

Ciclóides

N.D. ALLAN, Departamento de Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, 13500-000 Rio Claro, SP, Brasil.

1. Introdução

As ciclóides originalmente foram introduzidas pelos gregos. Estudadas por Apolonio no caso particular dos epiciclos, ele as usa para descrever movimento de planetas. Ptolomeu, descreve os movimentos planetários em termos destes epiciclos. As ciclóides passaram para teoria de curvas, segundo Descartes, como curvas mecânicas, i.e., geradas mecanicamente; a idéia de Descartes era dividir as curvas em algébricas e não algébricas. Talvez por falta de trigonometria ele não viu que muitas destas curvas são algébricas. Em princípio, elas podem ser definidas como o movimento de um ponto de uma circunferência que rola uniformemente sobre uma reta ou outra circunferência. Geralmente vamos considerar a circunferência móvel rolando sobre uma curva qualquer. Nosso trabalho será feito no `gnuplot` e nosso objetivo é programar funções gráficas o mais próximo possível do raciocínio matemático. Vamos construir passo a passo nossos programas.

2. Comandos Básicos

Afim de auxiliar as descrições de nosso programa vamos introduzir vários outros comandos auxiliares. O primeiro comando que discutiremos é o `set` que simplifica principalmente parêntesis; ele é

```
→ set terminal type width height color font fontsize fontcolor fontweight fontstyle fontfamily fontencoding fontmap fontmap2 fontmap3 fontmap4 fontmap5 fontmap6 fontmap7 fontmap8 fontmap9 fontmap10 fontmap11 fontmap12 fontmap13 fontmap14 fontmap15 fontmap16 fontmap17 fontmap18 fontmap19 fontmap20 fontmap21 fontmap22 fontmap23 fontmap24 fontmap25 fontmap26 fontmap27 fontmap28 fontmap29 fontmap30 fontmap31 fontmap32 fontmap33 fontmap34 fontmap35 fontmap36 fontmap37 fontmap38 fontmap39 fontmap40 fontmap41 fontmap42 fontmap43 fontmap44 fontmap45 fontmap46 fontmap47 fontmap48 fontmap49 fontmap50 fontmap51 fontmap52 fontmap53 fontmap54 fontmap55 fontmap56 fontmap57 fontmap58 fontmap59 fontmap60 fontmap61 fontmap62 fontmap63 fontmap64 fontmap65 fontmap66 fontmap67 fontmap68 fontmap69 fontmap70 fontmap71 fontmap72 fontmap73 fontmap74 fontmap75 fontmap76 fontmap77 fontmap78 fontmap79 fontmap80 fontmap81 fontmap82 fontmap83 fontmap84 fontmap85 fontmap86 fontmap87 fontmap88 fontmap89 fontmap90 fontmap91 fontmap92 fontmap93 fontmap94 fontmap95 fontmap96 fontmap97 fontmap98 fontmap99 fontmap100 fontmap101 fontmap102 fontmap103 fontmap104 fontmap105 fontmap106 fontmap107 fontmap108 fontmap109 fontmap110 fontmap111 fontmap112 fontmap113 fontmap114 fontmap115 fontmap116 fontmap117 fontmap118 fontmap119 fontmap120 fontmap121 fontmap122 fontmap123 fontmap124 fontmap125 fontmap126 fontmap127 fontmap128 fontmap129 fontmap130 fontmap131 fontmap132 fontmap133 fontmap134 fontmap135 fontmap136 fontmap137 fontmap138 fontmap139 fontmap140 fontmap141 fontmap142 fontmap143 fontmap144 fontmap145 fontmap146 fontmap147 fontmap148 fontmap149 fontmap150 fontmap151 fontmap152 fontmap153 fontmap154 fontmap155 fontmap156 fontmap157 fontmap158 fontmap159 fontmap160 fontmap161 fontmap162 fontmap163 fontmap164 fontmap165 fontmap166 fontmap167 fontmap168 fontmap169 fontmap170 fontmap171 fontmap172 fontmap173 fontmap174 fontmap175 fontmap176 fontmap177 fontmap178 