

Novos Filtros Baseados em Interpolação Polinomial para Reconstruir uma Função a Partir dos Coeficientes de Fourier¹

Y. JIAHONG, Departamento de Matemática, UFPR, PR, Brasil

A.R. de PIERRO, Departamento de Matemática Aplicada, UNICAMP, SP,
Brasil

M. WEI, Department of Mathematics, East China Normal University.

Resumo. Nosso principal objetivo neste trabalho é desenvolver métodos para reconstruir os valores discretos de uma função com suporte compacto $f(x)$ a partir de finitos coeficientes de Fourier, evitando o chamado fenômeno de Gibbs. Primeiramente, estabelecemos algumas relações aproximadas entre a transformada de Fourier discreta e os coeficientes de Fourier da função $f(x)$. Em seguida, usando estas relações, apresentamos alguns algoritmos para a reconstrução de funções. Comparando com os métodos de filtragem mais usados podemos reduzir fortemente o fenômeno de Gibbs na função reconstruída. Neste trabalho, mostramos a estimativa do erro na função reconstruída. Algumas simulações numéricas ilustram as vantagens de nosso novo método.

1. Introdução

A transformada de Fourier é uma ferramenta poderosa na computação científica (ver [2],[5], [10] e [11]). Uma função $f(x) \in L_2[0,1]$ pode se expressar como uma série de Fourier por

$$f(x) \simeq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{i2k\pi x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

onde

$$\hat{f}_k = \int_0^1 f(x) e^{-i2k\pi x} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

¹Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP No.96/000837-0 e FUNPAR 98

É muito conhecido que se $f(x)$ é contínua, periódica e de variação limitada em $[0,1]$, então uma soma finita de Fourier truncada

$$f_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_k e^{i2k\pi x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

é exponencialmente convergente a $f(x)$. Mas, se $f(x)$ é descontínua ou não periódica, $f_N(x)$ não é uma boa aproximação. Na verdade, para os pontos longe da descontinuidade, temos

$$f_N(x) - f(x) = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

e se x está próxima do ponto de descontinuidade z , temos

$$f_N(x) - f(x) = O(|f(z^+) - f(z^-)|).$$

Neste caso, ocorre o fenômeno de Gibbs.

Seja N um inteiro positivo e par, definimos

$$x_j = \frac{j}{N}, \quad f_j = f(x_j + \delta), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

onde $0 \leq \delta \leq 1/N$ é uma constante e $\{x_j, j = 0, \dots, N\}$ são nós em $[0,1]$. A transformada de Fourier discreta de $\{f_j, j = 0, \dots, N-1\}$ e a inversa são definidas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{i2k\pi \frac{j}{N}}, \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1, \\ f_j &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{f}_k e^{i2k\pi \frac{j}{N}}, \quad 0 \leq j \leq N-1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

A transformada de Fourier discreta é uma transformação entre N números $\{f_j, j = 0, \dots, N-1\}$ e N números complexos $\{\tilde{f}_k, k = -N/2, \dots, N/2\}$. O seu cálculo pode ser feito com $N \log_2(N)$ operações pela *FFT*.

Nos problemas práticos, somente conhecemos finitos coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k\}$. Muitas metodologias foram pesquisadas para reconstruir os valores discretos de função $\{f_j\}$ a partir de $\{\hat{f}_k\}$. D. Gottlieb e C. W. Shu em [6] demonstraram que os primeiros $(2N+1)$ coeficientes de Fourier de uma função analítica mas não-periódica contêm informação suficiente para construir uma função interpolante com a exatidão espectral. Seu conceito básico é reexpandir a soma de Fourier na série de Gegenbauer que converge bem mais rápido.

Uma razão da convergência lenta de $f_N(x)$ para $f(x)$ deve-se: ao decaimento lento dos coeficientes de Fourier \hat{f}_k . Portanto, aumentando a taxa do decaimento dos coeficientes de Fourier, sem perder a exatidão, pode-se reduzir o fenômeno de

Gibbs. Isto é, multiplicando-se os coeficientes de Fourier pelo fator $\sigma(k)$ ($\sigma(k)$ decrece se $|k|$ aumenta) de modo que a soma modificada

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_k \sigma(k) e^{i2k\pi x},$$

converja mais rapidamente que a soma original. Aqui, chamamos $\sigma(k)$ o filtro.

