Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **1**, No. 2 (2000), 277-288.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Métodos DIMSIM do tipo 3

C.A.Z. BARCELOS[1], Departamento de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Resumo. Neste trabalho, introduzimos uma nova formulação para as condições de ordem de uma sub-classe dos métodos lineares gerais, os métodos DIMSIM (*Diagonally Implicit Multi-Stage Integration Methods*). Aplicamos as condições de ordem a uma classe de métodos DIMSIM adequada ao processamento em paralelo de problemas de valor inicial não *stiff*, chamados de métodos do tipo 3.
Os métodos DIMSIM são definidos por quatro matrizes A, U, B e V e, tradicionalmente, a matriz U é tomada como sendo a matriz identidade. Apresentamos resultados e uma análise sobre os métodos com matriz U $\neq$ I.

1. Preliminares

Neste trabalho vamos considerar métodos para a solução numérica do problema de valor inicial autônomo,

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{1.1}$$

onde f é uma função suficientemente diferenciável. Vamos encontrar a solução $y(t)$, $y : [0, \infty) \to R^n$, usando Métodos Lineares Multi-Estágios Diagonalmente Implícitos (DIMSIM - Diagonally Implicit Multi-Stage Integration Methods) dados por:

$$\begin{aligned} Y_i &= h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}F_j + \sum_{j=1}^{r} u_{ij}y_j^{n-1}, \qquad i = 1,2,...,s, \\ F_i &= f(Y_i) \qquad \mathsf{i} = 1,2,...,\mathsf{s}, \\ y_i^n &= h\sum_{j=1}^{s} b_{ij}F_j + \sum_{j=1}^{r} v_{ij}y_j^{n-1}, \qquad i = 1,2,\ldots,r. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Escolhemos o tamanho de passo $h > 0$, e geramos aproximações $y^n \cong y(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ iniciando o processo com a condição y^0, chamada de condição inicial. Neste trabalho usaremos tamanho de passo h fixo, ou seja, $t_n = t_0 + nh$. Vamos supor que

[1] celiazb@ufu.br

os Y_i, i=1,2,...s são aproximações de ordem q para a solução em pontos $t_{n-1} + c_i h$ [1, 2].

Os métodos numéricos tradicionalmente usados para a solução de (1.1), são os métodos de Runge-Kutta e os métodos lineares de passo múltiplo. As vantagens e desvantagens desses métodos são bastante conhecidas [3], o baixo custo de implementação e as facilidades de estimar o erro local são os grandes atrativos desses métodos. O uso de processamento em paralelo é bastante limitado para ambos os métodos [4].

Durante os últimos 20 anos foram propostas várias modificações dessas duas classes, como por exemplo os pseudo-Runge-Kutta e os métodos do tipo Previsor-Corretor. Em 1966, J.Butcher introduziu os métodos lineares gerais combinado as características dos métodos de Runge-Kutta e os métodos lineares gerais. Esse mesmo pesquisador [1], selecionou dentro dessa grande classe dos métodos lineares gerais, os chamados métodos DIMSIM, que possuem características que os tornam convenientes do ponto de vista computacional, evitando a solução de sistemas de equações não lineares de alta ordem, exigidas na implementação de um método de Runge-Kutta do tipo implícito.

Esses métodos (1.2) podem ser representados em forma de um arranjo matricial $(s + r) \times (s + r)$, chamada de arranjo de Butcher [1]:

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{U} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{V} \end{array} \tag{1.3}$$

A matriz A é que determina os custos na implementação do método e para diminuir esses custos, Butcher em [1] considera um método DIMSIM como sendo um método linear geral (1.3), para o qual a matriz A é triangular inferior. Dependendo da estrutura dessa matriz, os métodos foram divididos em 4 classes, ou tipos, que são apropriados para sistemas de equações diferenciais ordinárias do tipo *stiff* ou não, e para processamento em paralelo ou sequencial. A matriz A toma a seguinte forma:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \lambda & & 0 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & \quad . & . \\ . & . & & \qquad . & . \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Um método diz-se do *tipo* 1 quando $\lambda = 0$, e do *tipo* 2 quando $\lambda \neq 0$. Esses métodos são adequados para processamento sequencial de problemas não *stiff* e de problemas *stiff*, respectivamente. Tipo 3 é a classe de métodos para os quais $A = 0$ e tipo 4 é quando $A = \lambda I$. Os métodos do tipo 3 e 4 são adequados para o processamento em paralelo [1] de problemas não *stiff* e *stiff*, respectivamente.