fontmap179 fontmap180 fontmap181 fontmap182 fontmap183 fontmap184 fontmap185 fontmap186 fontmap187 fontmap188 fontmap189 fontmap190 fontmap191 fontmap192 fontmap193 fontmap194 fontmap195 fontmap196 fontmap197 fontmap198 fontmap199 fontmap200 fontmap201 fontmap202 fontmap203 fontmap204 fontmap205 fontmap206 fontmap207 fontmap208 fontmap209 fontmap210 fontmap211 fontmap212 fontmap213 fontmap214 fontmap215 fontmap216 fontmap217 fontmap218 fontmap219 fontmap220 fontmap221 fontmap222 fontmap223 fontmap224 fontmap225 fontmap226 fontmap227 fontmap228 fontmap229 fontmap230 fontmap231 fontmap232 fontmap233 fontmap234 fontmap235 fontmap236 fontmap237 fontmap238 fontmap239 fontmap240 fontmap241 fontmap242 fontmap243 fontmap244 fontmap245 fontmap246 fontmap247 fontmap248 fontmap249 fontmap250 fontmap251 fontmap252 fontmap253 fontmap254 fontmap255 fontmap256 fontmap257 fontmap258 fontmap259 fontmap260 fontmap261 fontmap262 fontmap263 fontmap264 fontmap265 fontmap266 fontmap267 fontmap268 fontmap269 fontmap270 fontmap271 fontmap272 fontmap273 fontmap274 fontmap275 fontmap276 fontmap277 fontmap278 fontmap279 fontmap280 fontmap281 fontmap282 fontmap283 fontmap284 fontmap285 fontmap286 fontmap287 fontmap288 fontmap289 fontmap290 fontmap291 fontmap292 fontmap293 fontmap294 fontmap295 fontmap296 fontmap297 fontmap298 fontmap299 fontmap300 fontmap301 fontmap302 fontmap303 fontmap304 fontmap305 fontmap306 fontmap307 fontmap308 fontmap309 fontmap310 fontmap311 fontmap312 fontmap313 fontmap314 fontmap315 fontmap316 fontmap317 fontmap318 fontmap319 fontmap320 fontmap321 fontmap322 fontmap323 fontmap324 fontmap325 fontmap326 fontmap327 fontmap328 fontmap329 fontmap330 fontmap331 fontmap332 fontmap333 fontmap334 fontmap335 fontmap336 fontmap337 fontmap338 fontmap339 fontmap340 fontmap341 fontmap342 fontmap343 fontmap344 fontmap345 fontmap346 fontmap347 fontmap348 fontmap349 fontmap350 fontmap351 fontmap352 fontmap353 fontmap354 fontmap355 fontmap356 fontmap357 fontmap358 fontmap359 fontmap360 fontmap361 fontmap362 fontmap363 fontmap364 fontmap365 fontmap366 fontmap367 fontmap368 fontmap369 fontmap370 fontmap371 fontmap372 fontmap373 fontmap374 fontmap375 fontmap376 fontmap377 fontmap378 fontmap379 fontmap380 fontmap381 fontmap382 fontmap383 fontmap384 fontmap385 fontmap386 fontmap387 fontmap388 fontmap389 fontmap390 fontmap391 fontmap392 fontmap393 fontmap394 fontmap395 fontmap396 fontmap397 fontmap398 fontmap399 fontmap400 fontmap401 fontmap402 fontmap403 fontmap404 fontmap405 fontmap406 fontmap407 fontmap408 fontmap409 fontmap410 fontmap411 fontmap412 fontmap413 fontmap414 fontmap415 fontmap416 fontmap417 fontmap418 fontmap419 fontmap420 fontmap421 fontmap422 fontmap423 fontmap424 fontmap425 fontmap426 fontmap427 fontmap428 fontmap429 fontmap430 fontmap431 fontmap432 fontmap433 fontmap434 fontmap435 fontmap436 fontmap437 fontmap438 fontmap439 fontmap440 fontmap441 fontmap442 fontmap443 fontmap444 fontmap445 fontmap446 fontmap447 fontmap448 fontmap449 fontmap450 fontmap451 fontmap452 fontmap453 fontmap454 fontmap455 fontmap456 fontmap457 fontmap458 fontmap459 fontmap460 fontmap461 fontmap462 fontmap463 fontmap464 fontmap465 fontmap466 fontmap467 fontmap468 fontmap469 fontmap470 fontmap471 fontmap472 fontmap473 fontmap474 fontmap475 