Há muitos exemplos de filtros que têm sido usados durante anos:

1. O filtro de Fejér

$$\sigma_1(\eta) = 1 - \eta;$$

2. O filtro de Lanczos

$$\sigma_2(\eta) = \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta};$$

3. O filtro de Raised-cosine,

$$\sigma_3(\eta) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\pi\eta)];$$

4. Um filtro de ordem p

$$\sigma_4(\eta) = 1 - \frac{(2p-1)!}{(p-1)!^2} \int_0^\eta [t(1-t)]^{p-1} dt.$$

Uma das vantagens do método de filtragem no espaço de Fourier é que não precisa cálculos adicionais. O seu cálculo pode ser feito por *FFT*.

Mas, é óbvio que o decrescimento nas freqüências altas provocará perda de informação no caso de uma função descontínua. Então, este método não funciona bem numa vizinhança da descontinuidade.

Neste trabalho, deduzimos novos filtros baseados na interpolação polinomial. Este trabalho está organizado como segue. Na Seção 2, deduzimos algumas novas relações aproximadas entre os coeficientes de Fourier \hat{f}_k da função $f(x)$ (ou da transformada de Fourier com freqüência k) e a transformada de Fourier discreta \tilde{f}_k da amostra discreta $\{f_j, j = 0, 1, \dots, N-1\}$, se consideramos que $f(\cdot)$ é definida em seu suporte $[0, 1]$ e, a partir dela, deduzimos um novo filtro. Na Seção 3, apresentamos nossos algoritmos para a reconstrução de $\{f_j, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ a partir dos coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k, k = -N/2, \dots, N/2-1\}$ e mostramos a estimativa do erro da função reconstruída. Na Seção 4, alguns experimentos numéricos ilustram as vantagens do novo método. Na Seção 5, concluímos nosso trabalho com algumas observações.

Terminamos esta seção introduzindo algumas hipóteses sobre a função.

Hipóteses: $f(x)$ é uma função real definida em $[0, 1]$ e

1. $f(x)$ tem finitos pontos de descontinuidade $Z = \{z_1, \dots, z_l\}$ e eles são dados;
2. Para $x \in (0, 1)$ e $x \notin Z$, existe $f'(x)$ e $f''(x)$, e $\sup_{x \notin Z} |f'(x)| = C_1 \leq \infty$, $\sup_{x \notin Z} |f''(x)| = C_2 \leq \infty$.

As hipóteses são perfeitamente aceitáveis para funções que aparecem nos problemas práticos.

2. A relação entre \hat{f}_k e \tilde{f}_k e os novos filtros

Nesta seção, deduziremos uma nova relação aproximada entre \hat{f}_k e \tilde{f}_k . Dependendo da posição do ponto de descontinuidade, e usando partições uniformes ou não-uniformes dos nós, aproximamos $f(x)$ interpolando os polinômios $p^{(0)}(x)$ (função constante por partes) e $p^{(1)}(x)$ (função linear por partes), respectivamente. Para $x \in (x_j, x_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, temos

$$p^{(0)}(x) = f_j = f\left(x_j + \frac{1}{N}\right)$$

e

$$p^{(1)}(x) = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} f_j^+ + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} f_{j+1}^-.$$

Podemos determinar os coeficientes de $p^{(0)}(x)$ e $p^{(1)}(x)$, respectivamente, que são as aproximações de \hat{f}_k . Em seguida, deduzimos as relações aproximadas entre \hat{f}_k e \tilde{f}_k . Aqui, somente mostramos o resultado baseado em $p^{(0)}(x)$.

Teorema 1. *Suponhamos que uma função $f(x)$ satisfaz às Suposições 1-2, $\{x_j\}_0^N$ e $\{f_j\}_0^{N-1}$ são definidos em (1.2), e $z_m \in \{x_j\}_1^{N-1}$, $m = 1, \dots, l$. Então,*

$$|\hat{f}_k - a_k \tilde{f}_k| \leq C(f) \Delta x, \quad \text{para qualquer inteiro } k,$$

onde

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{N(e^{-i2k\pi/N} - 1)}{-i2k\pi} = \frac{\sin(k\pi/N)}{k\pi/N} e^{-ik\pi/N}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

e $C(f)$ é uma constante não-negativa que somente depende de f .