Este trabalho está organizado de modo a apresentar, na secção 2, uma nova formulação para os teoremas de ordem de um método DIMSIM diferente daquela dada nos teoremas 1 e 2 em [1, 2]. Tal formulação simplifica as equações de ordem, pois só utiliza os parâmetros do método dados pelas matrizes A,B, U e V, evitando o cálculo de B_0, B_1, B_2 e da função ϕ exigidas nos teoremas 1 e 2. Na secção 3, as condições de ordem são aplicadas aos métodos DIMSIM do tipo 3. Na secção 4, constrói-se uma classe de métodos do tipo 3 utilizando as equações de ordem (teoremas 3 e 4). A secção 5 apresenta condições de equivalência entre dois métodos DIMSIM. Conclui-se, nesta secção, que definir tais métodos com matriz U diferente da matriz identidade, só faz sentido se a matriz $U_1 \neq I$ não for inversível. Caso contrário, existe uma transformação linear que transforma o metodo M_1 com matriz $U_1 \neq I$, num outro método M_2 com U$= I$. Os métodos M_1 e M_2 têm a mesma ordem de convergência e apresentam as mesmas características de estabilidade (teorema 14). Este artigo termina com uma discussão sobre os resultados obtidos.

2. Condição de Ordem

Consideremos a equação:

$$y_i^{[n]} = \sum_{k=0}^{p} \alpha_{ik} y^k(t_n) h^k + O(h^{p+1}), \tag{2.1}$$

onde $y^0(t_n)$ e α_{ik} são parâmetros reais para quaisquer i e k.

Aqui, como em [1, 3, 4, 5, 6], admitimos que, se os valores iniciais $y_i^{[0]}$ são dados por (2.1) então os valores $y_i^{[1]}$, obtidos no término do primeiro passo, também serão dados por (2.1). Admitiremos também que os valores intermediá rios, ou seja, os valores dos estágios internos Y_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, são aproximações de ordem q para a solução nos pontos $t_i = t_{n-1} + hc_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, ou seja $Y_i = y(t_{n-1} + c_i h) + O(h^{q+1})$, $n = 1, 2, \ldots,$. Tais aproximações são dadas por:

$$Y_i = \sum_{k=0}^{q} \frac{c_i^k}{k!} y^k(t_0) h^k + O(h^{q+1}). \tag{2.2}$$

As condições para a determinação da ordem de um método foram dadas em [1], (pag. 356) e [2] (pag.454), pelos seguintes teoremas:

Teorema 1 *Seja r=s=p. Então o método DIMSIM*

$$\begin{array}{c|c} A & U \\ \hline B & V \end{array}$$

com Ve=e, é de ordem p e ordem de estágio q se, e somente se, $B = B_0 - AB_1 - VB_2 + VA$, *onde o (i,j)-elemento de* B_0,B_1 *e* B_2 *são dados respectivamente por:*

$$\frac{\int_0^{1+c_i} \phi_j(x)\,dx}{\phi_j(c_j)}, \qquad \frac{\phi_j(1+c_I)}{\phi_j(c_j)} \qquad e \qquad \frac{\int_0^{c_i} \phi_j(x)\,dx}{\phi_j(c_j)}$$

e ϕ_j *é dada por*

$$\phi_j = \prod_{k \neq j} (x - c_k), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, s.$$

Teorema 2 *Seja r=s e U=I. Então o método* (1.2) *é de ordem de estágio q=s=r e ordem p=q+1 se, e somente se,* $B = B_0 - AB_1 - VB_2 + VA$, *e*

$$Bc^{p-1} = \frac{(u+c)^p - c^p}{p} - A((u+c)^{p-1} - c^{p-1}) - (p-1)!(V - I)\alpha_p,$$

onde $\alpha_p = (\alpha_{1p}, \alpha_{2p}, ..., \alpha_{rp})^T$.

