Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **1**, No. 2 (2000), 345-350.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Uma Caracterização de Grafos Estrelados[1]

M.R. CERIOLI[2], Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e COPPE, Cx.P. 68530, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

J.L. SZWARCFITER[3], Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica e COPPE, Cx.P. 2324, 20001-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. Grafos estrelados são os grafos de interseção de subestrelas de uma estrela. Apresentamos uma caracterização por subgrafos proibidos dos grafos estrelados.

1. Introdução

Classes de grafos e grafos de interseção são tópicos tradicionais em teoria dos grafos e recentemente têm recebido uma atenção redobrada. Livros inteiramente dedicados a estes assuntos são o de Brandstädt, Le e Spinrad [1] e o de McKee e McMorris [10], respectivamente.

A classe dos grafos cordais é uma das classes de grafos mais bem estudadas. Em particular, é definida por subgrafos proibidos e caracterizada como uma classe especial de grafos de interseção. Existem caracterizações por subgrafos proibidos para várias de suas subclasses. De fato, existem caracterizações deste tipo para as classes dos grafos de intervalo (Lekkerkerker e Boland [9]), grafos de intervalo próprio (Roberts [16]), grafos fortemente cordais (Farber [5]), grafos partilhados (Földes e Hammer [6]), grafos de limiar (Chvátal e Hammer [4]) e, recentemente, uma tal caracterização também foi descrita para a classe dos grafos de caminho direcionado (Panda [13]). Porém os problemas de encontrar caracterizações por subgrafos proibidos para as classes dos grafos de caminho não direcionado e de caminho enraizado permanecem em aberto.

Neste artigo, descrevemos uma caracterização por subgrafos proibidos para uma das classes de grafos cordais, a saber, a dos grafos estrelados. Grafos estrelados foram introduzidos por Gustedt [8], no estudo do problema da largura do caminho para grafos cordais. Esta classe também foi considerada por Peng et al. [14], Moscarini et al. [12], Cerioli e Szwarcfiter [3]. Classes relacionadas foram consideradas por McMorris e Shier [11] e Prisner [15].

[1]Teve o apoio parcial do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq, e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro-FAPERJ, Brasil.

[2]cerioli@cos.ufrj.br
[3]jayme@nce.ufrj.br

2. Grafos cordais e grafos estrelados

Todos os grafos considerados são conexos, finitos, simples e não direcionados. Os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo G são representados por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Um vértice é *universal* se é adjacente a todos os outros vértices de G. Dois vértices adjacentes que são adjacentes aos mesmos vértices de G são chamados *gêmeos*. Para $v, w \in V(G)$, a *distância* entre v e w, denotada $d(v, w)$, é o número de arestas em um caminho mais curto de v para w, em G. Para $M \subseteq V(G)$, dizemos que M é uma *clique* quando M induz um subgrafo completo em G. Uma *clique maximal* é uma clique que não está contida propriamente em nenhuma outra. O conjunto M é *dominante* quando todo vértice que não está em M é adjacente a algum vértice de M. Uma clique dominante que é maximal é uma *clique central* de G. Um vértice v é *simplicial* se o conjunto de seus vértices adjacentes é uma clique ou, analogamente, se v está em uma única clique maximal do grafo. Os grafos C_n são os ciclos sem cordas enquanto que os grafos P_n são os caminhos sem cordas, com n vértices.

Um grafo é *cordal* se não contém C_n, $n \geq 4$, como subgrafo induzido [1, 10].

Um grafo cordal é o grafo de interseção de um conjunto $\mathcal{S}$ de subárvores de uma árvore (Buneman [2], Gavril [7], Walter [17]). Entre todas as árvores T que dão origem ao mesmo grafo cordal G, uma de tamanho mínimo é chamada de *árvore clique* de G. Neste caso, existe uma correspondência um-a-um entre as cliques maximais de G e os vértices de T. Além disso, se M_j é a clique maximal de G que corresponde a $w_j \in V(T)$ e $v_i \in V(G)$ é o vértice que corresponde a subárvore S_i de $\mathcal{S}$, então $v_i \in M_j$ se, e somente se, $w_j \in S_i$.

Uma *estrela* é uma árvore que possui um vértice universal, chamado *centro*. Um *grafo partilhado* é um grafo de interseção de subestrelas distintas de uma estrela [11]. Um *grafo estrelado* é um grafo de interseção de subestrelas de uma estrela. A seguinte caracterização de grafos estrelados será útil a nossos propósitos.