Demonstração: Primeiramente, faremos a prova para o caso $k \neq 0$. Como $x_j = \frac{j}{N}$, $j = 0, 1, \dots, N$, logo

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-i2k\pi x} dx = \frac{e^{-i2k\pi x}}{-i2k\pi} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = e^{-i2k\pi \frac{j}{N}} \frac{e^{-i2k\pi/N} - 1}{-i2k\pi}$$

e obtemos

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-i2k\pi x} dx = \frac{a_k}{N} e^{\frac{-i2k\pi j}{N}}. \quad (2.2)$$

Observamos que a igualdade acima também é válida se $k = 0$. Depois, usando $f(x) \approx p^{(0)}(x)$, obtemos

$$\hat{f}_k = \int_0^1 p^{(0)}(x) e^{-i2k\pi x} dx + r_k(\Delta x) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-i2k\pi x} dx + r_k(\Delta x),$$

onde $r_k(\Delta x)$ é o termo do erro que será especificado mais adiante. Então,

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2k\pi \frac{j}{N}} \frac{e^{-i2k\pi/N} - 1}{-i2k\pi} + r_k(\Delta x).$$

Usando

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2k\pi \frac{j}{N}}, \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1,$$

temos

$$\hat{f}_k = \tilde{f}_k \frac{N(e^{-i2k\pi/N} - 1)}{-i2k\pi} + r_k(\Delta x) = a_k \tilde{f}_k + r_k(\Delta x). \quad (2.3)$$

Agora, voltamos para estimar o termo $r_k(\Delta x)$. Supondo que a derivada de $f(x)$ existe no subintervalo (x_j, x_{j+1}) , para qualquer $x \in (x_j, x_{j+1})$, temos que

$$f(x) = f_j + f'(\xi)(x - \eta_j), \quad \text{para algum } \xi \in (x_j, x_{j+1}).$$

Usando a Suposição 2, obtemos

$$\left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} [f(x) - f_j] e^{-i2k\pi x} dx \right| \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sup_{\xi} |f'(\xi)| |x - \eta_j| dx \leq \frac{1}{2} C_1 (\Delta x)^2.$$

Escolhendo η_j como $x_j + \Delta x/2$, o limitante acima será $\frac{1}{4} C_1 (\Delta x)^2$. Da desigualdade acima e de (1.1), (1.3), (2.1), (2.2) e (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} |r_k(\Delta x)| &= |\hat{f}_k - a_k \tilde{f}_k| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x) - f_j| dx \\ &\leq N \frac{1}{2} C_1 (\Delta x)^2 \equiv C(f) \Delta x. \end{aligned}$$

No caso $k = 0$, então, o valor da integral em (2.2) é $1/N$. Seguindo a demonstração do caso $k \neq 0$, podemos facilmente obter a mesma estimativa com $a_0 = 1$. Assim, terminamos a prova deste teorema. \square

As seguintes observações são necessárias:

1. É claro que, se $f(x)$ é aproximada usando $p^{(0)}(x)$, então o coeficiente exato da sua expansão de Fourier, que é $a_k \tilde{f}_k$, será uma aproximação de \hat{f}_k . Tal idéia é semelhante àquela no método de Splines em [13]. Mas, nossa expressão mostra a relação entre \tilde{f}_k e \hat{f}_k de maneira que podemos utilizar a *FFT* nas operações numéricas.

2. Seja $\sigma(k) = \frac{1}{a_k}$. Logo, por (2.1), temos que

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{k\pi/N}{\sin(k\pi/N)} e^{ik\pi/N}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

e podemos verificar que

$$1 \leq |\sigma(k)| \leq \frac{\pi}{2}$$

a partir da desigualdade bem conhecida

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1 \quad \text{para } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. Quando calculamos os valores aproximados de $\{f_j, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ pela *FFT* inversa, podemos utilizar os valores aproximados de \tilde{f}_k :

$$\tilde{f}_k \approx \sigma(k) \hat{f}_k, \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1.$$

Notemos que $\sigma(k)$ é um filtro no espaço de Fourier.

4. Nos dois casos particulares, onde $f(x)$ é uma função escada em $[0,1]$ e todos os pontos interiores no subintervalo (x_j, x_{j+1}) não são os pontos de descontinuidade, para $j = 0, 1, \dots, N-1$, ou onde $f(x)$ é uma função linear em $[0,1]$, obtemos a reconstrução exata de $\{f(\eta_j) = f_j\}_0^{N-1}$ (ver [15]).

Admitindo as condições do Teorema 1, suponhamos que os pontos da descontinuidade de $f(x)$ coincidem com alguns nós x_j . Mas, para alguns problemas mais práticos, precisamos considerar o caso em que os pontos de descontinuidade estão situados em qualquer lugar. Por conveniência, vamos supor que $f(x)$ possui apenas um ponto de descontinuidade no intervalo $(0,1)$, denotado por z com $x_p < z < x_{p+1}$ e $0 < p < N-1$. Agora, utilizaremos as novas partições não-uniformes dos nós tal que a derivada de $f(x)$ existe em cada subintervalo. Sejam

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p < z < x_{p+2} < \dots < x_{N-1} < x_N = 1, \quad (2.5)$$

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \Delta x = \frac{1}{N}, \quad j \neq p, p+1, \quad \Delta x_p = z - x_p, \quad \Delta x_{p+1} = x_{p+2} - z, \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} f_j &= f(\eta_j), \quad j = 0, \dots, N-1 \quad \text{com } \eta_j = x_j + \delta_j, \quad j \neq p, p+1 \\ f_p &= f(x_p + \delta_p), \quad f_{p+1} = f(z + \delta_{p+1}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $0 \leq \delta_j = \delta \leq \Delta x$, $j = 0, \dots, N-1$, $j \neq p, p+1$, $0 \leq \delta_p \leq \Delta x_p$ e $0 \leq \delta_{p+1} \leq \Delta x_{p+1}$ são constantes.

