

Aproximação de Problemas de Valores de Fronteira Singulares usando Subsoluções e Supersoluções

P.M. LIMA,¹ Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal

A.M. OLIVEIRA, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2825 Monte de Caparica, Portugal.

Resumo. No presente trabalho consideram-se problemas de valores de fronteira para um certo tipo de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, conhecidas como equações generalizadas de Emden-Fowler. Estas equações têm numerosas aplicações, nomeadamente em problemas de mecânica de fluidos. Do ponto de vista matemático, os problemas distinguem-se por as soluções apresentarem singularidades num ou em ambos os extremos do intervalo, o que levanta certas dificuldades na aproximação numérica.

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$y''(x) = w(x)y(x)^q \quad (1.1)$$

com

$$w(x) = -g(x)x^p, \quad (1.2)$$

onde $g(x)$ é uma função contínua e positiva em $]0, 1[$ e p e q são números reais.

Este tipo de equações diferenciais, habitualmente designadas por equações de Emden-Fowler generalizadas, tem numerosas aplicações práticas, nomeadamente em mecânica dos fluidos e física química e do plasma, entre outras áreas.

Neste artigo vamos considerar $q < -1$ e supor a existência de 2 números reais m e M tais que $0 < m = \min_{x \in]0, 1]} g(x) \leq M = \max_{x \in]0, 1]} g(x)$.

O caso particular $m = M = -C$ também será estudado.

Serão procuradas as soluções positivas de (1.1), em $]0, 1[$, que satisfaçam cada um dos dois seguintes conjuntos de condições de fronteira:

$$y''(0) = y(1) = 0, \quad (1.3)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (1.4)$$

¹plima@math.ist.utl.pt

No caso (1.1)-(1.3), a função $y(x)$ procurada tem uma singularidade em $x = 1$ e é uma função de classe $C([0, 1]) \cap C^1([0, 1[)$.

No caso (1.1)-(1.4) esta função tem singularidades nos pontos $x = 0$ e $x = 1$.

Ainda para (1.1)-(1.3), o caso particular $w(x) = \frac{1}{q}x$ surge na mecânica dos fluidos não newtonianos e tem sido abordado por alguns autores [11, 14].

Em [8] e [9] são desenvolvidos alguns métodos numéricos para a aproximação deste problema.

O problema (1.1)-(1.4) tem sido também largamente estudado em [2, 4, 5, 6, 10, 12, 15].

Um problema semelhante, com condição de fronteira não homogênea em $x = 0$ foi tratado em [3].

No presente trabalho iremos generalizar os métodos referidos nos trabalhos anteriores e aplicá-los no estudo da equação (1.1), com diferentes expressões de $w(x)$. Neste sentido, este trabalho é a continuação de [8] e [9], onde foi considerado apenas o caso de $w(x) = x$ e para as condições de fronteira (1.1)-(1.3).

Numa primeira fase, e para cada um dos dois tipos de problemas, (1.1)-(1.3) e (1.1)-(1.4), serão deduzidas aproximações iniciais, subsoluções ou supersoluções (sec. 2), como ponto de partida para a aplicação de métodos iterativos do tipo de Picard ou de Newton (sec. 3).

Ainda na sec. 2, serão enunciados teoremas que garantem a existência e unicidade de (1.1)-(1.3) e (1.1)-(1.4), sob certas condições.

Os métodos iterativos utilizados na sec. 3 darão origem a problemas lineares, que serão posteriormente discretizados, mediante um tratamento numérico envolvendo diferenças finitas (sec. 4).

Deduzidas as fórmulas desses métodos, proceder-se-á em seguida à análise de alguns exemplos concretos, com o auxílio de um algoritmo implementado em linguagem PASCAL.

Para os casos em que a solução, $y(x)$, for conhecida, será feita uma análise de convergência (sec. 5).

2. Subsoluções e Supersoluções

Considere-se o problema (1.1)-(1.3).

Defina-se uma função $h(x) \in C^2(]0, 1[) \cap C^1([0, 1]) \cap C([0, 1])$ sujeita às condições

$$-h''(x) + w(x)h(x)^q \leq 0 \quad (\text{resp. } \geq 0), \quad x \in]0, 1[$$

$$h'(0) \geq 0 \quad (\text{resp. } \leq 0); \quad h(1) = 0.$$

Designa-se esta função como subsolução (resp. supersolução) do problema (1.1)-(1.3).

Iremos procurar subsoluções e supersoluções que satisfaçam as seguintes condições:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = 0, \quad (2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 0, \tag{2.2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x)}{y(x)} = \alpha \neq 0, \tag{2.3}$$

onde a última condição significa que a subsolução (ou supersolução) é assintoticamente equivalente à solução perto da singularidade.