O uso de tais teoremas para a verificação da ordem de um método não é de fácil manuseio. Vamos dar a seguir uma outra formulação para a estrutura das condições de ordem de um método, a qual nos permite a verificação da ordem de um método de uma maneira direta e prática.

Nos dois teoremas que se seguem, mostramos como as condições de ordem de um método DIMSIM podem ser obtidas usando simplesmente as matrizes A, B, U, V e o vetor $c = (c_1, c_2, \ldots, c_s)^T$.

Teorema 3 *Um método DIMSIM tem ordem de estágio q se, e somente se, existirem vetores* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *tais que*

$$Ie - U\alpha_0 = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{c^k}{k!} - \frac{Ac^{k-1}}{(k-1)!} - U\alpha_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, q, \tag{2.4}$$

onde

$$c^k = (c_1^k, c_2^k, \ldots, c_s^k)^T, \qquad e = (1, 1, \ldots, 1)^T \qquad \text{e} \qquad c^0 = e.$$

demonstração: Usando (2.1) e (2.2), foi mostrado em [1] que

$$e^{cz} = zAe^{cz} + Uw + O(z^{(q+1)}), \tag{2.5}$$

onde e^{cz} representa o vetor com componentes $\exp(c_i z)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, e w denota o vetor com componentes dadas por,

$$w_i = \sum_{k=0}^{p} \alpha_{ik} z^k, \qquad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.6}$$

Pela equação (2.5) temos:

$$P_i(z) = e^{c_i z} - \sum_{j=1}^{s} z a_{ij} e^{c_j z} - \sum_{j=1}^{r} u_{ij} w_j + O(z^{(q+1)}), \qquad \text{para cada} \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Substituindo em $P_i(z)$ a igualdade $e^z = (1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^p}{p!})+O(z^{p+1})$, temos:

$$\begin{aligned}P_i(z) = &\left[1+(c_iz)+\frac{(c_iz)^2}{2!}+\frac{(c_iz)^3}{3!}+\cdots+\frac{(c_iz)^q}{q!}\right]\\ &-\sum_{j=1}^{s} a_{ij}z\left[1+(c_jz)+\frac{(c_jz)^2}{2!}+\frac{(c_jz)^3}{3!}+\cdots+\frac{(c_jz)^q}{q!}\right]\\ &-\sum_{j=1}^{r} u_{ij}w_j + O(z^{q+1}).\end{aligned}$$

Como w_i é dado por (2.6), segue que

$$P_i(z) = \left[1-\sum_{j=1}^{s} u_{ij}\alpha_{j0}\right] + \sum_{k=0}^{q}\left[\frac{c_i^k}{k!} - \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\frac{c_j^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{j=1}^{r} u_{ij}\alpha_{jk}\right] z^k + O(z^{q+1}).$$

Igualando os coeficientes de z^k, $k=0,1,\ldots q$, a zero em cada P_i, e tomando $\alpha_k = (\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots,\alpha_{sk})$ para $k=0,1,\ldots q$, obtemos as equações (2.3) e (2.4). ■

Teorema 4 *Um método* DIMSIM *tem ordem p se, e somente se, existem vetores* $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_q$, *tais que*

$$(I-V)\alpha_0 = 0, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_{k-j}}{j!} - B\frac{c^{k-1}}{(k-1)!} + (I-V)\alpha_k = 0, \quad k=1,2,\ldots,p, \tag{2.8}$$

onde V *e* B *são matrizes dadas,* I *é a matriz identidade e* c^0 *e* c^k *são como no teorema anterior.*

demonstração: Também em [1] mostrou-se, usando (2.1) e (2.3), que vale a seguinte expressão:

$$e^z w_i = \sum_{j=1}^{s} z b_{ij} e^{c_j z} + \sum_{j=1}^{r} v_{ij} w_j + O(z^{(p+1)}) \qquad i=1,2,\ldots,s,$$

onde $B=(b_{ij})$ é uma matriz $r\times s$, $V=(v_{ij})$ é a matriz $r\times r$ dada na partição (1.3) e w_i é dado por (2.6). Procedendo como no teorema anterior, definimos os seguintes polinômios $Q_i(z)$ para i=1,2,...,s:

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= e^z w_i - \sum_{j=1}^{s} z b_{ij} e^{c_j z} - \sum_{j=1}^{r} v_{ij} w_j + O(z^{(p+1)}) \\
&= (\ 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^p}{p!})(\alpha_{i0} + \alpha_{i1} z + ... + \alpha_{iq} z^q) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{s} b_{ij} z \left[1 + (c_i z) + \frac{(c_i z)^2}{2!} + \frac{(c_i z)^3}{3!} + \cdots + \frac{(c_i z)^p}{p!} \right] \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r} v_{ij} w_j + O(z^{p+1}).
\end{aligned}
$$

Substituindo w_i em Q_i, encontramos:

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) = {} & \left[\alpha_{i0} - \sum_{j=1}^{r} v_{ij} \alpha_{j0} \right] + \left[\alpha_{i0} + \alpha_{i1} - \sum_{j=1}^{s} b_{ij} - \sum_{j=1}^{r} v_{ij} \alpha_{j1} \right] z \\
& + \left[\alpha_{i2} + \alpha_{i1} + \frac{\alpha_{i0}}{2!} - \sum_{j=1}^{r} b_{ij} c_j - \sum_{j=1}^{r} v_{ij} \alpha_{j2} \right] z^2 + \cdots \\
& + \left[\frac{\alpha_{i0}}{p!} + \frac{\alpha_{i1}}{(p-1)!} + \cdots + \alpha_{ip} - \sum_{j=1}^{r} b_{ij} \frac{c_j^{p-1}}{(p-1)!} - \sum_{j=1}^{r} v_{ij} \alpha_{jp} \right] z^p + O(z^{p+1}).
\end{aligned}
$$

Assim, o método *DIMSIM* tem ordem p se, e somente se, os coeficientes de z^k em $Q_i(z)$ forem iguais a zeros para $k = 1, 2, \ldots, p$. Desta forma, temos verificadas as equações (2.7) e (2.8) se tomarmos $\alpha_k = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{sk})$ para $k = 1, 2, \ldots, p$. ■

Decorre de imediato desse teorema que:

Teorema 5 *O método* (1.2) *é consistente se, e somente se, a ordem de estágio q e a ordem p do método é pelo menos igual a* 1*. Um método DIMSIM é consistente se existem vetores α_0, α_1 e c tais que as relações abaixo estejam satisfeitas:*

- $\mathrm{U}\alpha_0 = e$ $\quad$ (r_1)
- $c = Ae + \alpha_1$ $\quad$ (r_2)
- $\mathrm{V}\alpha_0 = \alpha_0$ $\quad$ (r_3)
- $\mathrm{B}\ e + \mathrm{V}\alpha_1 = e + \alpha_1$ $\quad$ (r_4)

3. Alguns resultados considerando U=I em métodos do tipo 3.

Em [1, 3, 4, 5] foram construídos métodos DIMSIM considerando a matriz U sempre igual à matriz identidade I e a matriz V de posto 1,

$$\mathrm{V}= \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \cdots & \mathrm{v}_s \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \cdots & \mathrm{v}_s \\ \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \cdots & \mathrm{v}_s \end{bmatrix}$$

com um único autovalor diferente de zero e igual a um, ou seja:

$$\sum_{j=1}^{s} v_j = 1. \tag{3.1}$$

Em [6], foram construídos exemplos de métodos com matriz U=I e matriz V satisfazendo (3.1), porém de posto ≥ 1.

Para os métodos DIMSIM do tipo 3, temos os seguintes resultados:

Teorema 6 *Um método do tipo* 3*, com $U = I$ é consistente se, e somente se,* $\alpha_1 = c$.

demonstração: A relação (2.4) é satisfeita para $q = 1$ se, e somente se, $c = Ae + \alpha_1$. Assim, para um método do tipo 3, α_1 deve ser igual a c a fim de que a ordem do estágio seja pelo menos 1.