Analogamente, obtemos uma relação aproximada entre \hat{f}_k e \tilde{f}_k como segue.

Teorema 2. *Suponhamos que uma função $f(x)$ satisfaz as Suposições 1-2 e $f(x)$ possui apenas um ponto de descontinuidade interior z . As partições dos nós no intervalo $[0,1]$ e $\{f_j\}_0^{N-1}$ são as definidas em (2.5)-(2.7) respectivamente. Então*

$$|\hat{f}_k - a_k \tilde{f}_k - (f_p - f_{p+1}) \hat{g}_k| \leq C(f) \Delta x, \quad (2.8)$$

onde

$$\hat{g}_k = \begin{cases} z - x_{p+1}, & k = 0, \\ \frac{1}{-i2k\pi} (e^{-i2k\pi z} - e^{-i2k\pi x_{p+1}}), & k \neq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

e $C(f)$ é uma constante não-negativa que somente depende de f . $\{a_k\}$ é a mesma do Teorema 1.

Já sabemos que o erro da aproximação será menor se aproximamos $f(x)$ por $p^{(1)}(x)$. Então, podemos dar uma relação mais exata baseada nesse tipo de aproximação (ver [15]).

3. Algoritmos de reconstrução

Já estabelecemos algumas relações aproximadas entre a transformada de Fourier discreta e os coeficientes de uma função $f(x)$ na Seção 2 e podemos reconstruir o conjunto discreto $\{f_j, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ de uma função $f(x)$ a partir dos coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k, k = -N/2, \dots, N/2-1\}$. Se $f(x)$ satisfaz às condições do Teorema 1, então, temos

Algoritmo 1 Dados $\{\hat{f}_k, k = -N/2, \dots, N/2-1\}$,

Passo 1. Inicializar

$$\tilde{f}_k := \sigma(k) \hat{f}_k \quad \text{para } k = -N/2, \dots, N/2-1,$$

onde $\sigma(k)$ satisfaz (2.4);

Passo 2. Calcular

$$Rf_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{f}_k e^{i2k\pi \frac{j}{N}} \quad \text{para } j = 0, \dots, N-1,$$

usando a *IFFT*, onde $\{Rf_j, j = 0, \dots, N-1\}$ são os valores reconstruídos da função em $\{\eta_j, j = 0, \dots, N-1\}$.

Precisamos apenas de N multiplicações no Passo 1 e $O(N \log_2 N)$ para as operações da *IFFT* no Passo 2. Então, a quantidade de cálculos não é grande neste algoritmo. Se $f(x)$ satisfaz às condições do Teorema 2, aplicamos a fórmula (2.28) e obtemos

$$\sigma(k) \hat{f}_k \approx \tilde{f}_k + (f_p - f_{p+1}) \sigma(k) \hat{g}_k, \quad k = -N/2, \dots, N/2-1.$$

Denotando as transformadas de Fourier inversas de $\{\sigma(k)\hat{f}_k\}_{-N/2}^{N/2-1}$ e $\{\sigma(k)\hat{g}_k\}_{-N/2}^{N/2-1}$ como $\{h_j\}_0^{N-1}$ e $\{g_j\}_0^{N-1}$, respectivamente, obtemos

$$h_j \approx f_j + (f_p - f_{p+1})g_j, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.1)$$

Para obter $\{f_j\}_0^{N-1}$, basta resolver o sistema de equações (3.1). Como $\{\hat{g}_k\}$ é pequeno, $\{g_j\}$ também o será. Claramente, o sistema de equações (3.1) tem solução. O algoritmo é descrito como segue:

Algoritmo 2 Dados $\{\hat{f}_k, k = -N/2, \dots, N/2-1\}$ e $\{\hat{g}_k, k = -N/2, \dots, N/2-1\}$,
Passo 1. Inicializar

$$\begin{aligned} \tilde{h}_k &:= \sigma(k)\hat{f}_k \quad \text{para } k = -N/2, \dots, N/2-1, \\ \tilde{g}_k &:= \sigma(k)\hat{g}_k \quad \text{para } k = -N/2, \dots, N/2-1, \end{aligned}$$

onde $\sigma(k)$ satisfaz (2.4).