Estas 3 condições podem ser satisfeitas escolhendo h da forma

$$h(x) = B (1 - x^{p+2})^\gamma, \tag{2.4}$$

onde B e γ são parâmetros a determinar.

Em relação à condição (2.1), ela verifica-se para $p > -1$, quaisquer que sejam B e γ .

A condição (2.2) verifica-se para $\gamma > 0$, quaisquer que sejam p e B .

Considerando o desenvolvimento assintótico de h quando $x \rightarrow 0$, pode concluir-se que a condição (2.3) é satisfeita se

$$\gamma = \frac{2}{1 - q}. \tag{2.5}$$

Iniciemos o nosso estudo com o caso concreto $w(x) = Cx^p$, com $C < 0$ e $p > -1$ constantes.

Fazendo um estudo analítico da função h , obtemos valores B_1 e B_2 tais que, se $B \leq B_1$, $h(x)$ é uma subsolução e se $B \geq B_2$ $h(x)$ é uma supersolução.

Quando tomadas num sentido estrito estas duas últimas relações, as funções representadas são designadas por subsoluções estritas e supersoluções estritas.

A Tabela 1 sintetiza os resultados obtidos.

subsoluções	supersoluções	
$B_1 = a(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = b(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	se $0 < \gamma \leq \frac{1}{p+2}$
$B_1 = b(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = a(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	se $\frac{1}{p+2} \leq \gamma < 1$

Tabela 1 - Coeficientes das subsoluções e supersoluções do problema (1.1)-(1.3), para $w(x) = Cx^p$, $C < 0$, com $a = \left(\frac{1}{(p+2)^2\gamma(1-\gamma)}\right)^{\frac{1}{1-q}}$ e $b = \left(\frac{1}{(p+2)(p+1)\gamma}\right)^{\frac{1}{1-q}}$.

No caso particular $\gamma = \frac{1}{p+2}$, ou seja, $q = -2p - 3$, a função $h(x)$, com $B = B_1 = B_2$, é a solução, uma vez que é simultaneamente subsolução e supersolução.

Tem-se assim

$$y(x) = \left(\frac{-C}{p+1}\right)^{\frac{1}{1-q}} (1 - x^{p+2})^{\frac{1}{p+2}}. \tag{2.6}$$

A generalização deste resultado para o caso $0 < m \leq g(x) \leq M$ é quase imediata.

Os resultados para este caso estão representados na Tabela 2

subsoluções	supersoluções	
$B_1 = a(m)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = b(M)^{\frac{1}{1-q}}$	se $0 < \gamma < \frac{1}{p+2}$
$B_1 = b(m)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = a(M)^{\frac{1}{1-q}}$	se $\frac{1}{p+2} \leq \gamma < 1$

Tabela 2 - Coeficientes das subsoluções e supersoluções do problema (1.1)-(1.3), para $w(x) = -g(x)x^p$ com $0 < m \leq g(x) \leq M$, com a e b definidos como na Tabela 1.

Repare-se que neste caso mais genérico não é possível determinar uma solução exata na forma (2.4), pois nunca é verificada a igualdade $B_1 = B_2$.

É possível, no entanto, garantir a existência e unicidade de tal solução, enunciando o seguinte teorema, adaptado de [1], p.110-117.

Teorema 1 *Sejam $h_1(x)$ e $h_2(x)$, respectivamente, uma subsolução estrita e uma supersolução estrita do problema (1.1)-(1.3) que satisfazem as condições*

$$h_1(x) < h_2(x), \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$h_1'(0) \geq h_2'(0) \quad \text{e} \quad h_1(1) = h_2(1) = 0.$$

Se existirem funções $\Lambda_1(x, y)$ e $\Lambda_2(x, y)$ tais que

$$\Lambda_1(x, y_1 - y_2) \leq w(x)(y_1^q - y_2^q) \leq \Lambda_2(x, y_1 - y_2), \quad \forall x \in]0, 1[, \quad (2.7)$$

com $w(x)$ definido em (1.2), e onde $y_i(x)$ satisfaz $h_1(x) < y_i(x) < h_2(x)$, $\forall x \in]0, 1[$, $i = 1, 2$, então existe pelo menos uma solução $y(x)$ tal que $h_1(x) < y(x) < h_2(x)$.