Portanto, um método DIMSIM do tipo 3, consistente com $U = I$, deve satisfazer:

$$\alpha_0 = e, \quad \text{por} \quad (r_1) \qquad \text{e} \qquad c = \alpha_1 \quad \text{por} \quad (r_2).$$

De (r_3) segue que $Ve = e$ e, finalmente, por (r_4) obtemos $Be + V\alpha_1 = e + \alpha_1$ para algum vetor α_1. ■

Teorema 7 *Seja r=s=*2 *e U=I. Um método DIMSIM do tipo* 3 *com*

$$V = \begin{bmatrix} v & 1\text{-}v \\ v & 1\text{-}v \end{bmatrix}$$

é consistente se, e somente se, $\sum\limits_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+1} b_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} c_i,$ *onde* $c = (c_1, c_2)^T$.

demonstração: Pelas condições de consistência de um método DIMSIM, temos que Be+V$\alpha_1 = e + c$ deve ser satisfeito. Resolvendo este sistema, temos a expressão acima. ■

O teorema acima nos fornece condições necessárias e suficientes para a consistência dos métodos em questão. Essas condições relacionam a matriz B com o vetor c. Podemos obter resultado equivalente relacionando a matriz V com a matriz B.

Corolário 8 *Nas mesmas condições do teorema anterior temos que*

$$\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+1}b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+1}c_i$$

é equivalente à condição

$$v\sum_{j=1}^{2} b_{1j} + (1-v)\sum_{j=1}^{2} b_{2j} = 1.$$

demonstração: Basta substituir o valor de c_1 ou c_2 no sistema (r_4). ∎

Corolário 9 *Um método DIMSIM do tipo* 3 *com* $U = I$ *tem ordem de estágio* q.

demonstração: Tomando $\alpha_0 = e$, $\alpha_1 = c$, $\alpha_2 = \frac{c^2}{2!}, \ldots, \alpha_k = \frac{c^k}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots, q$, temos que (2.3) e (2.4) estão satisfeitas. ∎

Corolário 10 *Sejam r=s e A a matriz nula. Um método DIMSIM com U=I tem ordem de estágio q se, e somente se,*

$$w_j = 1 + c_j z + \frac{1}{2!}(c_j z)^2 + \frac{1}{3!}(c_j z)^3 + \ldots + \frac{1}{q!}(c_j z)^q$$

para quaisquer escolhas de matrizes B e V.

Teorema 11 *Um método DIMSIM do tipo* 3 *consistente, com U=I e* $c_i = 1 - i$, *é um método de passo múltiplo.*

demonstração: Com as hipóteses do teorema, temos:

$$Y_i = y_i^{n-1} = y_1^{n-i} \tag{3.2}$$

pois, pela equação do método (1.2) vem que

$$Y_i = h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}F_j + \sum_{j=1}^{r} u_{ij}y_j^{n-1} = y_i^{n-1} = y_i\ (t_{n-1}), \tag{3.3}$$

visto que $u_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $u_{ij} = 1$ para $i = j$.

Como $Y_i = y(t_{n-1} + c_i h) + O(h^{p+1}) = y(t_{n-2} + (c_i + 1)h) + O(h^{p+1})$, fazendo $c_i = 1 - i$, $i = 1, 2, ..., s$, temos:

$$y_1^{n-1} = Y_1 = y_1\ (t_{n-1}) = y(t_n - h) + O(h^{P+1}),$$

$$Y_2 = y_2\ (t_{n-1}) = y(t_{n-2}) + O(h^{P+1}) = y(t_{n-1} - h) + O(h^{P+1}) = y_1^{n-2}.$$

Sucessivamente,

$$Y_i = y_i^{n-1} = y_1^{n-i}.$$

Por (3.2) e (3.3), podemos observar que y_i^{n-1} é uma aproximação de ordem p para $y(t_{n-1} + c_i h)$. Considerando $F_i = f(Y_i)$ e substituindo esses valores na terceira equação de (1.2), encontramos que:

$$y_i^n = h\sum_{j=1}^{s} b_{ij}f(Y_i) + \sum_{j=1}^{r} v_{ij}y_j^{n-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

que é um método linear de passo múltipo.

