Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **1**, No. 2 (2000), 361-371.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

# Casamentos Estáveis com Casais Forçados e Casais Proibidos

V.M.F. DIAS[1], J.L. SZWARCFITER[2], Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Caixa Postal 68511, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

**Resumo**. O assunto deste trabalho é o problema dos casamentos estáveis apresentado por Gale & Shapley [2]. Apresentamos aqui uma caracterização de um casamento estável no qual cada par, de um conjunto de pares dados ("forçados"), forme necessariamente um casal, e nenhum par, de outro dado conjunto de pares ("proibidos"), seja casado. Além disso, apresentamos um algoritmo polinomial que encontra esse casamento. Essa caracterização generaliza um teorema de Gusfield & Irving [1].

## 1. Introdução

Sejam $H$ e $F$ dois conjuntos disjuntos de cardinalidade $n$, onde cada elemento $h \in H$ é um *homem* e cada elemento $m \in F$ uma *mulher*. Um *casamento* (ou solução) $M$ consiste de $n$ casais monogâmicos $(h, m)$, isto é, uma função bijetora de $H$ em $F$. Suponha que cada homem e cada mulher esteja associado a uma lista de preferência estritamente ordenada contendo todos os elementos do sexo oposto. Um par $(h, m)$ é *instável* em $M$ se $h$ prefere $m$ que sua parceira em $M$ e $m$ prefere $h$ a seu parceiro em $M$. Nesse sentido, $M$ é um casamento *estável* se, e somente se, nenhum par em $M$ é instável.

Gale & Shapley [2] provaram que existe sempre uma solução estável e desenvolveram um algoritmo para encontrá-la em $O(n^2)$. Uma extensão do algoritmo Gale-Shapley encontra todos os casamentos estáveis[4]. Entretanto, Knuth demonstrou em [5] que o número de soluções estáveis para uma instância de tamanho $n$ pode vir a ser exponencial em n. A fim de representar todas as soluções sem necessariamente enumerá-las, Irving & Leather [3] descreveram uma estrutura de representação compacta de todas as soluções em espaço $O(n^2)$.

Baseando-se nessa representação, o presente trabalho apresenta um algoritmo eficiente para encontrar um casamento estável, caso exista, para solucionar a seguinte extensão do problema. Sejam dados, além de $H$, $F$ e as listas de preferências, dois conjuntos $Q$ e $P$ de pares $(h, m)$. Um casamento estável $M$ com *casais forçados* e *casais proibidos* é tal que todo par de $Q$ é um casal em $M$ e nenhum par

[1] vaniad@cos.ufrj.br
[2] jayme@cos.ufrj.br

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_1$ | 3 | 1 | 5 | 7 | 4 | 2 | 8 | 6 | | $m_1$ | 4 | 3 | 8 | 1 | 2 | 5 | 7 | 6 |
| $h_2$ | 6 | 1 | 3 | 4 | 8 | 7 | 5 | 2 | | $m_2$ | 3 | 7 | 5 | 8 | 6 | 4 | 1 | 2 |
| $h_3$ | 7 | 4 | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 | 8 | | $m_3$ | 7 | 5 | 8 | 3 | 6 | 2 | 1 | 4 |
| $h_4$ | 5 | 3 | 8 | 2 | 6 | 1 | 4 | 7 | | $m_4$ | 6 | 4 | 2 | 7 | 3 | 1 | 5 | 8 |
| $h_5$ | 4 | 1 | 2 | 8 | 7 | 3 | 6 | 5 | | $m_5$ | 8 | 7 | 1 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 |
| $h_6$ | 6 | 2 | 5 | 7 | 8 | 4 | 3 | 1 | | $m_6$ | 5 | 4 | 7 | 6 | 2 | 8 | 3 | 1 |
| $h_7$ | 7 | 8 | 1 | 6 | 2 | 3 | 4 | 5 | | $m_7$ | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 8 | 3 | 7 |
| $h_8$ | 2 | 6 | 7 | 1 | 8 | 3 | 4 | 5 | | $m_8$ | 2 | 5 | 4 | 3 | 7 | 8 | 1 | 6 |

Figura 1: Instância $I_8$ do problema dos casamentos estáveis de tamanho $n = 8$

de $P$ forma um casal em $M$. Tal algoritmo foi elaborado a partir de um teorema de caracterização, também formulado no trabalho. Este resultado generaliza um teorema de Gusfield e Irving apresentado em [1].

## 2. Representação dos casamentos estáveis

Em uma instância do problema básico dos casamentos estáveis cada um dos $n$ homens e cada uma das $n$ mulheres estão associados a uma lista de preferência estritamente ordenada contendo todos os elementos do sexo oposto. Aplicando o algoritmo de Gale-Shapley a uma dada instância, obtém-se a *solução homem-ótima*, isto é, o casamento estável no qual cada um dos homens tem a melhor parceira possível de acordo com sua lista de preferência. Tal solução corresponde a pior para todas as mulheres, também segundo as suas respectivas listas de preferências. Obviamente as regras da aplicação podem ser invertidas obtendo-se assim a *solução mulher-ótima*.