Teorema 1 *Um grafo G é estrelado se, e somente se, possui uma clique central M, tal que para $v_i, v_j \in V(G) \setminus M$, v_i e v_j ou são gêmeos ou não adjacentes [8].*

Seja G um grafo estrelado e $M_1, \ldots, M_q$ suas cliques maximais, onde M_1 é uma clique central satisfazendo o teorema acima. Denote $M'_i = M_i \setminus M_1$, para $i > 1$. Então $M_1, M'_2, \ldots, M'_q$ é uma partição de $V(G)$, chamada *partição estrelada*. Utilizando a partição estrelada é fácil observar que todo grafo estrelado tem diâmetro no máximo três.

3. A caracterização

O teorema a seguir fornece uma caracterização dos grafos estrelados por subgrafos proibidos. Para provar a suficiência da condição dada, faremos uso do seguinte resultado.

Lema 1 *Se o conjunto dos vértices não simpliciais de um grafo G é uma clique, então G é estrelado.*

Demonstração: Seja C o conjunto dos vértices não simpliciais de G. Como C é uma clique, considere uma clique maximal $M_1 \supseteq C$. Denote por $M_2, \ldots, M_q$ as outras cliques maximais de G. Construa uma estrela T com conjunto de vértices $\{w_1, \ldots, w_q\}$ e centro w_1. Defina uma família $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $V(T)$ da maneira seguinte. Existe um subconjunto $S_i \in \mathcal{S}$ para cada vértice $v_i \in V(G)$. Seja $M(v_i) \subseteq \{M_1, \ldots, M_q\}$ o subconjunto das cliques maximais de G, que contém v_i. Defina $S_i = \{w_a \in V(T) : M_a \in M(v_i)\}$.

O seguinte argumento mostra que cada subconjunto S_i induz uma substrela (conexa) de T. Se v_i é um vértice simplicial, então S_i consiste de um único vértice de T e a conclusão é trivial. Quando v_i não é um vértice simplicial, ele pertence a clique maximal M_1. Conseqüentemente, S_i contém o centro w_1 de T, implicando que S_i realmente induz uma substrela de T.

Mostramos agora que T e $\mathcal{S}$ são, realmente, uma representação de interseção de G, ou seja, que dois vértices v_i e v_j de G são adjacentes exatamente quando os subconjuntos S_i e S_j, correspondentes, possuem interseção não vazia. Considere dois casos. Se um dos dois vértices, digamos v_i, é simplicial, então $v_i v_j \in E(G)$ implica que v_j também pertence a clique maximal M_a que contém v_i. Conseqüentemente, S_i e S_j contém o vértice $w_a \in V(T)$ e, deste modo, $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. Por ouro lado, quando ambos v_i e v_j não são vértices simpliciais, S_i e S_j contém $w_1 \in V(T)$ e, novamente, $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. Reciprocamente, suponha que $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. Examine o centro w_1 de T. Se $w_1 \notin S_i \cap S_j$, então uma das subárvores, digamos S_i, consiste de um único vértice $w_a \in V(T)$, $a \neq 1$. Como S_j também deve conter w_a, temos que v_i e v_j pertencem a mesma clique maximal M_a of G. Conseqüentemente, $v_i v_j \in E(G)$, como requerido. Agora, se $w_1 \in S_i \cap S_j$, ambos os vértices v_i, v_j pertencem a M_1, também acarretando que $v_i v_j \in E(G)$.

Segue das duas propriedades acima que G é o grafo de interseção da família $\mathcal{S}$ de subestrelas de T. Isto é, que G é estrelado. ■

Teorema 2 *Um grafo G é estrelado se, e somente se, G não contém nenhum dos seis grafos da* Figura 1 *como subgrafo induzido.*

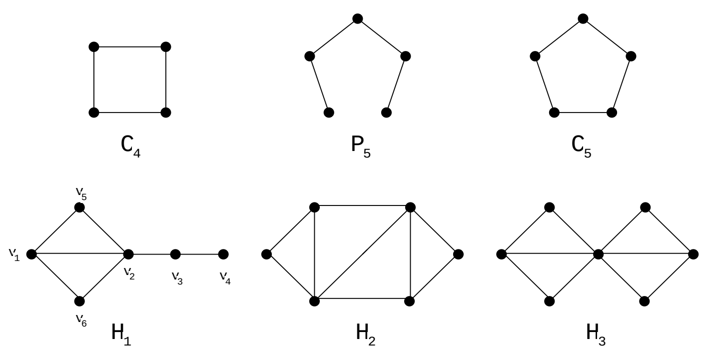

Figura 1: Subgrafos proibidos para grafos estrelados.