Passo 2. Calcular

$$\begin{aligned} h_j &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{h}_k e^{i2k\pi \frac{j}{N}} \quad \text{para } j = 0, \dots, N-1, \\ g_j &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{g}_k e^{i2k\pi \frac{j}{N}} \quad \text{para } j = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

pela *IFFT*.

Passo 3. Achar a solução do sistema de equações (3.1) como segue

Passo 3.1

$$\begin{cases} (1 - g_p)Rf_p - g_p Rf_{p+1} &= h_p \\ g_{p+1}Rf_p + (1 - g_{p+1})Rf_{p+1} &= h_{p+1} \end{cases} \quad (3.2)$$

Passo 3.2

$$Rf_j = h_j - (Rf_p - Rf_{p+1})g_j, \quad j = 0, \dots, N-1, j \neq p, p+1. \quad (3.3)$$

Precisamos apenas de $2N$ multiplicações no Passo 1, $O(N \log_2 N)$ operações para as duas *IFFTs* no Passo 2 e algumas poucas operações para achar a solução do sistema de equações (3.2) e (3.3) no Passo 3 (no Passo 3.1, podemos achar diretamente as soluções de Rf_p e Rf_{p+1} e em seguida, as inserimos em (3.3)). Então, a quantidade do cálculos neste algoritmo é da mesma ordem do Algoritmo 1. Se há muitos pontos de descontinuidade de $f(x)$ que possuem a mesma característica de z , podemos desenvolver um algoritmo semelhante. Neste caso, precisamos de mais operações por causa da *IFFT* no Passo 2 e calculamos a solução de (3.2) e (3.3) por um método iterativo. Pela estrutura da matriz, o método iterativo converge muito rapidamente. Para todos os nossos algoritmos, podemos utilizar a *FFT*. Portanto, o esforço computacional será pequeno.

Usando a mesma idéia, podemos generalizar os Algoritmos 1 e 2 para dimensões maiores.

Supondo que $f(x)$ satisfaz às condições das Suposições 1-2, temos a seguinte estimativa de erro da função reconstruída pelo Algoritmo 1.

Teorema 3. *Suponha que uma função $f(x)$ satisfaz as condições das suposições 1-2. Então, para $j = 0, 1, \dots, N - 1$, temos*

$$|f_j - Rf_j| \leq \frac{4 + \ln(N)}{2N^2} C_2 + \frac{\pi}{2N^2} \sum_{q=1}^l |f'(z_q + \frac{1}{2N}) - f'(z_q - \frac{1}{2N})| (1 + \frac{1}{4d_{qj}}),$$

onde $d_{qj} = \min_{k=-1,0,1} |x_j - k - z_q - \frac{1}{2N}|$.

Uma melhor reconstrução com filtros de ordem alta foi estabelecida somente nos pontos que estão longe da descontinuidade (ver [14]). Podemos alcançar uma melhor aproximação dos valores da função inclusive em pontos muito próximos da descontinuidade. Analogamente, podemos conseguir estimativas semelhantes para outros algoritmos.

4. Exemplos Numéricos

Apresentaremos alguns exemplos para ilustrar a reconstrução dos valores da função. De acordo com as diferentes características da função, efetuaremos o cálculo pelos Algoritmos 1, 2 e Algoritmo 5.3 em [15], respectivamente. Tomamos N como 64, 128 e 256 respectivamente. Usando os diferentes filtros $\sigma(k)$ e $\sigma_m(\frac{2k}{N})$, $m = 1, 2, 3, 4$, compararemos o erro em cada ponto pelo método da reconstrução. Escolhemos $p = 10$ em $\sigma_4(\frac{2k}{N})$. Além disso, calcularemos o erro quadrático definido por:

$$e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |f_j - Rf_j|^2}.$$

Em todos os exemplos, calcularemos $\{f_j = f(x_j + \Delta x/2), j = 0, \dots, N - 1\}$ quando utilizamos os Algoritmos 1 e 2, e $\{f_j = f(x_j), j = 0, \dots, N - 1\}$ quando utilizamos o Algoritmo 5.3.

Exemplo 1. Seja a Função $f_1(x)$ dada por

$$f_1(x) = x, \quad x \in [0, 1].$$

Notemos que, no intervalo $(0, 1)$, $f_1(x)$ é analítica e $f_1(0) \neq f_1(1)$.