fontmap476 fontmap477 fontmap478 fontmap479 fontmap480 fontmap481 fontmap482 fontmap483 fontmap484 fontmap485 fontmap486 fontmap487 fontmap488 fontmap489 fontmap490 fontmap491 fontmap492 fontmap493 fontmap494 fontmap495 fontmap496 fontmap497 fontmap498 fontmap499 fontmap500 fontmap501 fontmap502 fontmap503 fontmap504 fontmap505 fontmap506 fontmap507 fontmap508 fontmap509 fontmap510 fontmap511 fontmap512 fontmap513 fontmap514 fontmap515 fontmap516 fontmap517 fontmap518 fontmap519 fontmap520 fontmap521 fontmap522 fontmap523 fontmap524 fontmap525 fontmap526 fontmap527 fontmap528 fontmap529 fontmap530 fontmap531 fontmap532 fontmap533 fontmap534 fontmap535 fontmap536 fontmap537 fontmap538 fontmap539 fontmap540 fontmap541 fontmap542 fontmap543 fontmap544 fontmap545 fontmap546 fontmap547 fontmap548 fontmap549 fontmap550 fontmap551 fontmap552 fontmap553 fontmap554 fontmap555 fontmap556 fontmap557 fontmap558 fontmap559 fontmap560 fontmap561 fontmap562 fontmap563 fontmap564 fontmap565 fontmap566 fontmap567 fontmap568 fontmap569 fontmap570 fontmap571 fontmap572 fontmap573 fontmap574 fontmap575 fontmap576 fontmap577 fontmap578 fontmap579 fontmap580 fontmap581 fontmap582 fontmap583 fontmap584 fontmap585 fontmap586 fontmap587 fontmap588 fontmap589 fontmap590 fontmap591 fontmap592 fontmap593 fontmap594 fontmap595 fontmap596 fontmap597 fontmap598 fontmap599 fontmap600 fontmap601 fontmap602 fontmap603 fontmap604 fontmap605 fontmap606 fontmap607 fontmap608 fontmap609 fontmap610 fontmap611 fontmap612 fontmap613 fontmap614 fontmap615 fontmap616 fontmap617 fontmap618 fontmap619 fontmap620 fontmap621 fontmap622 fontmap623 fontmap624 fontmap625 fontmap626 fontmap627 fontmap628 fontmap629 fontmap630 fontmap631 fontmap632 fontmap633 fontmap634 fontmap635 fontmap636 fontmap637 fontmap638 fontmap639 fontmap640 fontmap641 fontmap642 fontmap643 fontmap644 fontmap645 fontmap646 fontmap647 fontmap648 fontmap649 fontmap650 fontmap651 fontmap652 fontmap653 fontmap654 fontmap655 fontmap656 fontmap657 fontmap658 fontmap659 fontmap660 fontmap661 fontmap662 fontmap663 fontmap664 fontmap665 fontmap666 fontmap667 fontmap668 fontmap669 fontmap670 fontmap671 fontmap672 fontmap673 fontmap674 fontmap675 fontmap676 fontmap677 fontmap678 fontmap679 fontmap680 fontmap681 fontmap682 fontmap683 fontmap684 fontmap685 fontmap686 fontmap687 fontmap688 fontmap689 fontmap690 fontmap691 fontmap692 fontmap693 fontmap694 fontmap695 fontmap696 fontmap697 fontmap698 fontmap699 fontmap700 fontmap701 fontmap702 fontmap703 fontmap704 fontmap705 fontmap706 fontmap707 fontmap708 fontmap709 fontmap710 fontmap711 fontmap712 fontmap713 fontmap714 fontmap715 fontmap716 fontmap717 fontmap718 fontmap719 fontmap720 fontmap721 fontmap722 fontmap723 fontmap724 fontmap725 fontmap726 fontmap727 fontmap728 fontmap729 fontmap730 fontmap731 fontmap732 fontmap733 fontmap734 fontmap735 fontmap736 fontmap737 fontmap738 fontmap739 fontmap740 fontmap741 fontmap742 fontmap743 fontmap744 fontmap745 fontmap746 fontmap747 fontmap748 fontmap749 fontmap750 fontmap751 fontmap752 fontmap753 fontmap754 fontmap755 fontmap756 fontmap757 fontmap758 fontmap759 fontmap760 fontmap761 fontmap762 fontmap763 fontmap764 fontmap765 fontmap766 fontmap767 fontmap768 fontmap769 fontmap770 fontmap771 fontmap772 