coluna da matriz $[k]$ é obtida quando se faz $u_i = 1$ e $u_j = 0$, e a segunda coluna com $u_i = 0$ e $u_j = 1$, conjunto que em notação matricial se escreve:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_i \\ F_j \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{array} \right], \tag{2.3}$$

encerrando a geração da matriz de rigidez $[k]$ com evidente entendimento físico do problema.

Para a determinação do vetor de ações nodais equivalentes ao carregamento p uniformemente distribuído, basta aplicar aos nós i e j as reações de apoio da barra engastada nas extremidades, invertendo-se o sentido de atuação dessas forças, cujos conhecidos valores (obtidos por exemplo pelo processo dos esforços) são os dados por:

$$\{r_e\} = \left\{ \begin{array}{cc} -\frac{pL}{2} & -\frac{pL}{2} \end{array} \right\}^T, \tag{2.4}$$

encerrando a formulação dos parâmetros pertinentes à expressão (2.1), nem sempre possível de se realizar para outros elementos estruturais mais complexos.

2.2. Geração de $[k]$ e $\{r_e\}$ pelo Método dos Elementos Finitos

Apresentam-se a geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes pelo método dos elementos finitos, tratando-se de abordagem mais abrangente que também leva à obtenção de expressão análoga a (2.1), conforme a seguir se expõe.

De acordo com Zienkiewicz [5], a geração de $[k]$ e $\{r_e\}$ pode ser realizada através de formulação na qual é preciso admitir-se de princípio, uma expressão representativa dos deslocamentos no elemento do tipo:

$$u(x) = \{N\}\{u\} = \left\{ \begin{array}{cc} N_i & N_j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} u_i & u_j \end{array} \right\}^T, \tag{2.5}$$

onde $\{N\}$ é denominada função de forma, sendo apropriada ao caso em questão a função dada por:

$$\{N\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{array} \right\}, \tag{2.6}$$

que atribui aos deslocamentos $u(x)$ o comportamento de uma função linear.

Conhecidos os deslocamentos no domínio do elemento conforme (2.5), é possível relacioná-los com as deformações $\{\epsilon\}$, escrevendo-se uma expressão do tipo:

$$\{\epsilon\} = \{B\} \left\{ \begin{array}{cc} u_i & u_j \end{array} \right\}^T, \tag{2.7}$$

onde as deformações axiais de interesse são definidas através da relação da Teoria da Elasticidade:

$$\epsilon = u^I, \tag{2.8}$$

empregando-se a notação de derivada parcial em x $(\partial/\partial x)$ indicada por número romano no expoente, relação que permite obter-se o vetor $\{B\}$ por derivação de (2.5), ou seja:

$$\{B\} = N^I = \left\{ \begin{array}{cc} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{array} \right\}, \tag{2.9}$$

encerrando o conjunto de expressões em termos dos deslocamentos.

De posse dos vetores $\{N\}$ e $\{B\}$ dados respectivamente por (2.6) e (2.9), a geração de $[k]$ e $\{r_e\}$ consiste em obter-se as forças nodais estaticamente equivalentes às cargas distribuídas, o que pode ser realizado por procedimento mais simples (Zienkiewicz [5]), impondo-se um deslocamento virtual arbitrário ao elemento e igualando-se os trabalhos interno e externo realizados pelas várias forças durante aquele deslocamento.

Em termos matemáticos tal procedimento conduz à equação (Zienkiewicz [5]):

$$\{F\} = \left(\int_V [B]^T [D] [B] \, dv \right) \{u\} - \int_V [N]^T \{p^*\} \, dv, \tag{2.10}$$

sendo $\{p^*\}$ a carga distribuída atuante por unidade de volume do elemento com direção correspondente aos deslocamentos $\{u\}$ e $[D]$ a matriz usual da Teoria da Elasticidade que representa a proporcionalidade entre tensões e deformações de um elemento da estrutura.