Sejam $M_i$ e $M_j$ soluções estáveis. Às operações (i)$M_i \vee M_j$ e (ii) $Mi \wedge Mj$ correspondem respectivamente soluções estáveis nas quais (i) todos os homens têm suas piores parceiras entre $M_i$ e $M_j$, e (ii) todos os homens tem suas parceiras preferidas entre $M_i$ e $M_j$. Então , $M_i$ *domina* $M_j$ de uma perspectiva masculina se, e somente se, todos os homens que possuem parceiras distintas em $M_i$ e $M_j$ preferem suas parceiras em $M_i$ às suas parceiras em $M_j$. E ainda, um casamento $M_k$ está entre $M_i$ e $M_j$ se, e somente se, $M_i$ domina $M_k$ e $M_k$ domina $M_j$ e, além disso, $M_k$ é também uma solução estável (resultados demonstrados em [5, 1]). Na Figura 1, temos um exemplo de uma instância de tamanho $n = 8$. Cinco dos casamentos estáveis dessa instância estão representados na Figura 2, entre eles os casamentos $M_0$ e $M_Z$. Podemos observar que o casamento $M_0$ corresponde ao casamento obtido por $M_1 \wedge M_2$ e o resultado da operação $M_1 \vee M_2$ é exatamente o casamento $M_4$.

Um reticulado $\mathcal{M}$ representando todos os casamentos estáveis sobre a relação de dominância pode ser construído a partir da solução homem-ótima, denotada por $M_0$, onde essa solução é a mais dominante. Por outro lado, a solução mulher-ótima, denotada por $M_Z$, em tal representação é dominada por qualquer outra solução em $\mathcal{M}$.

Um casamento $M$ é irredutível quando contém pelo menos um casal $(h, m)$ tal

$$M_0 = \{(1,3),(2,1),(3,7),(4,5),(5,4),(6,6),(7,8),(8,2)\}$$
$$M_1 = \{(1,1),(2,3),(3,7),(4,5),(5,4),(6,6),(7,8),(8,2)\}$$
$$M_2 = \{(1,3),(2,1),(3,4),(4,5),(5,2),(6,6),(7,8),(8,7)\}$$
$$M_4 = \{(1,1),(2,3),(3,4),(4,5),(5,2),(6,6),(7,8),(8,7)\}$$
$$M_Z = \{(1,7),(2,8),(3,2),(4,1),(5,6),(6,4),(7,3),(8,5)\}$$

Figura 2: Quatro casamentos estáveis da instância $I_8$

que em nenhuma outra solução estável que domine $M$, $h$ e $m$ formem um casal. Seja $I(\mathcal{M})$ o conjunto de todas as soluções irredutíveis. Então, existe uma ordem parcial $(I(\mathcal{M}), \preceq)$ das soluções de $I(\mathcal{M})$ sobre a relação de dominância herdada de $\mathcal{M}$. Além disso, existe um mapeamento 1-1 entre os subconjuntos fechados de $(I(\mathcal{M}), \preceq)$ e as soluções estáveis em $\mathcal{M}$ [1]. A construção de $(I(\mathcal{M}), \preceq)$ pode ser facilmente efetuada em $O(n^5)$. No entanto, omitiremos mais detalhes a respeito desta já que utilizaremos uma outra ordem parcial $(\Pi(\mathcal{M}), \preceq)$ isomorfa a $(I(\mathcal{M}), \preceq)$, removendo-se o elemento minimal desta, que pode ser construída indiretamente em $O(n^2)$ [1]. $I(\mathcal{M})$ e $\Pi(\mathcal{M})$ serão utilizados para denotar os respectivos conjuntos ou ordem parcial de acordo com o contexto. A principal diferença entre as duas ordens é em relação aos seus elementos. Os elementos de $I(\mathcal{M})$ correspondem às soluções irredutíveis, enquanto que os de $\Pi(\mathcal{M})$ são as *rotações*, abaixo descritas. Em [1] os autores estabelecem uma correspondência entre as duas ordens e mostram ainda como obter $\Pi(\mathcal{M})$ de $I(\mathcal{M})$. Porém, o interesse aqui, por motivo de eficiência, se restringe à construção de $\Pi(\mathcal{M})$ sem o conhecimento prévio de $I(\mathcal{M})$.

O conceito de rotação é fundamental para o entendimento e construção de $(\Pi(\mathcal{M}), \preceq)$. Seja $M$ um casamento estável. Seja $s_M(h)$ a primeira mulher $m$ na lista de $h$ tal que $m$ prefere estritamente $h$ a $p_M(m)$, seu parceiro em $M$. E seja $prox_M(h)$ o parceiro em $M$ de $s_M(h)$. Então, existe uma cadeia, denominada rotação, de pares ordenados $\pi = (h_0, m_0), (h_1, m_1), ..., (h_{r-1}, m_{r-1})$ na solução estável $M$, tal que para cada $i$ , $0 \leq i \leq r-1$, $h_{i+1}$ é igual a $prox_M(h_i)$, onde $i+1$ é obtido por ($i$ módulo $r$) $+ 1$. Nesse caso, diz-se que a rotação $\pi$ está *exposta* em $M$. Note que o número máximo de rotações em $\mathcal{M}$ é $n(n-1)/2$.