fontmap773 fontmap774 fontmap775 fontmap776 fontmap777 fontmap778 fontmap779 fontmap780 fontmap781 fontmap782 fontmap783 fontmap784 fontmap785 fontmap786 fontmap787 fontmap788 fontmap789 fontmap790 fontmap791 fontmap792 fontmap793 fontmap794 fontmap795 fontmap796 fontmap797 fontmap798 fontmap799 fontmap800 fontmap801 fontmap802 fontmap803 fontmap804 fontmap805 fontmap806 fontmap807 fontmap808 fontmap809 fontmap810 fontmap811 fontmap812 fontmap813 fontmap814 fontmap815 fontmap816 fontmap817 fontmap818 fontmap819 fontmap820 fontmap821 fontmap822 fontmap823 fontmap824 fontmap825 fontmap826 fontmap827 fontmap828 fontmap829 fontmap830 fontmap831 fontmap832 fontmap833 fontmap834 fontmap835 fontmap836 fontmap837 fontmap838 fontmap839 fontmap840 fontmap841 fontmap842 fontmap843 fontmap844 fontmap845 fontmap846 fontmap847 fontmap848 fontmap849 fontmap850 fontmap851 fontmap852 fontmap853 fontmap854 fontmap855 fontmap856 fontmap857 fontmap858 fontmap859 fontmap860 fontmap861 fontmap862 fontmap863 fontmap864 fontmap865 fontmap866 fontmap867 fontmap868 fontmap869 fontmap870 fontmap871 fontmap872 fontmap873 fontmap874 fontmap875 fontmap876 fontmap877 fontmap878 fontmap879 fontmap880 fontmap881 fontmap882 fontmap883 fontmap884 fontmap885 fontmap886 fontmap887 fontmap888 fontmap889 fontmap890 fontmap891 fontmap892 fontmap893 fontmap894 fontmap895 fontmap896 fontmap897 fontmap898 fontmap899 fontmap900 fontmap901 fontmap902 fontmap903 fontmap904 fontmap905 fontmap906 fontmap907 fontmap908 fontmap909 fontmap910 fontmap911 fontmap912 fontmap913 fontmap914 fontmap915 fontmap916 fontmap917 fontmap918 fontmap919 fontmap920 fontmap921 fontmap922 fontmap923 fontmap924 fontmap925 fontmap926 fontmap927 fontmap928 fontmap929 fontmap930 fontmap931 fontmap932 fontmap933 fontmap934 fontmap935 fontmap936 fontmap937 fontmap938 fontmap939 fontmap940 fontmap941 fontmap942 fontmap943 fontmap944 fontmap945 fontmap946 fontmap947 fontmap948 fontmap949 fontmap950 fontmap951 fontmap952 fontmap953 fontmap954 fontmap955 fontmap956 fontmap957 fontmap958 fontmap959 fontmap960 fontmap961 fontmap962 fontmap963 fontmap964 fontmap965 fontmap966 fontmap967 fontmap968 fontmap969 fontmap970 fontmap971 fontmap972 fontmap973 fontmap974 fontmap975 fontmap976 fontmap977 fontmap978 fontmap979 fontmap980 fontmap981 fontmap982 fontmap983 fontmap984 fontmap985 fontmap986 fontmap987 fontmap988 fontmap989 fontmap990 fontmap991 fontmap992 fontmap993 fontmap994 fontmap995 fontmap996 fontmap997 fontmap998 fontmap999 fontmap1000 fontmap1001 fontmap1002 fontmap1003 fontmap1004 fontmap1005 fontmap1006 fontmap1007 fontmap1008 fontmap1009 fontmap1010 fontmap1011 fontmap1012 fontmap1013 fontmap1014 fontmap1015 fontmap1016 fontmap1017 fontmap1018 fontmap1019 fontmap1020 fontmap1021 fontmap1022 fontmap1023 fontmap1024 fontmap1025 fontmap1026 fontmap1027 fontmap1028 fontmap1029 fontmap1030 fontmap1031 fontmap1032 fontmap1033 fontmap1034 fontmap1035 fontmap1036 fontmap1037 fontmap1038 fontmap1039 fontmap1040 fontmap1041 fontmap1042 fontmap1043 fontmap1044 fontmap1045 fontmap1046 fontmap1047 fontmap1048 fontmap1049 fontmap1050 fontmap1051 fontmap1052 fontmap1053 fontmap1054 fontmap1055 fontmap1056 fontmap1057 fontmap1058 fontmap1059 fontmap1060 fontmap1061 fontmap1062 fontmap
```