4. Exemplo de métodos DIMSIM do tipo 3

Nesta seção vamos dar como exemplo de construção de métodos, uma classe de métodos DIMSIM consistentes de ordem 3.

Consideremos a seguinte classe de métodos DIMSIM

$$\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline b_{11} & b_{12} & v & 1-v \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 1 \end{array} \tag{4.1}$$

Pelo teorema 5, temos que o método será consistente se satisfizer as condições dadas em (r_1), (r_2), (r_3) e (r_4). Daí, tem-se que $\alpha_0 = e$, $\alpha_1 = c$ e as seguintes equações devem estar satisfeitas:

$$b_{11} + b_{12} = 1 + (1-v)(c_1 - c_2) \tag{e1}$$

$$b_{21} + b_{22} = 1 \tag{e2}$$

Pelas condições de ordem dadas pelos teoremas 3 e 4, o método tem ordem 3 e ordem de estágio 2 se:

$$\frac{1}{2} + (1 - b_{22})(c_2 - c_1) = 0 \tag{e3}$$

e

$$\frac{1}{2} + (1 - b_{11})c_1 + (1-v)\frac{c_1^2}{2} - b_{12}c_2 + (v-1)\frac{c_2^2}{2} = 0. \tag{e4}$$

Tomando $\alpha_1 = c = (0, -2/3)^T$, obtemos, das equações acima, que:
$b_{11} = \dfrac{25}{12} - \dfrac{1}{3}v$, $\quad b_{12} = -\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{3}v$, $\quad b_{21} = \dfrac{3}{4}$, $\quad b_{22} = \dfrac{1}{4}$ e $\alpha_2 = (0, 2/9)^T$.

Se tomarmos $\alpha_3 = (a, b)^T$ e $v = \dfrac{-7 + 27(b-a)}{2 + 27(b-a)}$, a equação de ordem (2.8) se verifica, garantindo, com isso, ordem 3 para o método (4.1).

Além disso, $\alpha_3 = (a, b)^T$ deve ser escolhido de modo que $a - b \neq 2/27$ e $v| < 1$ para a matriz V ser de potência limitada, condição necessária para a estabilidade do método. A título de ilustração registramos que se tomarmos, por exemplo, b=5/27 e a=0 o erro local será menor ou igual a 0.2299 h^4.

Aplicando o Corolário 10 observamos que os vetores w_i são: $w_1 = 1 + az^3$ e $w_2 = 1 - \dfrac{2}{3}z + \dfrac{2}{9}z^2 - \dfrac{b}{6}z^3$.

5. Métodos Equivalentes

A ordem de um método DIMSIM e as propriedades de estabilidade estão diretamente relacionadas com os parâmetros do método, ou seja, com as matrizes A,B,U e V.

Analisando os resultados obtidos em [1, 3, 4, 5] para os métodos DIMSIM observamos que sempre se considera U=I, sem nenhuma menção sobre o outro caso, isto é, U$\neq$I. Na tentativa de obter parâmetros para os quais os métodos apresentam boas qualidades, isto é, ordem de consistência adequada e estabilidade, pergunta-se: *"Porque que não explorar o caso U diferente da matriz Identidade?"* Como resposta a essa pergunta, verificamos que dois métodos diferentes com mesmo número de estágios podem ter a mesma ordem e as mesmas propriedades de estabilidade e, portanto, eles são iguais dentro desse ponto de vista.

Tentando responder à uma outra pergunta *"Em quais situações um método DIMSIM com U$\neq$ I é equivalente e pode ser transformado em um outro método DIMSIM com U=I ?"*, enunciamos os seguintes resultados:

Definição 12 *Dizemos que dois métodos DIMSIM são equivalentes quando tiverem a mesma ordem e quando ambos apresentarem as mesmas características de estabilidade.*

A estabilidade de um método está relacionada com sua matriz de estabilidade K(z). Aplicando o método (1.2) ao problema teste $\dot{y}(t) = \mu y(t)$, sendo μ um parâmetro complexo, tal que, Re(μ) ≤ 0, obtemos:

$$\mathrm{y}^{[n]} = \mathrm{K(z)}\ \mathrm{y}^{[n-1]}, \quad \text{com} \quad \mathrm{z} = \mathrm{h}\mu \ \text{ e } \ \mathrm{K(z)} = \mathrm{zB(I\text{-}zA)}^{-1}\mathrm{U} + \mathrm{V}.$$

A matriz K(z) será chamada de matriz de estabilidade de (1.2). Ver [3] para maiores informações sobre a matriz de estabilidade.