Repare-se que todas as subsoluções do tipo $h_1(x) = B_1(1 - x^{p+2})^\gamma$ e supersoluções do tipo $h_2(x) = B_2(1 - x^{p+2})^\gamma$, com os parâmetros B_1 e B_2 atrás definidos, satisfazem às condições do Teorema 1. De fato, tem-se $h_1(x) < h_2(x) \forall x \in]0, 1[$, pois $B_1 < B_2$, assim como $h_1'(0) = h_2'(0) = 0$ e $h_1(1) = h_2(1) = 0$.

Por outro lado, se fizermos $\Lambda_1(x, y) = qw(x)h_2(x)^{q-1}y$ e $\Lambda_2(x, y) = qw(x)h_1(x)^{q-1}y$, verificamos facilmente que (2.7) é satisfeita, mediante a aplicação do Teorema de Lagrange. Além disso, se tivermos $p > -1$ e $q < -1$, o Teorema 7.5 de [16] garante-nos a unicidade de tal solução.

Considere-se agora o problema (1.1)-(1.4).

Vamos definir uma função $h(x) \in C^2(]0, 1[) \cap C([0, 1])$ que satisfaça as condições

$$-h''(x) + w(x)h(x)^q \leq 0 \quad (\text{resp. } \geq 0), \quad x \in]0, 1[\quad (2.8)$$

$$h(0) = 0; \quad h(1) = \tilde{0}.$$

Designa-se esta função como subsolução (resp. supersolução) deste problema.

As condições que as subsoluções e supersoluções deverão satisfazer serão para este caso

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0, \tag{2.9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 0, \tag{2.10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{y(x)} = \alpha_1 \neq 0, \tag{2.11}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x)}{y(x)} = \alpha_2 \neq 0, \tag{2.12}$$

onde as duas últimas condições significam que a subsolução (ou supersolução) é assintoticamente equivalente à solução perto das singularidades. Estas 4 condições podem ser satisfeitas escolhendo h da forma

$$h(x) = Bx^{\gamma_1} (1 - x)^{\gamma_2}, \tag{2.13}$$

onde B , γ_1 e γ_2 são parâmetros que se podem determinar.

Com efeito, se considerarmos os desenvolvimentos assintóticos de h quando $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow 1$, pode, facilmente, concluir-se que as condições (2.9)-(2.12) se verificam se tivermos

$$\gamma_1 = \frac{p + 2}{1 - q} \tag{2.14}$$

e

$$\gamma_2 = \frac{2}{1 - q}. \tag{2.15}$$

Tal como no problema (1.1)-(1.3), vamos iniciar o estudo com o caso particular $w(x) = Cx^p$, com $C < 0$ e $p > -2$ constantes.

Um estudo analítico mais detalhado permite-nos determinar valores B_1 e B_2 para os quais se $B \leq B_1$, $h(x)$ representa uma subsolução e se $B \geq B_2$, $h(x)$ representa uma supersolução.

Podemos sintetizar na Tabela 3 os resultados obtidos, que são válidos para $\gamma_1 < 1$ e $\gamma_2 < 1$.

subsoluções	supersoluções	
$B_1 = a(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = b(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	se $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$
$B_1 = b(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = a(-C)^{\frac{1}{1-q}}$	se $\gamma_1 + \gamma_2 > 1$

Tabela 3 - Coeficientes das subsoluções e supersoluções do problema (1.1)-(1.4), para $w(x) = Cx^p$, $C < 0$, com $a = \left(\frac{1}{\gamma_M(1-\gamma_M)}\right)^{\frac{1}{1-q}}$, $b = \left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}\right)^{\frac{1}{1-q}}$ e $\gamma_M = \max(\gamma_1, \gamma_2)$.

Quando $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ou seja, quando $q = -p - 3$, tem-se $B = B_1 = B_2 = \left(\frac{-C}{\gamma_1\gamma_2}\right)^{\frac{1}{1-q}}$, pelo que é obtida a expressão analítica da solução

$$y(x) = \left(\frac{-C}{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\frac{1}{1-q}} x^{\gamma_1} (1-x)^{\gamma_2}. \quad (2.16)$$

Estendam-se estes resultados para uma função mais genérica, com $g(x) \in [m, M]$. A síntese dos resultados está representada na Tabela 4.

subsoluções	supersoluções	
$B_1 = a(m)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = b(M)^{\frac{1}{1-q}}$	se $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$
$B_1 = b(m)^{\frac{1}{1-q}}$	$B_2 = a(M)^{\frac{1}{1-q}}$	se $\gamma_1 + \gamma_2 > 1$

Tabela 4 - Coeficientes das subsoluções e supersoluções do problema (1.1)-(1.4), para $w(x) = -g(x)x^p$ com $0 < m \leq g(x) \leq M$, com a e b definidos como na Tabela 3.