**Teorema 1** [3] *Seja $M$ uma solução estável diferente de $M_Z$. Então, existe pelo menos uma rotação exposta em $M$.*

A prova deste teorema é construtiva e fornece um método simples de encontrar uma rotação em $M$.

Seja $\pi = (h_0, m_0), (h_1, m_1), ..., (h_{r-1}, m_{r-1})$ uma rotação qualquer. Um homem $h$ pertence a $\pi$ se $h = h_i$ para algum i, $0 \leq i \leq r-1$. Um par $(h, m)$ pertence a $\pi$ se $h = h_i$ e $m = m_i$ para algum i, $0 \leq i \leq r-1$. Seja $M$ uma solução estável e $\pi$ exposta em $M$, então $M/\pi$ é definida como sendo a solução na qual cada homem não pertinente a $\pi$ continua casado com sua parceira em $M$, e cada homem que pertence a $\pi$ tem como parceira $m_{i+1} = s_M(h_i)$. Tal operação é chamada de *eliminação.*

**Teorema 2** [3] *Toda solução estável $M$ pode ser gerada por uma seqüência de eliminações de rotações, a partir de $M_0$, e todas as seqüências entre $M_0$ e $M$ contêm exatamente as mesmas rotações.*

Um par $(h,m)$ é um casal estável se $h$ e $m$ são parceiros em algum casamento estável $M$. Agora, se $h$ e $m$ são casados em todo casamento estável $M$ de $\mathcal{M}$, então $(h,m)$ é um casal fixo.

**Teorema 3** [1] $(i)$ *Um par $(h,m)$ é um casal estável se, e somente se, é um casal em $M_Z$ ou pertence a alguma rotação. Equivalentemente, $(h,m)$ é estável se, e somente se, é par em $M_0$ ou para alguma rotação $\pi = (h_0,m_0),(h_1,m_1),...,(h_{r-1},m_{r-1})$ e para algum $i$, $h = h_i$ e $m = m_{i+1}$.*

$(ii)$ *Um casal é fixo se, e somente se, é um casal em $M_0$ e em $M_Z$. Equivalentemente, se é um casal em $M_0$ e não pertence a nenhuma rotação.*

Uma consequência direta dos teoremas anteriores é que as soluções estáveis em uma *cadeia maximal* em $\mathcal{M}$, isto é, uma seqüência de casamentos estáveis consecutivos em $\mathcal{M}$ com início em $M_0$ e término em $M_Z$, contém todos os pares estáveis de $\mathcal{M}$. Além disso, uma rotação $\pi'$ precede uma rotação $\pi$ em $\Pi(\mathcal{M})$ se, e somente se, $\pi'$ aparece antes de $\pi$ em toda cadeia maximal em $\mathcal{M}$.

Seja $\Pi(\mathcal{M})$ o conjunto de todas as rotações expostas em $\mathcal{M}$. Então, existe uma ordem parcial $(\Pi(\mathcal{M}),\preceq)$ dos elementos de $\Pi(\mathcal{M})$ sobre a relação de precedência herdada de $\mathcal{M}$.

**Teorema 4** [3] *Existe um mapeamento 1-1 entre os subconjuntos fechados de $(\Pi(\mathcal{M}),\preceq)$ e as soluções estáveis em $\mathcal{M}$.*

A construção de $\Pi(\mathcal{M})$ é descrita aqui em linhas gerais.

(i) Encontrar todas as rotações realizadas em $O(n^2)$: a partir de $M = M_0$, repete-se sucessivamente, encontrar $\pi$ exposta em $M$, eliminar $\pi$ obtendo $M = M/\pi$, até $M = M_Z$. ( Note que a eliminação de $\pi$ é proporcional ao número de homens em $\pi$ que é $O(n)$).

(ii) Construir um grafo $G(\mathcal{M})$, onde $G(\mathcal{M})$ é um subconjunto de pares de rotações na ordem parcial $\Pi(\mathcal{M})$ tal que o fechamento transitivo de $G(\mathcal{M})$ é a ordem parcial $\Pi(\mathcal{M})$. O grafo $G(\mathcal{M})$ é definido por duas regras de precedência relativas aos pares $(h,m)$ em cada rotação, o que pode ser visto em maiores detalhes em [1], bem como a equivalência entre o fechamento transitivo de $G(\mathcal{M})$ e a ordem parcial $\Pi(\mathcal{M})$. A construção de $G(\mathcal{M})$, a partir das rotações, também é realizada em $O(n^2)$.

Tanto (i) como (ii) são totalmente determinados pelas listas de preferências. Várias derivações do problema dos casamentos estáveis podem fazer uso do digrafo $G(\mathcal{M})$ e da ordem parcial $\Pi(\mathcal{M})$, a fim de obter algoritmos mais eficientes em relação às suas complexidades. Vamos examinar na seção seguinte o problema de determinar se um dado conjunto de pares é um conjunto estável[1]. Na seção 4 é apresentada uma extensão desse problema e, na seção 5, o algoritmo correspondente.