Para abreviar a notação usaremos o comando `plot` que é a representação no plano da exponencial:

Para obter linhas mais grossas usamos

O comando `plot` tira um parênteses: `plot(x, y)`.
 Vamos usar bastante o comando `plot`. A dificuldade que ele apresenta é que não se pode juntá-lo diretamente ao `plot`. Para isto, deveremos tirar seu comando gráfico, o que é feito da seguinte maneira usando o

`>`

Aqui `>` não mostra o gráfico porém seguido de `plot` nos fornece o comando gráfico embutido em `plot` que é o `plot`.
 No computador toda curva é traçada com o comando `plot` para um certo número de pontos, e o `plot` é também um acumulo de um número grande de pontos.
 Podemos abreviar este comando pondo

`>`

onde $x = x(t)$ é a equação paramétrica da curva dada como função da variável t .
 Para simplificar os exemplos vamos introduzir

`>` `>` `>`

Observe-se que `plot` significa que quando não mencionarmos nada a variável de `plot` será de `plot`.
 O restante dos comandos básicos serão introduzidos à medida de sua necessidade.

3. Ciclóides Lineares

No nosso primeiro exemplo vamos rolar uma circunferência sobre uma reta. O procedimento é igual ao de um filme, onde preparamos um certo número de quadros para fazer a animação.

Vamos montar nossos comandos. Primeiramente exibimos a reta suporte do movimento: `plot` e adicionamos a ela a grossura `plot` afim de ressaltá-la. Vamos pensar nosso movimento no tempo.

Fixado θ , damos a circunferência de raio unitário e centro O . Fixemos um ponto nesta circunferência de tal modo que no tempo t ele esteja sobre a reta, i.e., suas coordenadas sejam $(\cos t, \sin t)$. Assim, na figura ao lado, a distância OP é igual ao arco OT . No tempo $t + \Delta t$ a circunferência percorreu Δt unidades, i.e., um arco de comprimento Δt e aí nosso ponto fixo terá coordenadas $(\cos(t + \Delta t), \sin(t + \Delta t))$. Cada quadro terá um ponto fixo que vamos colorir de azul, como também as circunferências que os contém. Esta parte do comando ficará

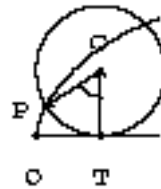


Figura 1: cicloide linear

Para termos uma visão da curva vamos traçá-la como um certo número de pontos e para tal vamos fazer a lista de pontos, em vermelho; usamos o comando `plot`.

e assim, para fazer a lista dos quadros usamos outra vez o comando `plot`. Observe-se que usando `plot` estamos na realidade formando uma tabela com 20 vezes 10 elementos, i.e., a variação do t é $\frac{\pi}{10}$. Aqui, se quisermos aumentar o número de quadros ou o número de pontos teremos que mexer no passo, pois o comprimento do intervalo já foi prefixado em 20.

Assim, nosso resultado final ficará

Se quisermos uma hipociclóide ou uma epiciclóide basta prender nosso ponto numa circunferência concêntrica com a dada, o que corresponde a multiplicar r por um certo fator k . Se $k > 1$ teremos uma epiciclóide e se $k < 1$ teremos uma hipociclóide.