Neste caso não é possível determinar uma solução do tipo (2.13), uma vez que se tem sempre $B_1 \neq B_2$.

No entanto, a existência de uma solução é garantida mediante o Teorema 2, que é uma adaptação ao nosso caso, do Teorema 1 de [7].

Teorema 2 *Sejam $h_1(x)$ e $h_2(x)$, respectivamente uma subsolução e uma supersolução do problema (1.1) – (1.4). Se existir uma função $j(x) \in C(]0, 1[)$ tal que*

$$|g(x)x^p y^q| \leq j(x), \quad (2.17)$$

para todo par (x, y) pertencente ao conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

e verifica

$$\int_0^1 t(1-t)j(t)dt < +\infty, \quad (2.18)$$

então existe pelo menos uma solução $y(x)$ do problema (1.1) – (1.4), que satisfaz $h_1(x) \leq y(x) < h_2(x)$.

De fato, basta escolher a função $j(x) = x^p g(x) h_1(x)^q$ com $h_1(x)$ na forma (2.13) e B de acordo com as Tabelas 3 ou 4. Neste caso, uma vez que $q < 0$, temos $h_1(x)^q > y^q, \forall (x, y) \in D$, donde resulta (2.17).

Por outro lado, com $h_1(x)$ na forma (2.13), a integral em (2.18) toma a forma

$$B^q \int_0^1 t^{\gamma_1 q + p + 1} (1-t)^{\gamma_2 q + 1} g(t) dt,$$

e esta integral só é finita se os expoentes que aparecem na função integranda forem ambos maiores que -1 . Isso decorre imediatamente de (2.14) e (2.15), para $p > -2$.

Finalmente, a unicidade da solução resulta, de acordo com o Teorema 2 de [16], do fato de a função $-w(x)y(x)^q$ ser uma função decrescente em y , para cada $x \in]0, 1[$.

3. Métodos Iterativos

Iremos agora abordar dois métodos iterativos, o de Picard e o de Newton, que nos permitirão transformar o problema não linear (1.1) numa sequência de problemas lineares

Estes métodos, cujas aproximações iniciais, subsoluções e supersoluções foram estabelecidas no capítulo anterior, foram estudados em [13], [8] e [9].

Podemos reescrever a equação (1.1) na forma

$$y''(x) = \beta f(x, y) \quad (3.1)$$

com

$$\beta = -1 \quad (3.2)$$

e

$$f(x, y) = g(x)x^p y(x)^q. \quad (3.3)$$

As iteradas de *Newton* tomam então a forma

$$y''_{j+1}(x) = - \left(g(x)x^p y_j^q(x) + qg(x)x^p y_j^{q-1}(x) (y_{j+1}(x) - y_j(x)) \right), \quad (3.4)$$

ou seja,

$$y''_{j+1}(x) + qg(x)x^p y_j^{q-1}(x) y_{j+1}(x) = (q-1) (g(x)x^p y_j^q(x)) \quad (3.5)$$

com

$$y'_{j+1}(0) = y_{j+1}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

para as condições de fronteira (1.3), e com

$$y_{j+1}(0) = y_{j+1}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

para as condições de fronteira (1.4).

As iteradas de *Picard* são dadas pela fórmula

$$y''_{j+1}(x) - \mu^2(x)y_{j+1}(x) = - (g(x)x^p y_j^q(x) + \mu^2(x)y_j(x)), \quad (3.8)$$

onde a função μ^2 deve satisfazer a condição

$$\mu^2(x) \geq - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad (3.9)$$

de modo a garantir a monotonia das iteradas (ver [13]). No nosso caso, a condição (3.9) será satisfeita se tivermos

$$\mu^2(x) = -qg(x)x^p h_1^{q-1}(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \quad (3.10)$$

onde h_1 é uma subsolução estrita da equação não linear.

Substituindo (3.10) em (3.8), obtém-se então

$$y_{j+1}''(x) + qg(x)x^p h_1^{q-1}(x)y_{j+1}(x) = \left(qh_1^{q-1}(x) - y_j^{q-1}(x) \right) g(x)x^p y_j(x) \quad (3.11)$$

com as condições (3.6) e (3.7), respectivamente, no caso das condições de fronteira (1.3) e (1.4). A convergência destes dois métodos é garantida pelos teoremas que se seguem e cujas demonstrações iremos omitir.