A Figura 4 mostra o reticulado $\mathcal{M}$. À direita de cada ligação entre um par de casamentos $(M,M')$ está indicada uma rotação $\pi$ exposta em $M$. Ou seja, o casamento $M'$ pode ser obtido a partir de $M$ pela eliminação de $\pi$. Além disso, todas as rotações da instância $I_8$ estão representadas na Figura 3. Pode-se verificar que, a toda cadeia, entre dois casamentos quaisquer $M$ e $M'$ corresponde o mesmo

$\pi_1 = \{(1,3),(2,1)\}$
$\pi_2 = \{(3,7),(5,4),(8,2)\}$
$\pi_3 = \{(4,5),(7,8),(6,6)\}$
$\pi_4 = \{(1,1),(6,5),(8,7)\}$
$\pi_5 = \{(2,3),(3,4)\}$
$\pi_6 = \{(4,8),(7,6),(5,2)\}$
$\pi_7 = \{(3,3),(8,1)\}$
$\pi_8 = \{(2,4),(5,8),(6,7)\}$
$\pi_9 = \{(1,5),(5,7),(8,3)\}$
$\pi_{10} = \{(3,1),(7,2),(5,3),(4,6)\}$

Figura 3: Rotações em $\mathcal{M}$ da instância $I_8$

conjunto de rotações. Em particular, toda cadeia maximal de $I_8$ compreende o conjunto $\{\pi_1, \pi_2, \pi_5, \pi_3, \pi_4, \pi_7, \pi_6, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}\}$.

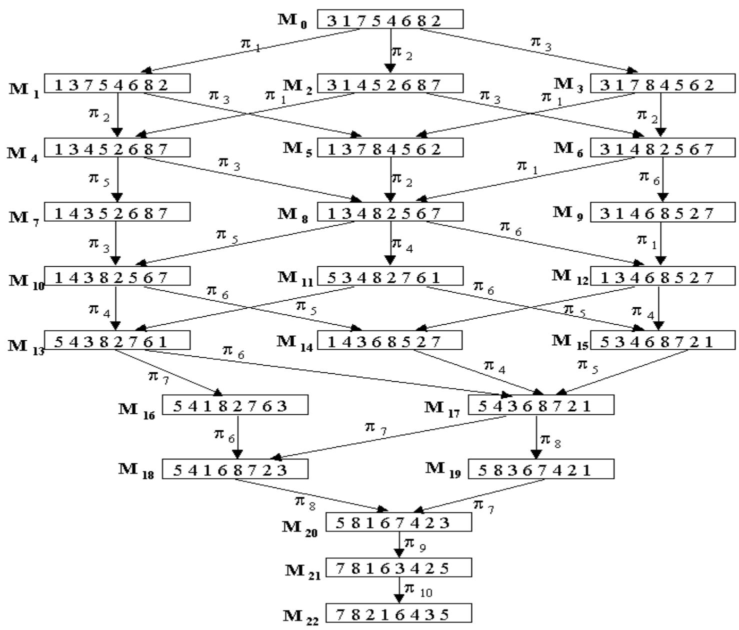


Figura 4: Casamentos estáveis da instância $I_8$ com rotações

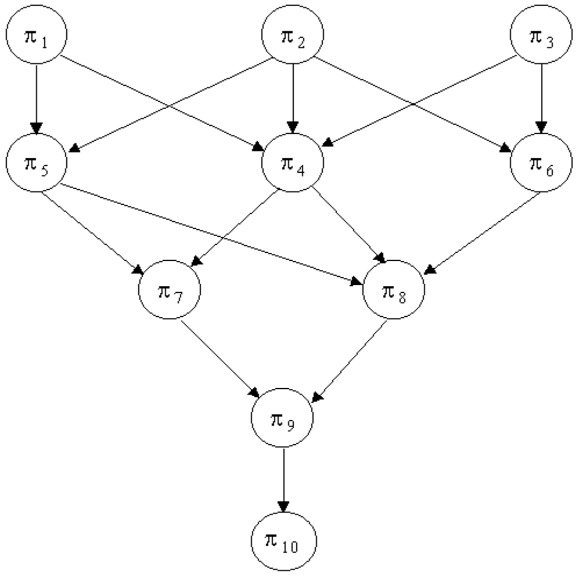


Figura 5: Conjunto parcialmente ordenado de rotações $(\Pi(\mathcal{M}), \preceq)$ da instância $I_8$

O conjunto parcialmente ordenado de rotações da instância $I_8$ é apresentado na Figura 5. Como visto, cada casamento $M$ de $I_8$ corresponde a um subconjunto fechado de $(\Pi(\mathcal{M}), \preceq)$. Por exemplo, o casamento $M_{13}$ é obtido pela eliminação das rotações no conjunto $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$.