Uma variante para melhorar o gráfico da curva é substituir

por

ou, ainda,

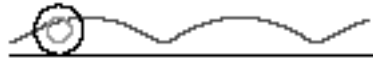


Figura 2: epicloide



Figura 3: cicloide

Variando a amplitude e a velocidade de deslocamento do ponto teremos a programação final em função dos parâmetros r que é a distância do ponto móvel ao centro R e do parâmetro ω que é a velocidade angular do ponto P .

Se quisermos ter uma melhor visão de onde o ponto desliza podemos acrescentar no final a sua circunferência em cor verde:

Outro efeito que podemos dar à nossa animação é o de rastreamento. Ele con-



Figura 4: hipocicloide

siste de ir traçando a curva a medida que nosso ponto se movimentava. Isto pode ser facilmente obtido dos comandos anteriores tomando a variação do

. Nosso comando fica:

Observe-se também que todos os nossos comandos têm dentro o comando que é necessário para que as expressões escritas saiam em forma de equações paramétricas.

Finalmente para obtermos a animação selecionamos nossos vinte quadros e aplicamos . Em geral temos que ajustar a velocidade que o programa apresenta os quadros. No com o botão da direita do mouse vai-se no menu , vem um quadro. Seleciona-se , e , e modifica-se , por exemplo, para ; isto quer dizer cinco segundos por quadro. Aperta-se o ratinho em , e sai-se deste quadro. No vai-se no menu , seleciona-se e lá escolhe-se o número de quadros por segundo e manda-se aplicar com .

4. Ciclóides Circulares

Neste caso trata-se de uma circunferência rolando sobre outra circunferência. Aqui, as etapas do nosso procedimento são:

Tomamos a circunferência básica de centro na origem e raio unitário. Partindo-se do ponto , no instante a circunferência deslizante terá seu centro na normal que passa por este ponto e seu raio será , ou seja, seu centro é o ponto . A medida que a circunferência rola sobre a primeira, o ponto fixo irá descrever a cicloide. Vamos trabalhar numa situação um pouco mais geral; não vamos querer que a velocidade angular do ponto seja a mesma da velocidade de sua circunferência, e também que o raio desta circunferência

não é necessariamente igual a r . Assim, o ponto no tempo t estará na posição (x, y) e esta será a equação do movimento:

$$x = r \cos(\omega t) + R \cos\left(\frac{R+r}{R} \omega t\right)$$

A nossa cicloide será :

$$x = R \cos(\omega t) + R \cos(2\omega t)$$

Devido a estas funções, as vezes, não serem compiláveis, aparecerá mensagens de erro e para evitá-las incluímos o comando

Observe-se também que temos de usar o comando `clear` para que primeiro o programa calcule as expressões dadas.

Como exemplos sugerimos os seguintes valores: $R = 1$, $r = 0.5$, e $\omega = 1$, ou $R = 1$, $r = 1$, e $\omega = 1$.

Se quisermos adicionar ao gráfico a circunferência fixa usamos o comando

$$plot(1, 1)$$

Nas figuras que se seguem usamos este comando com $R = 1$, $r = 0.5$, e $\omega = 1$, respectivamente, igual a $R = 1$, $r = 1$ e $\omega = 1$ obtendo curvas semelhantes às epicicloides e hipocicloides.

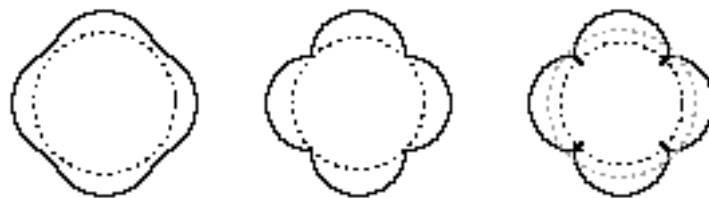


Figura 5: epicicloide, cicloide e hipocicloide circulares

5. Caso Geral

O caso geral é quando dá-se uma curva qualquer, C , que é a base do deslize e a circunferência deslizando tem centro na normal e dista do ponto de contato uma distância d . Seu centro é (x, y) .