Teorema 3 *Seja $y_0(x) = h_1(x)$ uma subsolução do problema (1.1)–(1.3) (resp.(1.1)–(1.4)). Então, a sucessão de iteradas (3.5) – (3.6) (resp.(3.5) – (3.7)) é monótona crescente e converge uniformemente para a solução.*

Teorema 4 *Seja $y_0(x) = h_1(x)$ uma subsolução do problema (1.1)–(1.3) (resp.(1.1)–(1.4)). Então, a sucessão de iteradas (3.8) – (3.6) (resp.(3.8) – (3.7)) é monótona crescente e converge uniformemente para a solução.*

Teorema 5 *Seja $y_0(x) = h_2(x)$ uma supersolução do problema (1.1)–(1.3) (resp.(1.1)–(1.4)). Então, a sucessão de iteradas (3.8) – (3.6) (resp.(3.8) – (3.7)) é monótona decrescente e converge uniformemente para a solução.*

4. Métodos de Discretização

Iremos utilizar um esquema de diferenças finitas com o propósito de discretizar as equações (3.5) e (3.8).

Seja h o passo da discretização e considere-se uma rede $\{x_i\}_{i=0,1,2,\dots,N}$, com $x_i = ih$. Aproximando a 2^a derivada por uma diferença central de segunda ordem, tem-se

$$y_{j+1}''(x_i) \approx \frac{y_{j+1}(x_{i+1}) - 2y_{j+1}(x_i) + y_{j+1}(x_{i-1}))}{h^2}. \quad (4.1)$$

Por outro lado, as condições (3.6) e (3.7) dão lugar, respectivamente, a

$$y_{j+1}(x_1) \approx y(x_0); \quad y_{j+1}(x_N) = 0 \quad (4.2)$$

e

$$y_{j+1}(x_0) = 0; \quad y_{j+1}(x_N) = 0. \quad (4.3)$$

Escrevendo a equação (3.5) para $x = x_i$, $i = 1, \dots, N - 1$, e aproximando a 2^a derivada de acordo com (4.1), obtêm-se as igualdades

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h^2} \right) y_{j+1,h}(x_{i+1}) + \left(qx_i^p g(x_i) y_{j,h}^{q-1}(x_i) - \frac{2}{h^2} \right) y_{j+1,h}(x_i) + \left(\frac{2}{h^2} \right) y_{j+1,h}(x_{i-1}) = \\ = g(x_i) x_i^q y_{j,h}^q(x_i) (q - 1), \quad i = 1, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $y_{j+1,h}(x_i)$ representa um valor aproximado de $y_{j+1}(x_i)$. Completando com as condições (4.2), no caso do problema (1.1)–(1.3) ou com as condições (4.3), no

caso do problema (1.1)-(1.4), obtém-se um sistema linear de $N + 1$ equações nas incógnitas $y_{j+1,h}(x_i)$.

Por outro lado, a discretização das equações (3.11) dá origem ao sistema

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h^2}\right) y_{j+1,h}(x_{i+1}) + \left(qx_i^p g(x_i) h_1^{q-1}(x_i) - \frac{2}{h^2}\right) y_{j+1,h}(x_i) + \left(\frac{1}{h^2}\right) y_{j+1,h}(x_{i-1}) = \\ = \left(qh_1^{q-1}(x_i) - y_{j,h}^{q-1}(x_i)\right) g(x_i) x_i^p y_{j,h}(x_i), \quad i = 1, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

que se completa também com as condições (4.2), no caso do problema (1.1)-(1.3), ou com as condições (4.3), no caso do problema (1.1)-(1.4).

Deste modo, em qualquer dos casos obtém-se um sistema linear cuja matriz é tridiagonal e que é resolvido pelos processos usuais.

5. Exemplos Numéricos e Análise de Convergência

A partir da implementação de um algoritmo em linguagem PASCAL, foram testados alguns exemplos relativos aos problemas (1.1)-(1.3) e (1.1)-(1.4).

O critério de parada para cada um dos dois métodos iterativos foi

$$\|y_{j+1,h} - y_{j,h}\|_2 < 10^{-6}, \quad (5.1)$$

onde $y_{j,h}$ e $y_{j+1,h}$ são aproximações de iteradas consecutivas. Foram utilizados diferentes passos de discretização consoante os exemplos estudados.

Nas Figuras 1 e 2, estão representados os gráficos das soluções exatas, no caso das condições de fronteira (1.3) e (1.4), respectivamente, com $p = -0.5, 0, 0.5$ e $g(x) = -C = 1$. Estas soluções foram obtidas pelas fórmulas (2.6) e (2.16). As soluções aproximadas correspondentes, obtidas pelo método proposto, quando representadas no mesmo gráfico confundem-se com as exactas(ver gráfico do erro relativo na Figuras 5 e 6).