# 3. Casais Forçados

Um conjunto $Q$ de pares $(h, m)$ é um conjunto de *casais forçados* se existe algum casamento estável $M$ tal que todo par em $Q$ é um casal em $M$. Para cada par $(h, m)$ em $Q$, não casado em $M_0$, define-se $\gamma(h, m)$ como sendo a única rotação que move $h$ para $m$, isto é, tal que $h = h_i$ e $m = m_{i+1}$, para algum i, na rotação $\pi = \gamma(h, m)$ e, para cada par de $Q$ não casado em $M_Z$, define-se $\theta(h, m)$ como a única rotação que move $h$ a partir de $m$, ou ainda, cujo par $(h, m)$ pertence à $\pi = \theta(h, m)$.

**Teorema 5** [1] *Um conjunto $Q$ de pares é um conjunto estável (casais forçados) se, e somente se, $(i)$ cada par é estável e $(ii)$ não existem dois pares $(h, m)$ e $(h', m')$ em $Q$ tais que $\theta(h, m) \prec \gamma(h', m')$ em $\Pi(\mathcal{M})$.*

Como visto anteriormente, todas as rotações podem ser encontradas em $O(n^2)$. Conhecendo-se as rotações e com base no teorema de caracterização de pares estáveis, temos que todos os pares estáveis de uma dada instânica podem ser encontrados em $O(n^2)$. A determinação das rotações $\theta(h, m)$ e $\gamma(h, m)$ para todos os pares estáveis também é facilmente realizada em $O(n^2)$. No entanto, o problema em questão é um dos poucos no qual $\Pi(\mathcal{M})$ não pode ser substituído por $G(\mathcal{M})$. Logo, exige a

| $(h,m)$ | $\gamma$ | $\theta$ | $(h,m)$ | $\gamma$ | $\theta$ | $(h,m)$ | $\gamma$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1,3)$ | $\emptyset$ | $\pi_1$ | $(3,4)$ | $\pi_2$ | $\pi_5$ | $(3,1)$ | $\pi_7$ | $\pi_{10}$ |
| $(2,1)$ | $\emptyset$ | $\pi_1$ | $(4,8)$ | $\pi_3$ | $\pi_6$ | $(7,2)$ | $\pi_6$ | $\pi_{10}$ |
| $(3,7)$ | $\emptyset$ | $\pi_2$ | $(7,6)$ | $\pi_3$ | $\pi_6$ | $(5,3)$ | $\pi_9$ | $\pi_{10}$ |
| $(5,4)$ | $\emptyset$ | $\pi_2$ | $(5,2)$ | $\pi_2$ | $\pi_6$ | $(4,6)$ | $\pi_6$ | $\pi_{10}$ |
| $(8,2)$ | $\emptyset$ | $\pi_2$ | $(3,3)$ | $\pi_5$ | $\pi_7$ | $(1,7)$ | $\pi_9$ | $\emptyset$ |
| $(4,5)$ | $\emptyset$ | $\pi_3$ | $(8,1)$ | $\pi_4$ | $\pi_7$ | $(2,8)$ | $\pi_8$ | $\emptyset$ |
| $(7,8)$ | $\emptyset$ | $\pi_3$ | $(2,4)$ | $\pi_5$ | $\pi_8$ | $(3,2)$ | $\pi_{10}$ | $\emptyset$ |
| $(6,6)$ | $\emptyset$ | $\pi_3$ | $(5,8)$ | $\pi_6$ | $\pi_8$ | $(4,1)$ | $\pi_{10}$ | $\emptyset$ |
| $(1,1)$ | $\pi_1$ | $\pi_4$ | $(6,7)$ | $\pi_4$ | $\pi_8$ | $(5,6)$ | $\pi_{10}$ | $\emptyset$ |
| $(6,5)$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ | $(1,5)$ | $\pi_4$ | $\pi_9$ | $(6,4)$ | $\pi_8$ | $\emptyset$ |
| $(8,7)$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $(5,7)$ | $\pi_8$ | $\pi_9$ | $(7,3)$ | $\pi_{10}$ | $\emptyset$ |
| $(2,3)$ | $\pi_1$ | $\pi_5$ | $(8,3)$ | $\pi_7$ | $\pi_9$ | $(8,5)$ | $\pi_9$ | $\emptyset$ |

Figura 6: Rotações $\theta$ e $\gamma$ para os pares estáveis de $I_8$

construção explícita de $\Pi(\mathcal{M})$, realizada em $O(n^4)$ a partir de $G(\mathcal{M})$. Seja $|Q| = k$, a condição (ii) pode ser verificada em $O(k^2)$.

**Teorema 6** [1] *Após o pré-processamento, realizado em $O(n^4)$, a estabilidade de um conjunto $Q$ com $k$ pares pode ser determinada em tempo $O(k^2)$.*

Na Figura 6, cada par estável $(h,m)$ de $I_8$ tem listadas, à sua direita, duas rotações. A primeira delas é $\gamma(h,m)$, cuja eliminação une tal par, e a outra é $\theta(h,m)$, cuja eliminação o separa.