Assim, o ponto que descreve a cicloide está numa circunferência de mesmo centro que a deslizante, porém seu raio pode ser diferente. Isto é, a equação fica

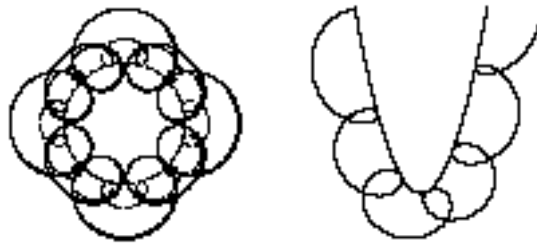


Figura 6: cicloide dupla e cicloide parabolica.

Na figura 6 apresentamos dois exemplos: o da cicloide dupla, i.e., onde $r = R$ é uma cicloide, e o caso onde $r < R$ é uma parábola

6. Curvas Paralelas

O centro C está numa curva que, por construção, é “paralela” a curva γ dada; sua equação é bem simples de se calcular. Vamos trabalhar neste tópico desenvolvendo os comandos apropriados.

Um vetor ortogonal a um vetor dado de coordenadas (x, y) tem coordenadas $(-y, x)$. Assim, definimos $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y, x)$ e o vetor unitário é obtido dividindo este por seu módulo

Assim a curva paralela é definida pelo comando:

Da maneira que construímos o caso geral podemos repetir o processo enquanto o computador tiver memória.

7. Curvas Algébricas

Como já observamos acima as cicloides são curvas algébricas no sentido de que ela existe um polinômio $P(x, y)$ a coeficientes reais tal que todo ponto (x, y) da curva satisfaz a $P(x, y) = 0$ e, reciprocamente, toda solução da equação $P(x, y) = 0$ nos dá um ponto da curva. Vamos calcular a equação de algumas destas curvas. O argumento é simples. No caso da cicloide de equações paramétricas

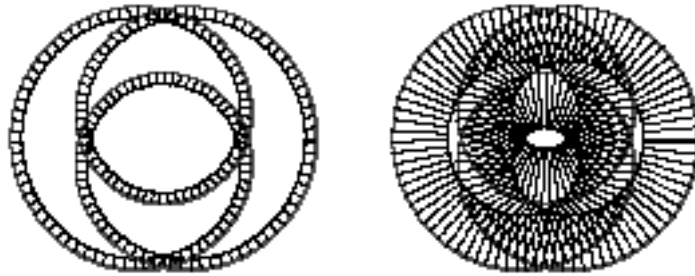


Figura 7: Paralelas à ciclóide 1.2,.2,5 com k igual a .5 e .25.

deveremos eliminar o Seno e Coseno desta relação. Pela fórmula de Moivre estas duas funções são dois polinômios destas funções trigonométricas. Vamos então desenvolver $(\text{Cos}[t] + I \text{Sen}[t])^n$ e calcular sua parte real e sua parte imaginária, obtendo respectivamente $\text{Cos}[n * t]$ e $\text{Sen}[n * t]$. Depois substitui-se Sen e Cos em função da tangente do arco metade e substitui-se $Tg[t/2]$ por t . Os comandos do que nos dão as partes real e imaginaria são

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \text{Cos}^{n-2k} t \text{Sen}^{2k} t$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k+1} \text{Cos}^{n-2k-1} t \text{Sen}^{2k+1} t$$

Aqui \sum é o comando que soma termos de uma seqüência e $\binom{n}{k}$ é o coeficiente binomial. Assim, substitui-se Cos por $(1-t^2)/(1+t^2)$ e Sen por $(2*t)/(1+t^2)$ e eliminando-se denominadores teremos duas equações:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^{n-2k} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k+1} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^{n-2k-1} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2k+1}$$

Agora a equação da curva é dada por eliminação de

$$\begin{aligned} (1+t^2)^n * eq11[a, r, n] &== 0 \\ (1+t^2)^n * eq12[a, r, n] &== 0 \end{aligned}$$

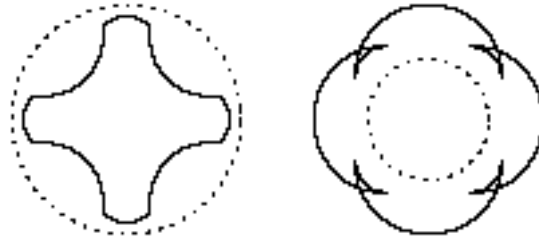


Figura 8: à esquerda $k=.5$ e à direita $k=-.5$.