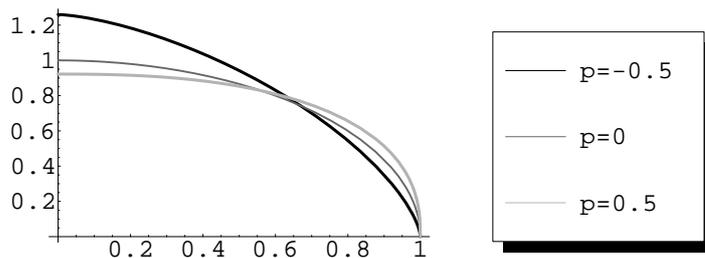


Figura 1: Soluções exatas no caso das condições de fronteira (3) com diferentes valores de $p, q = -2p - 3$ e $g(x) = -C = 1$.

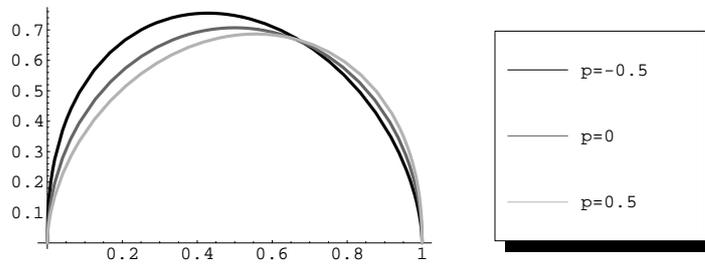


Figura 2: Soluções exatas no caso das condições de fronteira (4) com diferentes valores de $p, q = -p - 3$ e $g(x) = -C = 1$.

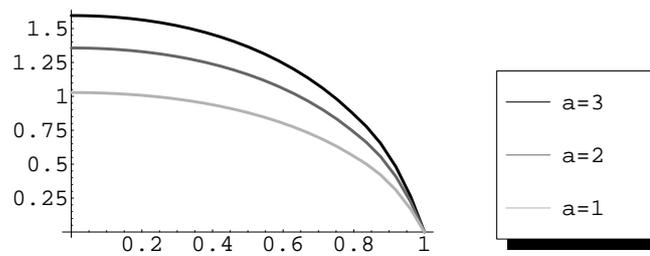


Figura 3: Soluções aproximadas no caso das condições de fronteira (3) para $p = 0$, $q = -1.5$ e $g(x) = ae^x$, com diferentes valores de a .

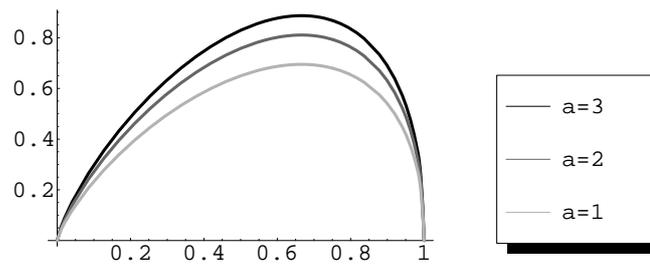


Figura 4: Soluções aproximadas no caso das condições de fronteira (4) para $p = 1.5, q = -3.5$ e $g(x) = ae^x$, com diferentes valores de a .

Na Figura 3, está representado o gráfico da solução aproximada no caso das condições de fronteira (1.3) para $p = 0$, $q = -1.5$ e $g(x) = ae^x$, com $a = 1, 2, 3$.

Na Figura 4, está representado o gráfico da solução aproximada no caso das condições de fronteira (1.4) para $p = 1.5$, $q = -3.5$ e $g(x) = ae^x$, com $a = 1, 2, 3$.

Os gráficos destas duas últimas figuras foram traçados com base nos resultados numéricos obtidos através do nosso programa, tomando como aproximações iniciais subsoluções ou supersoluções es do tipo atrás considerado, e com $h = \frac{1}{1000}$. Note-se que, conforme foi assinalado na sec. 2, nestes casos não é possível determinar analiticamente a solução.

Para efeitos de análise de convergência, foram realizados testes numéricos para 5 casos distintos em que a solução exata é conhecida.

Caso 1. Neste caso usam-se as condições de fronteira (1.3) e os valores dos parâmetros são $p = 0.5$, $q = -4.0$ e $g(x) = -C = 0.25$.

Tomou-se como estimativa da ordem de convergência o valor k definido por

$$k = \frac{\log_2\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\log_2\left(\frac{h_2}{h_1}\right)}, \quad (5.2)$$

onde E_i é o erro relativo calculado com passo h_i , $i = 1, 2$. Neste caso tem-se $k \approx 1.02$.