Demonstração: Seja G um grafo estrelado, M_1 uma clique central e $M_1, M'_2, \ldots, M'_q$ uma partição estrelada de G. Claramente, G é cordal e, conseqüentemente, não contém C_4 nem C_5 como subgrafos induzidos. Além disso, como G tem diâmetro no máximo três, G não contém P_5 como subgrafo induzido.

Considere o grafo H_1 da Figura 1. Como $M_1, M'_2, \ldots, M'_q$ é uma partição estrelada, temos que $v_1 \in M'_a$, $v_2, v_3 \in M_1$ e $v_4 \in M'_b$, onde $a, b > 1$. Como v_5, v_6 não são adjacentes a v_3, concluímos que $v_5, v_6 \notin M_1$. Como v_5, v_6 são adjacentes a v_1, temos que $v_5, v_6 \in M'_a$. Entretanto, a última situação não pode ocorrer, porque v_5 e v_6 não são adjacentes. Assim, G não pode conter H_1 como subgrafo induzido. Um raciocínio análogo mostra que H_2 e H_3 também não são subgrafos induzidos de G.

Reciprocamente, seja G um grafo que não contém nenhum dos grafos da Figura 1, como subgrafo induzido. Vamos mostrar que G é estrelado. Para isto, considere o conjunto C dos vértices não simpliciais de G. Vamos mostrar que o caso em que C não é uma clique não pode acontecer.

Como G não contém C_4, C_5 nem P_5 como subgrafos induzidos, G é cordal. Assim, G é o grafo de interseção de uma família $\mathcal{S}$ de subárvores de uma árvore T. Sem perda de generalidade, considere que T é uma árvore clique de G. Denote por $S_i \in \mathcal{S}$ a subárvore correspondente a $v_i \in V(G)$. Sabemos que cada $w_a \in V(T)$ corresponde a uma clique maximal M_a de G, e também que $v_i \in M_a$ se e somente se $w_a \in S_i$.

Se C não é uma clique, existe em C um par de vértices não adjacentes, digamos v_i e u. Considere P um caminho mais curto entre v_i e u em G. Os vértices deste caminho estão inteiramente contidos em C pois, caso contrário, como os vértices que não estão em C são simpliciais, os vértices adjacentes em P a um vértice fora de C seriam adjacentes, contradizendo o fato de P ser um caminho mais curto. Considere então, v_i, v_k, v_j os três primeiros vértices de P. Como v_i e v_j não são adjacentes, então S_i e S_j são subárvores disjuntas de T. Denote por $w_a \in S_i$ o vértice of S_i mais próximo de S_j em T. Similarmente, $w_b \in S_j$ é o vértice mais próximo de S_i em T. Como v_i e v_j são não simpliciais, temos que S_i contém algum vértice $w_c \neq w_a$ e S_j contém $w_d \neq w_b$, tais que $w_c w_a \in E(T)$ e $w_d w_b \in E(T)$. Conseqüentemente, os quatro vértices distintos w_c, w_a, w_b, w_d, nesta ordem, pertencem a um mesmo caminho de T. Como M_c e M_d são cliques maximais, G contém vértices $v_p \in M_c$ e $v_q \in M_d$ satisfazendo $v_p \notin M_a$ e $v_q \notin M_b$.

Considere as seguintes alternativas relativas a pertinência de v_k em M_c e M_d.

Caso 1: $v_k \notin M_c \cup M_d$.

Então o subgrafo induzido em G por $\{v_i, v_j, v_k, v_p, v_q\}$ é P_5.

Caso 2: $v_k \in M_c$ e $v_k \notin M_d$.

Como M_a é uma clique maximal de G, existe $v_l \in M_a$ satisfazendo $v_l \notin M_c$. As seguintes situações ainda devem ser consideradas.

Caso 2.1: $v_l \notin M_b$.

Então o subgrafo induzido por $\{v_i, v_j, v_k, v_p, v_q, v_l\}$ é H_1.

Caso 2.2: $v_l \in M_b$.

As seguintes situações ainda ocorrem.

Caso 2.2.1: $v_l \notin M_d$.

Então $\{v_i, v_j, v_p, v_q, v_l\}$ induz um P_5 em G.

Caso 2.2.2: $v_l \in M_d$.

Neste caso, o subgrafo induzido em G por $\{v_i, v_j, v_k, v_p, v_q, v_l\}$ é H_2.

Caso 3: $v_k \notin M_c$ e $v_k \in M_d$.