As Fig. 1 (a)-(e) mostram os gráficos do erro em cada ponto usando os filtros $\{\sigma(k)\}$ e $\{\sigma_m(\frac{2k}{N}), m = 1, 2, 3, 4\}$, respectivamente, com $N = 256$. Da Fig. 1,

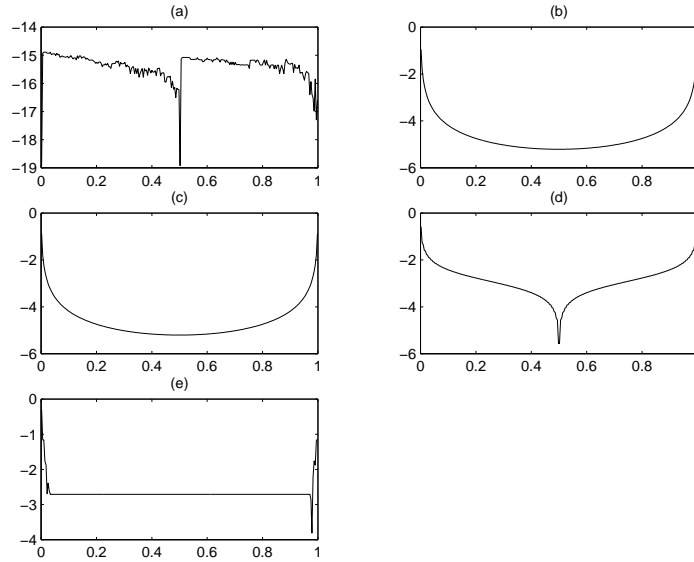


Figura 1: Erro $\log_{10}|Rf_1(x) - f_1(x)|$ em cada ponto com $N = 256$ e diferentes filtros: $\{\sigma(k)\}$ em (a) e $\{\sigma_m(\frac{2k}{N}), m = 1, 2, 3, 4\}$ em (b)-(e).

observamos que o erro da função reconstruída é quase $O(10^{-16})$ causado apenas pelo erro da máquina.

A Tabela 1 mostra o erro quadrático para os métodos de reconstrução usando os diferentes filtros com $N = 64, 128$ e 256 .

Tabela 1: Erro quadrático para $f_1(x)$

N	$\sigma(k)$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
64	1.7408×10^{-16}	2.0253×10^{-2}	2.3987×10^{-2}	4.8369×10^{-2}	6.4480×10^{-2}
128	2.0529×10^{-16}	1.4317×10^{-2}	1.6957×10^{-2}	3.4700×10^{-2}	4.5760×10^{-2}
256	6.0281×10^{-16}	1.0123×10^{-2}	1.1990×10^{-2}	2.4717×10^{-2}	3.2416×10^{-2}

Exemplo 2. Tomemos a Função $f_2(x)$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 0.5), \\ \cos(x), & x \notin [0, 0.5). \end{cases}$$

Neste caso, no intervalo $(0, 1)$ há um ponto de descontinuidade de $f_2(x)$.

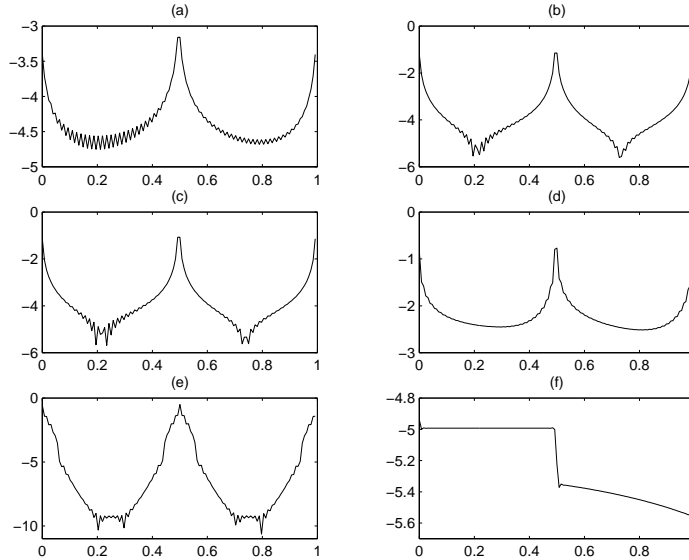


Figura 2: Erro $\log_{10}|Rf_2(x) - f_2(x)|$ em cada ponto com $N = 256$ e diferentes filtros: $\{\sigma_k\}$ em (a) e $\{\sigma_m(\frac{2k}{N}), m = 1, 2, 3, 4\}$ em (b)-(e). (f) mostra o erro pelo Algoritmo 5.3.