Caso 2. Neste caso usam-se as condições de fronteira (1.3) e os valores dos parâmetros são $p = -0.5$, $q = -2.0$ e $g(x) = -C = 0.50$. O valor aproximado de k é 0.53.

Caso 3. Neste caso usam-se as condições de fronteira (1.4) e os valores dos parâmetros são $p = 0$, $q = -3.0$ e $g(x) = -C = 1.00$. O valor aproximado de k é 1.0.

Caso 4. Neste caso usam-se as condições de fronteira (1.4) e os valores dos parâmetros são $p = -0.5$, $q = -2.5$ e $g(x) = -C = 1.00$. O valor aproximado de k é 0.9.

Caso 5. Neste caso usam-se as condições de fronteira (1.4) e os valores dos parâmetros são $p = -1.0$, $q = -2.0$ e $g(x) = -C = 1.00$. O valor aproximado de k é 0.7.

Em qualquer dos casos, a estimativa da ordem de convergência acima referida é válida para valores de x suficientemente distantes das singularidades.

Nas Figuras 5 e 6, estão representados os gráficos do comportamento do erro relativo como função de x com $h = \frac{1}{100}$.

Nas Figuras 7 e 8, estão representados os gráficos do comportamento do logaritmo (de base 2) do erro relativo como função do logaritmo (de base 2) de h , para valores de h compreendidos entre $\frac{1}{800}$ e $\frac{1}{100}$, considerando o ponto $x = 0$, no caso (1.3), e o ponto $x = 0.5$, no caso (1.4).

Para traçar os gráficos, recorremos a um programa em *MATHEMATICA*, que permitiu interpolar os resultados numéricos obtidos.

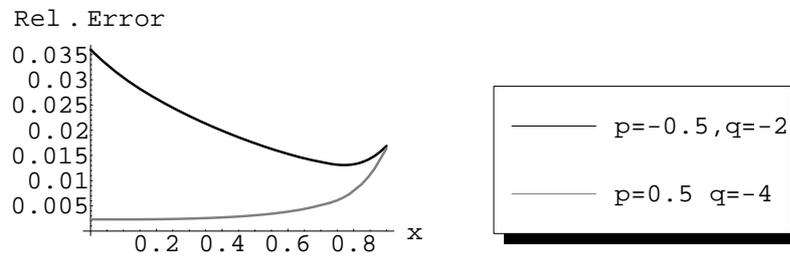


Figura 5: Erro relativo no caso das condições de fronteira (3) em função de x , no caso de $h = 1/100$.

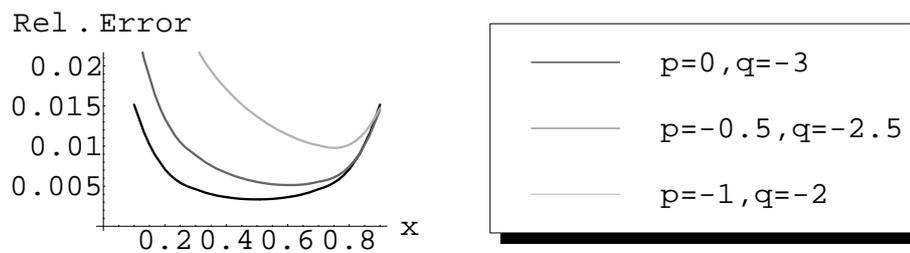


Figura 6: Erro relativo no caso das condições de fronteira (4) como função de x , no caso de $h = 1/100$.

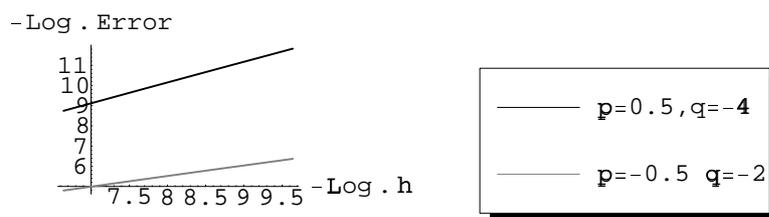


Figura 7: Log. do erro relativo no caso das condições de fronteira (3) como função do Log. de h

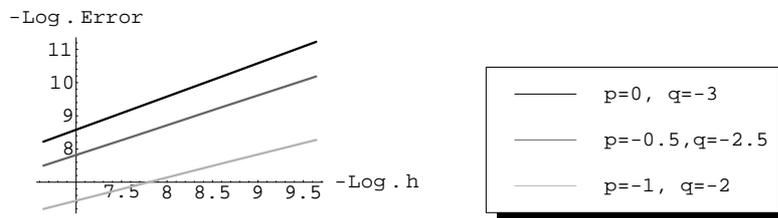


Figura 8: Log. do erro relativo no caso das condições de fronteira (4) como função do Log. de h .