Considere o conjunto $Q = \{(1,5),(2,8),(6,6)\}$ para a instância $I_8$. O par $(6,6)$ é casado em $M_0$ e é separado pela eliminação da rotação $\pi_3$, ou seja, $\pi_3 = \theta(6,6)$. Mas, $\pi_3 \prec \pi_4$ e $\pi_4 = \gamma(1,5)$. Claramente, antes da eliminação de $\pi_4$ o par $(1,5)$ não forma um casal para nenhum $M$. Logo, $Q$ não é um conjunto estável em $I_8$. Agora, seja $Q' = \{(1,5),(2,8),(6,4)\}$. A única rotação que separa um desses pares é $\pi_9 = \theta(1,5)$. A rotação $\pi_8$ é a última que une um desses pares ($\pi_8 = \gamma(2,8) = \gamma(6,4)$). Como $\pi_9 \not\preceq \pi_8$, concluímos que existe um casamento estável com casais forçados $Q'$. O casamento dominante que satisfaz $Q'$ é $M_{19} = \{(1,5),(2,8),(3,3),(4,6),(5,7),(6,4),(7,2),(8,1)\}$, que corresponde ao subconjunto fechado $\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6,\pi_8\}$.

# 4. Casais Forçados e Casais Proibidos

Nessa seção apresentaremos uma extensão do problema anterior.

Um par $(h,m)$ é um *casal proibido* em $\mathcal{M}$ se existe um casamento estável $M$ tal que $(h,m)$ não seja um casal em $M$. Um conjunto de pares $P$ é um conjunto de casais proibidos se existe um casamento estável $M$ no qual nenhum par de $P$ forma um casal em $M$.

**Lema 7** *Um par* $(h,m)$ *é um casal proibido se, e somente se,* $(h,m)$ *não é fixo.*

A prova segue diretamente da definição e do teorema de caracterização de pares estáveis.

Seja $S$ um subconjunto fechado de $\Pi(\mathcal{M})$. Então $\pi$ é uma *rotação maximal* em $S$ se $\pi$ não é sucedida por nenhuma rotação em $S$.

**Teorema 8** *Um conjunto de pares* $P$ *é um conjunto de casais proibidos se, e somente se,* $(i)$ *nenhum dos pares de* $P$ *é fixo e* $(ii)$ *existe um subconjunto fechado* $S$ *de* $\Pi(\mathcal{M})$ *tal que para todo par* $(h,m)$ *de* $P$ *em* $M_0$ *a rotação* $\theta(h,m)$ *pertence a* $S$ *e, para todo par* $(h,m)$ *em* $P$ *não contido em* $M_0$*, se* $\gamma(h,m)$ *pertence a* $S$*, então deve existir* $\theta(h,m)$ *em* $S$*.*

*Demonstração*:($\Rightarrow$) Claramente, sendo $P$ um conjunto de casais proibidos, nenhum par de $P$ pode ser fixo. Seja $M$ um casamento com casais proibidos $P$. A $M$ corresponde um único subconjunto fechado $S$ de $\Pi(\mathcal{M})$. Seja $(h,m)$ um par de $P$ que forma um casal em $M_0$, ou ainda, tal que $\gamma(h,m) \in S$. Como $h$ e $m$ não são casados em $M$, temos que $\theta(h,m) \in S$.

($\Leftarrow$) Seja $S$ um subconjunto fechado de $\Pi(\mathcal{M})$ tal que para todo par $(h,m) \in P$ se $(h,m)$ é um casal em $M_0$ ou $\gamma(h,m) \in S$ então $\theta(h,m) \in S$. Seja $M$ o casamento correspondente a $S$. Suponha que, para algum par $(h,m)$ de $P$, $(h,m)$ forma um casal em $M$. Nesse caso, $\gamma(h,m) \in S$ ou $(h,m) \in M_0$, e, $\theta(h,m) \in S$, assim temos uma contradição. ∎

Seja $P = \{(1,1),(1,5),(2,1),(2,8)\}$ um candidato a conjunto de casais proibidos em $I_8$. Inicialmente, verificamos que nenhum par de $P$ é fixo. O par $(2,1)$ é casado em $M_0$ e é separado pela eliminação da rotação $\pi_1$, ou seja, $\pi_1 = \theta(2,1)$. Mas, $\pi_1 = \gamma(1,1)$. Esse casal é separado durante a eliminação da rotação $\pi_4 = \theta(1,1)$, que por outro lado une o par $(1,5)$, isto é, $\pi_4 = \gamma(1,5)$. Agora, $\pi_9 = \theta(1,5)$ e $\pi_8 \prec \pi_9$. Como $\pi_8 = \gamma(2,8)$ e não existe rotação cuja eliminação separe tal par, concluímos que não existe subconjunto fechado de $\Pi(\mathcal{M})$ que satisfaça à condição (ii) do Teorema 3.5. Logo, $P$ não é um conjunto de casais proibidos em $I_8$. Agora, seja $P' = \{(1,1),(1,5),(2,1),(3,3)\}$. Para o par $(3,3)$, tem-se que $\pi_5 = \gamma(3,3)$ e $\pi_7 = \theta(3,3)$. Assim, o subconjunto $S = \{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6,,\pi_7,\pi_8\,\pi_9\}$ satisfaz (ii). Logo, $P'$ é um conjunto de casais proibidos em $I_8$. O casamento $M_{21} = \{(1,7),(2,8),(3,1),(4,6),(5,3),(6,4),(7,2),(8,5)\}$ que corresponde a $S$ em $\mathcal{M}$ é um casamento no qual nenhum dos pares de $P'$ é casado.