A Fig. 2, (a)-(e) mostra os gráficos do erro em cada ponto usando os filtros $\{\sigma(k)\}$ e $\{\sigma_m(\frac{2k}{N}), m = 1, 2, 3, 4\}$, respectivamente, com $N = 256$. (f) mostra o erro em cada ponto para o Algoritmo 5.3 em [15]. Na Fig. 2, observamos que o erro da reconstrução usando o filtro $\sigma(k)$ nos pontos próximos de $x = 0$, $x = 1$ e $x = 1/2$ é bem menor que usando quaisquer dos outros filtros. Então, podemos reduzir fortemente as oscilações do fenômeno de Gibbs na função reconstruída. Note que omitimos os pontos $\{\eta_j$ (ou x_j), $j = 0, N/2, N - 1\}$ quando calculamos o erro quadrático de $f_2(x)$ pelo filtro σ_4 . Além disso, podemos reconstruir $(N + 2)$ valores da função quando utilizamos o Algoritmo 5.3. Os valores nas fronteiras e os limites à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade da função são $Rf_2(x_0) = -2.8830 \times 10^{-6}$, $Rf_2(x_N) = 5.4030 \times 10^{-1}$, $Rf_2(x_{N/2}^-) = 2.5000 \times 10^{-1}$ e $Rf_2(x_{N/2}^+) = 8.7760 \times 10^{-1}$, e seus valores verdadeiros são 0 , $\cos(1) \approx 5.4030 \times 10^{-1}$, 0.25 e $\cos(1/2) \approx 8.7758 \times 10^{-1}$, respectivamente. Se utilizamos o Algoritmo 1 pelo filtro σ_4 , $Rf_2(x_0 + \Delta x/2) = 2.7085 \times 10^{-1}$, $Rf_2(x_{N/2} + \Delta x/2) = 5.6255 \times 10^{-1}$, e os valores verdadeiros são 4.9833×10^{-1} e 8.7570×10^{-1} , respectivamente. Não conseguimos obter os valores de $f_2(x_N)$, $f_2(x_{N/2}^-)$ e $f_2(x_{N/2}^+)$.

A Tabela 2 mostra o erro quadrático para os métodos de reconstrução usando os diferentes filtros com $N = 64, 128$ e 256 .

Tabela 2 Erro quadrático para $f_2(x)$

N	$\sigma(k)$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	Algoritmo 5.3
64	3.53×10^{-4}	1.67×10^{-2}	1.98×10^{-2}	4.05×10^{-2}	1.46×10^{-2}	3.08×10^{-5}
128	1.25×10^{-4}	1.18×10^{-2}	1.40×10^{-2}	2.89×10^{-2}	1.03×10^{-2}	7.68×10^{-6}
256	4.42×10^{-5}	8.38×10^{-3}	9.29×10^{-3}	2.05×10^{-2}	7.34×10^{-3}	1.91×10^{-6}

Exemplo 3. Consideremos a função $f_3(x)$ dada por:

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 0.5 + 1/256], \\ 1, & x \notin [0, 0.5 + 1/256]. \end{cases}$$

Dividimos o intervalo $[0,1]$ em 128 subintervalos típicos como (2.7)-(2.9), e apenas 126 subintervalos são equidistantes, ou seja, este exemplo satisfaz as condições do Teorema 2.

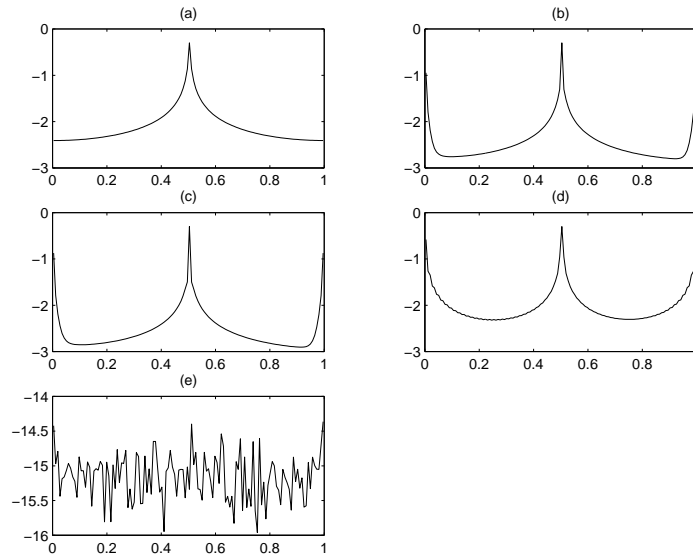


Figura 3: Erro $\log_{10}|Rf_3(x) - f_3(x)|$ em cada ponto com $N = 128$ pelo Algoritmo 1 com diferentes filtros: $\{\sigma(k)\}$ e $\{\sigma_m, m = 1, 2, 3\}$ em (a)-(d), respectivamente. (e) mostra o erro pelo Algoritmo 2 com $\{\sigma(k)\}$.