A expressão (2.10) quando aplicada ao caso da barra elástica resume-se a:

$$\{F\} = \left(\int \{B\}^T EA \{B\} \, dx \right) \{u\} - \int \{N\}^T \{p\} \, dx, \tag{2.11}$$

observando-se similaridade em relação à equação (2.1), fato que permite expressar a matriz de rigidez e as forças nodais equivalentes à carga distribuída por:

$$\begin{array}{ll} [K] & = \int \{B\}^T EA \{B\} \, dx, \\ \{r_e\} & = -\int \{N\}^T \{p\} \, dx, \end{array} \tag{2.12}$$

cujas integrações analíticas para o caso em consideração levam a:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}, \qquad \{r_e\} = \left\{ \begin{array}{cc} -\frac{pL}{2} & -\frac{pL}{2} \end{array} \right\}^T, \tag{2.13}$$

parâmetros idênticos aos gerados pelo método direto, sendo $\{r_e\}$, segundo as próprias palavras do citado autor, comumente obtido por intuição física, conforme visto no exemplo do item anterior.

É importante ressaltar que o princípio dos trabalhos virtuais ora mostrado pode ser estabelecido de forma diferente, em abordagem do método dos deslocamentos através de minimização da energia potencial total da estrutura, procedimento usual para análise elástica conhecido como processo de Rayleigh-Ritz; sendo também conhecida outra variante, denominada método dos pesos reduzidos (método de Galerkin), observando-se que a aplicação de ambos os métodos levam aos mesmos resultados expressos em (2.13), conforme mostram Cook [2], Zienkiewicz [5] e também inúmeros outros autores.

3. Barra Elástica: Geração da Matriz de Rigidez e Vetor de Ações Nodais Equivalentes pela Formulação Hermitiana Livre

Tendo em mente que os métodos de geração da matriz de rigidez e vetores de ações nodais equivalentes levam a expressões do tipo (2.1), sabendo-se que o método direto não é passível de aplicação em problemas mais gerais e ainda, que o dos elementos finitos baseia-se na habilidade de adotar-se funções de forma apropriadas; propõe-se alternativa que possibilite o entendimento físico do problema evitando a procura de tais funções de forma, o que é viável ao empregar-se formulação livre, sendo oportuno assinalar que a dificuldade principal de tal formulação está centrada na obtenção de matrizes resultantes simétricas.

A idéia básica é trabalhar a relação entre esforços e deslocamentos através dos denominados operadores de diferenças finitas hermitianos, aplicando-os às funções envolvidas e carregando-se para tais operadores as informações nos pontos pivotais (pontos de malha), que são oriundas das equações diferenciais regentes do problema que se quer analisar.

Tal procedimento é realizado em duas partes, sendo na primeira gerados operadores através da metodologia de Collatz [1] e na segunda, feitas aplicações dos operadores às funções concernentes ao problema; conjunto esse denominado de formulação hermitiana livre, conforme a seguir se expõe.

3.1. Operadores de Diferenças Finitas Hermitianos

Os operadores de diferenças finitas hermitianos podem ser obtidos através da variante de Collatz [1], sendo expressos na forma sugerida por Pilkey [3], com o emprego de expressões homogêneas do tipo:

$$\sum \left(a_p y_p + b_q y_q^I + c_r y_r^{II} + ...\right) + R = 0, \tag{3.1}$$

de sorte a facilitar a formulação de operadores mais genéricos possíveis, atribuindo valores arbitrários aos índices p, q, r, e assim por diante (índices definidores dos pontos pivotais), onde emprega-se a notação de derivada indicada por número romano no expoente, sendo R denominado de erro de aproximação do operador.

Os parâmetros presentes na expressão (3.1) são obtidos através de expansões da função y e de suas derivadas em séries de Taylor, tendo-se em conta uma determinada ordem de convergência.

Para o desenvolvimento deste trabalho é apropriada a aplicação do operador de diferenças finitas hermitiano dado por:

$$-y_i + y_j - \frac{L}{2}\left(y_i^I + y_j^I\right) + \frac{L^3 y_i^{III}}{12} + ... = 0, \tag{3.2}$$

onde L é o comprimento do elemento; operador que possui erro de aproximação de terceira ordem ou seja $0\left(L^3\right)$, conforme o último termo está a indicar.