Combinando os Teoremas 5 e 8, obtemos a seguinte caracterização de casamento estável com casais forçados $Q$ e casais proibidos $P$.

**Teorema 9** *Sejam* $P$ *um conjunto de casais proibidos e* $Q$ *um conjunto de casais forçados em* $\mathcal{M}$*. Então, existe uma solução estável* $M$ *em* $\mathcal{M}$ *que satisfaz* $Q$ *e* $P$ *se, e somente se, existe um subconjunto fechado* $S$ *de* $\Pi(\mathcal{M})$ *que* $(i)$ *satisfaz* $Q$ *e* *(ii) para quaisquer dois pares* $(h, m) \in P$ *e* $(h', m') \in Q$*, se não existe* $\theta(h, m) \in S$ *ou* $\theta(h', m') \preceq \theta(h, m)$ *em* $\Pi(\mathcal{M})$ *então* $\gamma(h, m) \notin S$ *nem é um casal em* $M_0$*.*

*Demonstração*: ($\Rightarrow$) Seja $M$ um casamento estável com casais proibidos $P$ e casais forçados $Q$. Seja $S$ o subconjunto fechado de $\Pi(\mathcal{M})$ correspondente à $M$. Obviamente, nenhum par em $P$ é fixo e todo par de $Q$ é estável.

(i) Seja $(h', m')$ um par de $Q$ não casado em $M_0$. Então, $\gamma(h', m')$ existe e pertence à $S$. Agora, se para algum par $(h, m)$, $\theta(h, m) \preceq \gamma(h', m')$ em $\Pi(\mathcal{M})$ então $\theta(h, m) \in S$ e o par $(h, m)$ não é um casal em $M$. Logo, para quaisquer dois pares de $Q$ $\theta \npreceq \gamma$.

(ii) Seja (h,m) um par de $P$ tal que $\theta(h', m') \preceq \theta(h, m)$ em $\Pi(\mathcal{M})$. Como $h'$ e $m'$ são casados em $M$, $\theta(h', m') \notin S$, logo $\theta(h, m) \notin S$. Mas, como $h$ e $m$ não são casados em $M$, concluímos que $\gamma(h, m) \notin S$, bem como $h$ e $m$ não formam um casal em $M_0$. Por outro lado, se $\gamma(h, m) \in S$ então $\theta(h, m)$ existe e deve estar em $S$. Como todo par $(h', m')$ de $Q$ é um casal em $M$ temos que para nenhum $(h', m')$, $\theta(h', m') \preceq \theta(h, m)$ em $\Pi(\mathcal{M})$.

($\Leftarrow$) Seja $S$ o menor subconjunto fechado de $\Pi(\mathcal{M})$ que satisfaz às condições (i) e (ii). Então, as rotações maximais em $S$ são do tipo $\gamma$ em relação aos pares de $Q$, ou do tipo $\theta$ para os pares de $P$. Seja $M$ o casamento estável correspondente a $S$. Todo par $(h', m')$ de Q não casado em $M_0$ é casado em $M$, pois se $\gamma(h', m')$ é maximal então $\theta(h', m') \notin S$. Caso contrário, seja $\theta(h, m)$ uma rotação maximal em $S$ tal que $\gamma(h', m') \prec \theta(h, m)$. Então, por (ii), $\neg\exists(h^\circ, m^\circ)$ de $Q$ tal que $\theta(h^\circ, m^\circ) \preceq \theta(h, m)$. Logo, $\theta(h', m') \notin S$(analogamente para $(h', m') \in M_0$).

Falta mostrar que nenhum par $(h, m) \in P$ é um casal em $M$. Pela contrapositiva de (ii), se $\gamma(h, m) \in S$ ou $(h, m) \in M_0$ então $\theta(h, m) \in S$. Logo, $h$ e $m$ não são casados em $M$. ∎

# 5. Algoritmo

Baseado no teorema anteriormente apresentado, descrevemos, na Figura 7, o algoritmo `FP` para encontrar um casamento estável com casais forçados $Q$ e casais proibidos $P$. O pré-processamento requerido aqui é o mesmo especificado na seção 3, acrescendo-se a verificação de que $Q$ é de fato um conjunto de casais forçados em $\mathcal{M}$, realizado em $O(k^2)$. O tempo total do pré-processamento é portanto $O(n^4)$.