Na Fig. 3, (a)-(d) são os gráficos do erro em cada ponto pelo Algoritmo 1 com quatro filtros $\{\sigma(k)\}$ e $\{\sigma_m, m = 1, 2, 3\}$ respectivamente e (e) mostra o erro pelo Algoritmo 2 com filtro $\{\sigma(k)\}$. Da Fig. 3, observamos que os erros da função

reconstruída são quase iguais pelo Algoritmo 1 com quatro filtros $\{\sigma(k)\}$ e $\{\sigma_m, m = 1, 2, 3\}$, e seus erros quadráticos são 4.9869×10^{-2} , 4.7283×10^{-2} , 4.7745×10^{-2} e 5.8743×10^{-2} , respectivamente. Mas, o erro da função reconstruída é quase $O(10^{-16})$ causado pelo erro da máquina usando o Algoritmo 2 com os quatro filtros e seu erro quadrático é 1.1654×10^{-15} .

Os exemplos numéricos acima mostram que o filtro $\sigma(k)$ introduzido na Seção 2 é o melhor para reconstruir uma função com o suporte compacto que possui pontos de descontinuidade e/ou é não periódica no intervalo do suporte. É óbvio que temos que utilizar os Algoritmos 1 e 2, respectivamente, de acordo com os pontos de descontinuidade típicos de $f(x)$. Se utilizamos o Algoritmo 5.3 em [15], obtemos um resultado melhor.

5. Conclusões

Em nosso trabalho, obtivemos filtros partindo de um novo ponto de vista, diferente daquele dos métodos tradicionais. Podemos reduzir fortemente o fenômeno de Gibbs na função reconstruída. Algumas idéias e perguntas que podem ser uma continuação dos resultados aqui apresentados surgem naturalmente: a possibilidade de desenvolver um algoritmo iterativo para detectar as descontinuidades de uma função, combinar a FFT com wavelets para obter melhores resultados e aplicar nosso filtro para melhorar os resultados obtidos em interpolação de dados.

Referências

- [1] M. Bertero, C. Demol and E.R. Pike, Linear inverse problems with discrete data, I: General formulation and singular system analysis, *Inverse Probl.*, **1** (1985), 301-330.
- [2] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang, "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer-Verlag, 1988.
- [3] W.K. Cheung and R.M. Lewitt, Modified Fourier reconstruction method using shifted Transform samples, *Phys. Med. Biol.*, **36** No.2 (1991), 269-277.
- [4] W. Gautschi, Attenuation factors in practical Fourier analysis, *Numer. Math.*, **18** (1972), 373-400.
- [5] D. Gottlieb and S. Orszag, "Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications", SIAM, Philadelphia, PA, 1977.
- [6] D. Gottlieb and C.W. Shu, On the Gibbs phenomenon and its resolution, *SIAM Rev.*, **39** (1997), 644-668.
- [7] D. Gottlieb, C.W. Shu, A. Solomonoff and H. Vandeven, On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of the a nonperiodic analytic function, *J. Comput. Appl. Math.*, **43** (1992), 81-98.

- [8] M.H. Gutknecht, Attenuation factors in multivariate Fourier analysis, *Numer. Math.*, **51** (1987), 615-629.
- [9] G. Hammerlin and K.-H. Hoffmann, "Numerical Mathematics", Springer-Verlag, 1991.
- [10] G. Hamming, "Numerical Methods for Scientists and Engineers", 2nd Edit., McGraw-Hill, New York, 1973.
- [11] A. K. Jain, "Fundamentals of digital Image Processing", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [12] F. Locher, Interpolation on uniform meshes by the translates of one function and related attenuation factors, *Math. Comp.*, **37** (1981), 403-416.
- [13] E. Neuman, Calculation of complex Fourier coefficients using natural splines, *Computing*, **29** (1982), 327-336.
- [14] D. H. Vandeven, Family of spectral filters for discontinuous problem, *J. Sci. Comp.*, **6** (1991), 159-192.
- [15] J.H. Yin, "Reconstrução de funções a partir de coeficientes de Fourier e de momentos ortogonais: novos métodos", tese de doutorado, Unicamp, Setembro, 1998.
- [16] J.H. Yin, Alvaro R. De Pierro and M.S. Wei, Reconstruction of a compactly supported function from the discrete sampling of its Fourier transform, *IEEE. Trans. Signal Processing*, **47**, No.12 (1999), 3356-3364.