Similar ao Caso 2.

Caso 4: $v_k \in M_c \cap M_d$.

Como M_a e M_b são cliques maximais, existem vértices $v_l \in M_a$ e $v_r \in M_b$ satisfendo $v_l \notin M_c$ e $v_r \notin M_d$.

Caso 4.1: $v_l \notin M_b$ e $v_r \notin M_a$.

Neste caso, o subgrafo induzido em G por $\{v_i, v_j, v_k, v_p, v_q, v_l, v_r\}$ é H_3.

Caso 4.2: $v_l \in M_b$ e $v_r \notin M_a$.

Este caso é subdividido como segue.

Caso 4.2.1: $v_l \notin M_d$.

Então $\{v_i, v_j, v_p, v_q, v_l\}$ induz um P_5 em G.

Caso 4.2.2: $v_l \in M_d$.

Então $\{v_i, v_j, v_p, v_q, v_l, v_r\}$ induz um H_1 em G.

Caso 4.3: $v_l \notin M_b$ e $v_r \in M_a$.

Similar ao Caso 4.2.

Caso 4.4: $v_l \in M_b$ e $v_r \in M_a$.

Se $v_l \notin M_d$ ou $v_r \notin M_c$, então P_5 é subgrafo induzido de G. Caso contrário, $v_l \in M_d$ e $v_r \in M_c$, acarretando que $\{v_i, v_j, v_p, v_q, v_l, v_r\}$ induz um H_2 em G.

Como todas as possibilidades levam a subgrafos proibidos da Figura 1, temos que C é uma clique e, pelo Lema 1, G é estrelado. ∎

Também temos que:

Teorema 3 *Um grafo é estrelado se, e somente se, seu conjunto de vértices não simpliciais é uma clique.*

Referências

[1] A. Brandstädt, V.B. Le, and J.P. Spinrad, Graph classes: a survey, Monographs on Discrete Mathematics and Applications, *SIAM*, **2** (1999), Philadelphia.

[2] P. Buneman, A characterization of rigid circuit graphs, *Discrete Mathematics*, **9** (1974), 205-212.

[3] M.R. Cerioli e J.L. Szwarcfiter, Edge-clique graphs and some classes of chordal graphs, Relatório Técnico 21, NCE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1999.

[4] V. Chvátal and P.L. Hammer, Aggregation of inequalities in integer programming, Studies in Integer Programming (P.L. Hammer, E.L. Johnson, B.H. Korte, and G.L. Nemhauser, eds.), *Annals of Discrete Mathematics*, **1** (1977), 145-162, North-Holland.

[5] M. Farber, Characterizations of strongly chordal graphs, *Discrete Mathematics*, **43** (1983), 173-189.

[6] S. Földes and P.L. Hammer, Split graphs, Proceedings 8th Southeastern Conference on Combinatorics, *Graph Theory and Computing* (F. Hoffman et al., ed.), Louisiana State Univ., (1977), 311-315.

[7] F. Gavril, The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs, *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, **16** (1974), 47-56.

[8] J. Gustedt, On the pathwidth of chordal graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **45** (1993), 233-248.

[9] C. G. Lekkerkerker and J.C. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fundamenta Mathematicae*, **51** (1962), 45-64.

[10] T. A. McKee and F.R. McMorris, Topics in intersection graph theory, Monographs on Discrete Mathematics and Applications, *SIAM*, **1** (1999) Philadelphia.

[11] F.R. McMorris and D.R. Shier, Representing chordal graphs on $K_{1,n}$, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **24** (1983), 489-494.

[12] M. Moscarini, R. Petreschi, and J.L. Szwarcfiter, On node searching and starlike graphs, *Congressus Numerantium*, **131** (1998), 75-84.

[13] B.S. Panda, The forbidden subgraph characterization of directed vertex graphs, *Discrete Mathematics*, **196** (1999), 239-256.

[14] S.L. Peng, M.T. Ko, C.W. Ho, T.S. Hsu, and C.Y. Tang, Graph searching on chordal graphs, ISAAC'96 Proceedings, *Lecture Notes on Computer Science*, **1178** (1996), 156-165.

[15] E. Prisner, Representing triangulated graphs in stars, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **62** (1992), 29-41.

[16] F.S. Roberts, Indifference graphs, in "Proof Techniques in Graph Theory", (F. Harary, ed.), Academic Press, 1969, pp. 139-146.

[17] J.R. Walter, Representations of chordal graphs as subtrees of a tree, *Journal of Graph Theory*, **2** (1978), 265-267.