**Algoritmo** `FP`
Entrada:
        Conjuntos $P$ e $Q$;
        Solução $M_0$;
        Ordem parcial $\Pi(\mathcal{M})$;
**Início**
Remover os pares não estáveis de $P$;
Para cada $\pi \in S$ faça $S[\pi] \leftarrow falso$;
$Q'$:=$Q \setminus M_0$;    {pares de $Q$ não casados em $M_0$}
(i)Para cada par $(h', m') \in Q'$ faça
    Seja $\pi$ tal que $\pi$ é $\gamma(h', m')$;
    Incluir $\pi$ e seus precedentes em $S$;
(a)$P_0$:=$P \cap M_0$;
(b)$P'$:=$\{(h, m) \in P_0 : \theta(h, m) \notin S\}$;
(c)$P'$:=$P' \cup \{(h, m) \in P : \gamma(h, m) \in S$ e $\theta(h, m) \notin S\}$;
(ii)Enquanto $P'$ não for vazio faça
    Para cada par $(h, m)$ de $P'$ faça
        Seja $\pi$ tal que $\pi$ é $\theta(h, m)$;
        Se $\pi \neq nulo$ então
            (ii.1)Incluir $\pi$ e seus precedentes em $S$
        caso contrário
            "Não há solução que satisfaça $Q$ e $P$" $\rightarrow fim$
(ii.2)Se para algum $(h', m') \in Q$, $\theta(h', m') \in S$ então
        "Não há solução que satisfaça $Q$ e $P$" $\rightarrow fim$
    caso contrário
        $P \leftarrow P \setminus P'$;
        (ii.3)$P'$:=$\{(h, m) \in P : \gamma(h, m) \in S$ e $\theta(h, m) \notin S\}$;
fim_enqto;
**Fim**

Figura 7: Algoritmo que encontra o casamento minimal que satisfaz P e Q

O algoritmo tem como entrada dois conjuntos de pares $P$ e $Q$, respectivamente conjuntos de casais proibidos e forçados, representados por matrizes, o casamento estável $M_0$ e a ordem parcial $\Pi(\mathcal{M})$. A variável $P_0$ consiste dos pares de $P$ casados em $M_0$. A saída do algoritmo é um subconjunto fechado $S$ de $\Pi(\mathcal{M})$ que satisfaz $Q$ e $P$. $S$ é inicializado como vazio, em (i) passa a corresponder ao subconjunto mínimo que satisfaz $Q$ e é atualizado durante a execução de (ii), de acordo com a variável $P'$ (em cada iteração) que consiste dos pares $(h, m)$ de $P$ casados em $M_0$ ou ainda cuja rotação $\gamma(h, m) \in S$ e tal que a rotação $\theta(h, m) \notin S$. A fim de melhorar a complexidade, $S$ deve ser uma lista de valores lógicos, onde a cada índice de $S$ corresponde uma rotação.

Sejam $r$ o número de rotações em $\Pi(\mathcal{M})$, $k$ e $l$, as cardinalidades de $Q$ e $P$, respectivamente, e $n$ o tamanho da instância do problema. Encontrar o subconjunto minimal que satisfaz $Q$, é executado por (i) em tempo $O(k.r)$. Os pares de $P_0$ (a) podem ser encontrados em tempo $O(n)$. Tanto (b) como (c) são lineares no tamanho de $P$. Logo, realizados em tempo $O(l)$. Em (ii), no pior caso, se um par de $P$ é removido a cada iteração, para o último par removido é verificado $l$ vezes se $\gamma(h, m) \in S$ e $\theta(h, m) \notin S$ (ii.3), um tempo máximo de $O(l^2)$. Para cada par de $P$ são incluídas em $S$ as rotações $\theta(h, m)$ e suas precedentes (ii.1), consumindo um tempo total de $O(r.l)$. Ainda, deve ser verificado se tal inclusão viola a satisfatibilidade de $Q$, isto é, se alguma rotação incluída em $S$ é do tipo $\theta$ para algum par de $Q$ (ii.2), realizado em tempo $O(k)$. Portanto, (ii) despende um tempo total de $O(l.k)$. Finalmente, obter a solução $M$ correspondente a $S$ pode ser realizado em $O(n^2)$. Como visto anteriormente, o número de rotações $r$ é $O(n^2)$. Pela definição do problema, o valor máximo de $k$ é $n$, e $l$ não pode ultrapassar $n^2$. Logo, a complexidade total do algoritmo `FP` é $O(n^4)$.

# Referências


[1] D. Gusfield and R.W. Irving, "Stable Marriage Problem - Structure and Algorithms", The MIT Press, 1989.

[2] D. Gale and L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, **69** (1962), 9-15.

[3] R.W. Irving and P. Leather, The complexity of counting stable marriages, *SIAM J. Comput.*, **15** (1986), 655-667.

[4] D. McVitie and L.B. Wilson, The stable marriage problem, *Commun. of the A.C.M.*, **14** (1971), 486-490.

[5] D.E. Knuth. "Marriages Stables", Les Presses de l'Université de Montreal, 1976.

[6] R.W. Irving, P. Leather and D. Gusfield, An efficient algorithm for the 'optimal' stable marriage, *Journal of the A.C.M.*, **34** (1987), 532-543.