6. Conclusões

Note-se que apesar de usarmos diferenças finitas de 2ª ordem, a ordem de convergência esperada neste caso é inferior, devido às singularidades da solução. Não estando ainda concluída a análise teórica da convergência para este caso, podemos apenas conjecturar, com base nos resultados obtidos, sobre a ordem de convergência.

Assim, em todos os exemplos considerados, verifica-se que a estimativa da ordem de convergência é próxima de 1 ou inferior a 1, dependendo sobretudo dos valores de p . Mais precisamente, para valores de p não negativos obtêm-se valores de k próximos de 1, os quais se tornam mais baixos à medida que p diminui.

Os testes realizados mostraram também que o erro relativo dos resultados e , por conseguinte, a sua ordem de convergência, praticamente não dependem da constante a , no caso de $g(x) = a e^x$, para ambos os tipos de condições de fronteira (estes valores mantêm-se constantes, pelo menos, até à sexta casa decimal, quando a varia de 1 a 3). Tal está de acordo com as previsões teóricas, já que o valor de a não tem influência no carácter da singularidade.

Uma forma de diminuir o efeito da singularidade e acelerar a convergência será utilizar uma substituição de variável que permita obter uma solução mais regular junto dos extremos. Essa abordagem foi aplicada, por exemplo, em [9], tendo conduzido a métodos numéricos com uma ordem de convergência superior. Num trabalho futuro, os autores tencionam analisar as substituições de variável aplicáveis aos casos aqui estudados e adaptar os algoritmos numéricos ao uso dessa técnica.

Referências

- [1] P. Bailey, L. Shampine, P. Waltman, “Nonlinear Two-point Boundary-value Problems”, Academic Press, New York, 1968.
- [2] J.V. Baxley, Some singular nonlinear boundary value problems, *SIAM J. Math. Anal.*, **22** (1991), 463-479.

- [3] M. Carpentier and P. Lima, Numerical solution of a sublinear singular boundary-value problem, in *Proceedings of the International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science*, Macau, 1999.
- [4] A. Fink, J. Gatica, G.E. Hernandez, P. Waltman, Approximation of solutions of singular second-order boundary value problems, *SIAM J. Math. Anal.*, **22** (1991), 440-462.
- [5] R.C. Flagg, C.D. Luning and W.L. Perry, Implementation of new iterative techniques for solution of Thomas-Fermi and Emden-Fowler equations, *J. Comp.Phys.*, **38** (1980), 396-405.
- [6] J. Gatica, V. Olikar, P. Waltman, Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.*, **79** (1989), 62-78.
- [7] P. Habets and F. Zanolin, Upper and lower solutions for a generalized Emden-Fowler equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **181** (1994), 684-700.
- [8] P.M. Lima and M.P. Carpentier, Iterative methods for a singular boundary-value problem, *J. Comp. Appl. Math.*, , **111** (1999), 173-186.
- [9] P.M. Lima and M.P. Carpentier, Numerical solution of a singular boundary-value problem in non-newtonian fluid mechanics, *Comp. Phys. Comm.*, **126** (2000,) 114-120.
- [10] C.D. Luning and W.L. Perry, Positive solutions of negative exponent generalized Emden-Fowler BVP, *SIAM J. Math. Anal.*, **12** (1981), 874-879.
- [11] C.D. Luning and W.L. Perry, An iterative method for solution of a boundary value problem in non-newtonian fluid flow, *J. Non-Newt. Fl. Mech.*, **15** (1984), 145-154.
- [12] C.D. Luning and W.L. Perry, Iterative solution of negative exponent Emden-Fowler problems, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **13**(1990), 159-164.
- [13] J.W. Mooney, A unified approach to the solution of certain classes of nonlinear boundary value problems using monotone iterations, *Nonl. Anal.*, **3** (1979), 449-465.
- [14] A. Nachman and A. Callegari, A nonlinear singular boundary- value problem in the theory of pseudoplastic fluids, *SIAM J. Appl.Math.*, **38** (1980), 275-281
- [15] S. Taliaferro, A nonlinear singular boundary value problem, *Nonl. Anal.*, **3** (1979), 897-904.
- [16] A. Tineo, A comparison theorem for second order ODE's and applications to singular problems, *J. Diff. Eq.*, **116** (1995), 16-30.
- [17] J.W. Wong, On the Generalized Emden-Fowler Equation, *SIAM Review*, **17** (1975), 339-360.