Consideremos os seguintes métodos DIMSIM:

$\mathrm{M}_1 = \begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathsf{U}_1 \\ \hline \mathsf{B}_1 & \mathsf{V}_1 \end{array}$ e $\mathsf{M}_2 = \begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathsf{U} \\ \hline \mathsf{B} & \mathsf{V} \end{array}$ e seja $\mathsf{T} : \mathcal{M}_{sxs} \to \mathcal{M}_{sxs}$, uma transformação linear inversível tal que:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T}^{-1}\mathrm{U}_1 & = & \mathrm{U} \\ \mathrm{TB}_1 & = & \mathrm{B} \\ \mathrm{TV}_1\mathrm{T}^{-1} & = & \mathrm{V} \\ \mathrm{T}^{-1}\mathrm{U}_1\mathrm{T} & = & \mathrm{U}_1. \end{array}$$

Teorema 13 *A transformação T definida acima transforma um método consistente M_1 de ordem p, num outro método consistente M_2 de mesma ordem.*

demonstração:

afirmação 1 - T transforma métodos consistentes em métodos consistentes.

Para mostrar que M_2 é consistente, se M_1 for consistente, temos que verificar as seguintes igualdades:

- $\mathrm{U}u = e$
- $\mathrm{V}u = u$
- $\mathrm{B}\ e + \mathrm{V}v = u + v$, para algum vetor u e v.

Como M_1 é consistente temos que existem vetores u_1 e v_1 tais que:

- $\mathrm{U}_1 u_1 = e$
- $\mathrm{V}_1 u_1 = u_1$
- $\mathrm{B}_1\ e{+}\mathrm{V}_1 v_1 = u_1 + v_1$

Tomando u=T u_1 e v = T v_1, para a transformação linear T definida acima, temos:

$$\mathrm{Vu} = \mathrm{TV}_1\mathrm{T}^{-1}\mathrm{u} = \mathrm{TV}_1\mathrm{u}_1 = \mathrm{Tu}_1 = u,$$

$$\mathrm{Uu} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{U}_1\mathrm{u} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{U}_1\mathrm{T}\ \mathrm{u}_1 = \mathrm{U}_1\mathrm{u}_1 = \mathrm{e},$$

$$\mathrm{B}_1\mathrm{e} + \mathrm{V}_1\mathrm{v}_1 = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{Be} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{VTv}_1 = \mathrm{T}^{-1}[\mathrm{Be}+\mathrm{Vv}] = \mathrm{T}^{-1}[\mathrm{u}+\mathrm{v}].$$

Como T é uma transformação linear inversível, temos:

$$\mathrm{B}_1\mathrm{e} + \mathrm{V}_1\mathrm{v}_1 = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{u} + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{v} = \mathrm{u}_1 + \mathrm{v}_1.$$

afirmação 2 - T preserva ordem.

Se temos um método DIMSIM dado por M1 com ordem de estágio q, então, por (2.4) e admitindo que $\bar{\alpha}_k = \mathrm{T}^{-1}\alpha_k$, temos:

$$0= \frac{c^k}{k!} - \frac{Ac^{k-1}}{(k-1)!} - U\alpha_k = \frac{c^k}{k!} - \frac{Ac^{k-1}}{(k-1)!} - U_1\bar{\alpha}_k, \quad \mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{q}.$$

Ainda mais, considerando o mesmo $\bar{\alpha}_k$, obtemos, por (2.8),

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\bar{\alpha}_{k-1}}{j!} - B_1\frac{c^{k-1}}{(k-1)!} + (I - V_1)\bar{\alpha}_k = T^{-1}\left[\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_{k-1}}{j!} - B\frac{c^{k-1}}{(k-1)!} + (I-V)\alpha_k\right].$$

Assim, se o método dado por M_1 tem ordem p, então o novo método dado por M_2 tem a mesma ordem p, pois T é uma transformação linear, e vice versa.

afirmação 3 - T preserva as propriedades de estabilidade.