3.2. Geração de $[k]$ e $\{r_e\}$ com o Emprego da Formulação Hermitiana Livre

Considere-se a barra sob ação axial uniformemente distribuída p, conforme exibe a Fig. 2, empregando-se a convenção usual da Resistência dos Materiais.

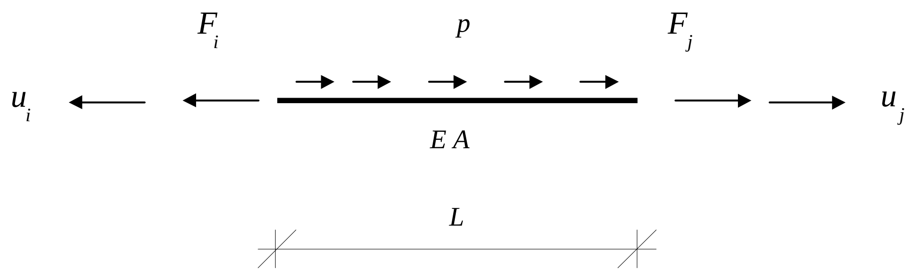

Figura 2: Barra sob ação axial uniformemente distribuída.

A equação diferencial regente do problema, como se sabe, é dada por:

$$u^I = \frac{F}{EA}, \tag{3.3}$$

relação que derivada outra vez, resulta:

$$u^{II} = \frac{F^I}{EA}. \tag{3.4}$$

A condição de equilíbrio de um trecho elementar da barra conforme mostra a Fig. 3, implica em:

$$F^I = -p, \tag{3.5}$$

cujas derivadas de ordem superior são nulas ($p =$ constante).

A substituição de (3.5) em (3.4), leva a:

$$u^{II} = -\frac{p}{EA}, \tag{3.6}$$

notando-se também que as derivadas de ordem superior são nulas (p = constante) e encerrando-se a procura das relações diferenciais de interesse.

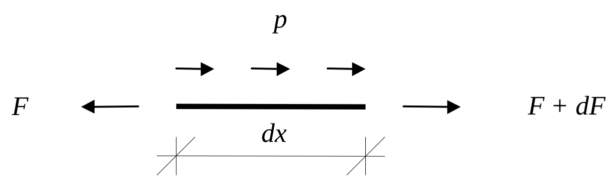

Figura 3: Elemento de barra sob ação axial uniformemente distribuída.

Estabelecidas as relações constitutivas e de equilíbrio para o problema, cumpre assinalar que a formulação hermitiana livre da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes vem a ser uma decorrência imediata da relação entre forças normais e deslocamentos de extremidades conforme expressão (2.1), que pode ser encontrada com o emprego do operador de diferenças finitas hermitiano (3.2), levando-se ao mesmo os parâmetros nodais fornecidos por (3.3), (3.5), (3.6) e suas derivadas, dados respectivamente por:

$$\begin{array}{lllll} u_i^I = \frac{F_i}{EA} & u_j^I = \frac{F_j}{EA} & u_i^n = 0 & \text{para} & n \geq III, \\ F_i^I = -p & F_j^I = -p & F^n = 0 & \text{para} & n \geq II. \end{array} \tag{3.7}$$

Para se obter a relação entre forças e deslocamentos nodais, aplica-se o operador de diferenças finitas hermitiano (3.2) à função deslocamento e à função esforço normal, ou seja:

$$\begin{array}{c} -u_i + u_j - \frac{L}{2}\left(u_i^I + u_j^I\right) + \frac{L^3 u_i^{III}}{12} + ... = 0, \\ -F_i + F_j - \frac{L}{2}\left(F_i^I + F_j^I\right) + \frac{L^3 F_i^{III}}{12} + ... = 0. \end{array} \tag{3.8}$$

Na seqüência substituem-se as informações pivotais (3.7) em (3.8), obtendo-se:

$$\begin{array}{c} -u_i + u_j - \frac{L}{2}\left(\frac{F_i}{EA} + \frac{F_j}{EA}\right) + \frac{L^3(0)}{12} = 0, \\ -F_i + F_j - \frac{L}{2}\left(-p - p\right) + \frac{L^3(0)}{12} = 0, \end{array} \tag{3.9}$$

conjunto que reunido matricialmente, ganha a seguinte redação:

$$[k^*]\{u\} + [u^*]\{F\} + \{r_e^*\} + \{R_o^*\} = \{0\}, \tag{3.10}$$

onde:

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{cc} u_i & u_j \end{array} \right\}^T \qquad \{F\} = \left\{ \begin{array}{cc} F_i & F_j \end{array} \right\}^T \qquad \{r_e^*\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & pL \end{array} \right\}^T$$
$$[k^*] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [u^*] = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA} & -\frac{L}{2EA} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

e destacando-se especialmente:

$$\{R_o^*\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right\}^T, \tag{3.12}$$

isto é, o desaparecimento do erro de aproximação local.

Procedendo-se à inversão da matriz de flexibilidade $[u^*]$ e manobrando-se algebricamente o expresso em (3.10) para obter-se expressão análoga a (2.1), tem-se:

$$\{F\} = [k]\{u\} + \{r_e\} + \{R_o\}, \tag{3.13}$$

onde:

$$[k] = \begin{bmatrix} -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \qquad \{r_e\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{pL}{2} & -\frac{pL}{2} \end{array} \right\}^T \quad \{R_o\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right\}^T, \tag{3.14}$$

sendo $[k]$ e $\{r_e\}$ idênticos aos da formulação direta e a dos elementos finitos, quando providenciada a troca dos sinais da primeira linha, por motivo da convenção adotada na formulação hermitiana livre, onde os deslocamentos e esforços normais não têm a mesma orientação nas extremidades (vide Figuras 1 e 2).

Ressalte-se ainda em (3.14), a informação do erro de aproximação local $\{R_o\}$ destacado em separado, significando que a matriz de rigidez e o vetor de ações nodais equivalentes são soluções analíticas exatas (a parcela do erro de aproximação contida nos operadores aplicados desaparece, conforme conjunto (3.9) e expressão (3.12)), informação que não é disponível quando do emprego dos métodos direto e dos elementos finitos, conforme deduções dos itens anteriores.

4. Conclusões

Em primeiro lugar, é digno de registro que a formulação apresentada constitui-se em alternativa não variacional para a geração de matrizes de rigidez e de vetores de ações nodais equivalentes, dispondo da vantagem de se abordar o erro de aproximação de maneira explícita.

Conforme o objetivo deste trabalho, que é de apresentar os fundamentos de nova técnica de formulação, a aplicação aqui encontrada refere-se a caso da Estática das Estruturas, podendo a formulação ser extendida a outros problemas de barras, alguns deles tratados em Rigitano [4], abrindo um campo de pesquisa extremamente promissor, que evita o caminho da escolha de funções de forma, providência que depende muitas vezes da habilidade do pesquisador.

Deve-se destacar que a dificuldade pertinente à formulação hermitiana ocorre devido à preocupação de se obter matrizes resultantes simétricas, o que está diretamente ligado à escolha apropriada dos operadores de diferenças finitas hermitianos, problema ainda a explorar.

Para finalizar, é importante ressaltar que a formulação livre vem a ser uma nova abordagem que muito pode contribuir, no sentido de trazer informações que normalmente não são objeto de considerações nos métodos de análise mais conhecidos, complementando tais variantes já consagradas pelo uso corrente.

Agradecimentos

Os autores expressam seus agradecimentos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio recebido e aos Professores Osvaldo L. Manzoli e Vicente L. Scalon pelo apoio na editoração.

Referências

[1] L. Collatlz, "The Numerical Treatment of Differencial Equations", 2nd ed., Springer Verlag, 1966.

[2] R.D. Cook, D.S. Malkus e M.E. Plesha, "Concepts and Aplications of Finite Element Analysis", 3d. ed., John Wiley & Sons, New York, 1986.

[3] W.D. Pilkey e W. Wunderlich, "Mechanics of Estructures - Variational and Computational Methods", CRC Press Inc., USA, 1994.

[4] A.C. Rigitano, "Contribuição para a Determinação de Matrizes de Rigidez e Vetores de Ações Nodais Equivalentes com o Emprego da Formulação Hermitiana Livre", Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

[5] O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", 2nd. ed., McGraw-Hill Book Company, London, 1971.