Por exemplo, $\text{Cycloid}[1.2, 2, 6]$ será a seguinte equação de grau 6 :

$$\begin{aligned}
 &3x^6 - 6x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4x - 2x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^6 \\
 &4x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 6x^3 - 2x^2 - 2x + 4x^2 - 2x^3 + 8x^4 - 6x^5 + 2x^6 \\
 &4x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 8x^3 - 6x^2 + 2x - 4x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 6x^5 + 2x^6 - 2x^7 + 4x^8 \\
 &4x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x
 \end{aligned}$$

Estas ciclóides nos permitem também exibir curvas algébricas espaciais. Basta considerarmos o comando `SpaceCurve` e adicionarmos à equação plana uma terceira coordenada também função trigonométrica. Por exemplo:

8. Exemplos

Vamos apresentar agora exemplos envolvendo paralelas à ciclóide.

Nosso primeiro exemplo é de paralelas à ciclóide `1.2,-2,6` com $k=.5$ e $-.5$, usando o comando

O outro bloco de exemplos usa o comando seguinte que depende de `SpaceCurve` e vamos nos referir a curva dando esta terna de números. Nosso comando é:

São cinco os nossos exemplos.

Finalmente, devemos observar que as ciclóides são apresentadas como exercícios tanto em livros de Cálculo quanto em livros de Geometria Diferencial. Um dos nossos objetivos é apresentar uma boa variedade de curvas. Ciclóide também são tratadas no capítulo II da referência [3], aqui a maneira de estrutura de programação é diferente da nossa.

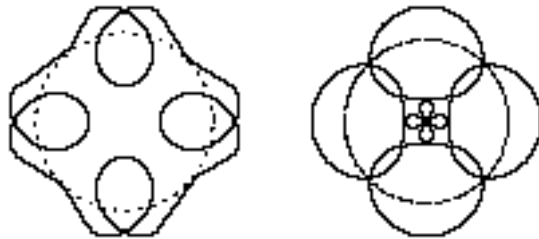


Figura 9: à esquerda $(5,-.5,5)$ e à direita $(5,.5,5)$

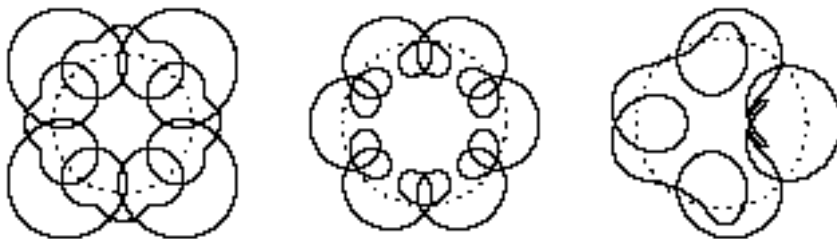


Figura 10: à esquerda $(13,-.5,9)$, centro $(7,.5,7)$ e à direita $(5,-.5,7)$.

Nosso trabalho com o comando `Circle` e com `Circle` segue as orientações de [2] e [3]. Por último, devemos observar que podemos acrescentar legendas às figuras; com o auxílio do comando `TextForm`. Preferimos usar o LaTeX. Para um esclarecimento sobre este comando, referimos o leitor ao manual do programa [6] ou a [1].

Referências

- [1] N. Allan - Internet Site : <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/nelo>, Fevereiro, 2000.
- [2] T.W. Gray and J. Glynn, "Exploring Mathematics with `Mathematica`", Addison-Wesley, California, 1991.
- [3] R.E. Maeder, "Programming in Mathematica", Addison-Wesley, N.York, 1991.
- [4] E.V. Swokowski, "Cálculo com Geometria Analítica". Vol.2, 2^a ed., Makron, São Paulo, 1995.
- [5] S. Wagon, "Mathematica in Action", Freeman Company , 1991.
- [6] S. Wolfram, "The Mathematica Book", Cambridge University Press, 1996.