A estabilidade de M_1 é determinada pela seguinte função matricial [2, 3]:

$$\mathrm{K}_1\ (\mathrm{z}) = \mathrm{z}\ \mathrm{B}_1(\mathrm{I{-}zA})^{-1}\ \mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1\mathrm{z},$$

enquanto que K (z) = z B $(\mathrm{I{-}zA})^{-1}$ U + Vz, determina a estabilidade de M_1, z é um escalar complexo.

Mas,

$$\begin{aligned} K_1(z) &= zB_1(I-zA)^{-1}\ U_1 + V_1 z = zT^{-1}B(I-zA)^{-1}T^{-1}U_1T + T_1^{-1}VT \\ &= T^{-1}zB(I-zA)^{-1}T^{-1}U_1T + T_1^{-1}VT, \end{aligned}$$

pois T é uma transformação linear.

Assim, substituindo $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{U}_1$ por U, temos:

$$K_1(z) = T^{-1}(zB(I-zA)^{-1}T^{-1}U + V)T = T^{-1}K(z)T,$$

o que implica que K_1 (z) e K (z) têm os mesmos autovalores. Logo, os métodos M_1 e M_2 têm as mesmas regiões de estabilidade absoluta.

Teorema 14 *Se a matriz $U_1 \neq I$ de um método DIMSIM M_1 consistente for inversível, então M_1 é equivalente a um método M_2 com U=I.*

demonstração: Basta tomar, no teorema anterior, $T = U_1$, assim

$$\begin{array}{llcll} \text{i)} & T^{-1}U_1 & = & I & \Longrightarrow U=I, \\ \text{ii)} & U_1B_1 & = & B, & \\ \text{iii)} & TV_1T^{-1} & = & V & = U_1V_1U_1^{-1}, \end{array}$$

isto é, basta tomar U=I, $B = U_1B_1$ e $V = U_1V_1U_1^{-1}$. ∎

6. Conclusões

Este trabalho descreve as equações de ordem que devem ser satisfeitas por um método DIMSIM de ordem p e ordem de estágio q. A formulação dada para a ordem e ordem de estágio de um método é obtida utilizando-se, simplesmente, os coeficientes do método, tornando extremamente simples a sua aplicação na construção de métodos DIMSIM. Aplicando essas condições em métodos adequados para processamento em paralelo de problemas não *stiff,* denominados de tipo 3, obtemos resultados que devem ser usados na construção e na análise de tais métodos. Como exemplo, descrevemos a construção de uma classe de métodos do tipo 3 e de ordem 3. Trabalhos futuros serão destinados a métodos DIMSIM adequados para processamento em paralelo de problemas *stiff.*

Investigamos a performance da matriz $U = I$ ou $U \neq I$ na composição de (1.3), e concluimos que só se justifica definir métodos DIMSIM com $U \neq I$ caso a matriz U seja não inversível. Caso contrário conseguimos construir um segundo método com $U = I$ com as mesmas propriedades de estabilidade e erro local que o primeiro método.

Agradecimentos: A autora agradece ao *referee* pelas suas valiosas contribuições na revisão deste trabalho.

Referências

[1] J.C. Butcher, Diagonally implicit multi-stage integration methods, *Appl. Numer. Math.,* **11** (1993), 347-363.

[2] J.C. Butcher & Z. Jackiewicz, Diagonally implicit multi-stage integration methods for ordinary differential equations, *BIT*, **33** (1993), 452-472.

[3] J.C. Butcher, "The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods", Wiley, Chischester, England, 1987.

[4] J.C. Butcher, An Introduction to DIMSIMs, *Comp. Appl. Math.,* **14**(1) (1995), 59-72.

[5] Z. Jackiewicz & R. Vermiglio, General linear methods with external stages of different orders, *BIT*, **36** (1996), 688–712.

[6] C.A.Z. Barcelos, Accuracy Results for Diagonally Implicit Multistage Methods, pre-print, Universidade Federal de Uberlândia, 1999.