Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **1**, No. 1 (2000), 193-200.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Solução Semi-Analítica da Equação de Transporte Dependente do Tempo

J.V.P. de OLIVEIRA, PPGEM/UFRGS e Departamento de Matemática, UFSM, Av. Roraima, S/N - CCNE, 97105-900 Santa Maria, RS, Brasil.

A.V. CARDONA[1], FAMAT/PUCRS, Prédio 15, Av. Ipiranga, 6681, 90619-900 Porto Alegre, RS, Brasil.

Resumo. Neste trabalho apresentamos uma nova abordagem para resolver a equação de transporte linear unidimensional dependente do tempo através da combinação do método espectral com a técnica da transformada de Laplace. Seguindo a idéia do método espectral, transformamos o problema dependente do tempo em um conjunto de problemas unidimensionais estacionários os quais são solucionados pela aplicação da técnica da transformada de Laplace. O sistema algébrico resultante é resolvido recursivamente. Resultados numéricos são apresentados.

1. Introdução

Na literatura disponível existe um grande número de trabalhos com o objetivo de resolver a equação de transporte dependente do tempo em domínios ilimitados. Como, por exemplo, trabalhos que fazem uso do Método das Colisões Múltiplas[1, 2, 3, 4]. Por outro lado, o método espectral tem sido largamente aplicado para solucionar problemas para os quais é possível construir uma solução de Sturm-Liouville. Este procedimento é bem conhecido como a Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT)[5]. Neste trabalho, aplicamos o método espectral para resolver a equação de transporte linear dependente do tempo em uma placa de domínio limitado. Para este tipo de problema não é possível construir um problema de Sturm-Liouville. A fim de aplicar o método espectral, expandimos o fluxo angular e o termo fonte numa série truncada de polinômios ortogonais na variável temporal. Tomando momentos e usando propriedades da ortogonalidade, transformamos o problema dependente do tempo em um conjunto de problemas unidimensionais estacionários cuja aproximação em ordenadas discretas é solucionada pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial com inversão analítica.

[1]avcardona@music.pucrs.br

2. O Método Espectral

Visando apresentar o método proposto acima, consideremos o problema de transporte unidimensional linear dependente do tempo em geometria plana, descrito pela equação [6, 7]:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,\mu,t) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu,t) + \sigma_t\psi(x,\mu,t) = \frac{\sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu',t)d\mu' + F(x,\mu,t)\,, \quad (2.1)$$

pelas condições de contorno:

$$\psi(0,\mu,t) = \psi(0,-\mu,t), \qquad \mu > 0 \quad (2.2)$$

$$\psi(L,\mu,t) = 0, \qquad \mu < 0 \quad (2.3)$$

e condição inicial:

$$\psi(x,\mu,0) = \Phi(x,\mu)\,, \quad (2.4)$$

onde $\psi(x,\mu,t)$ é o fluxo angular de partículas na direção μ, com a variável espacial $x \in [0, L]$ no instante de tempo t; v, σ_t e $\sigma_s(\mu \to \mu')$ denotam respectivamente, a velocidade dos nêutrons, a seção de choque total e a seção de choque de espalhamento. Aqui $F(x,\mu,t)$ e $\Phi(x,\mu)$ são respectivamente o termo de fonte e a condição inicial prescritos.

Fazendo, $z = vt$ o problema (2.1-2.4) pode ser descrito pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi(x,\mu,z) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,\mu,z) + \sigma_t\Psi(x,\mu,z) = \frac{\sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(x,\mu',z)d\mu' + S(x,\mu,z)\,, \quad (2.5)$$

pelas condições de contorno:

$$\Psi(0,\mu,z) = \Psi(0,-\mu,z), \qquad \mu > 0 \quad (2.6)$$

$$\Psi(L,\mu,z) = 0, \qquad \mu < 0 \quad (2.7)$$

e condição inicial:

$$\Psi(x,\mu,0) = \Phi(x,\mu)\,, \quad (2.8)$$

onde $\Psi(x,\mu,z) = \psi(x,\mu,z/v)$ e $S(x,\mu,z) = F(x,\mu,z/v)$.

Com o objetivo de eliminar a dependência temporal do fluxo angular, inicialmente aproximamos $\Psi(x,\mu,z)$ e $S(x,\mu,z)$ por uma série truncada de polinômios de Laguerre[8], $\{L_0(z), L_1(z), L_2(z), \cdots, L_M(z)\}$, que são ortogonais em relação a função peso e^{-z} sobre o intervalo $[0,+\infty)$, ou seja,

$$\Psi_M(x,\mu,z) = \sum_{k=0}^{M}\Psi^k(x,\mu)L_k(z) \quad (2.9)$$

e

$$S_M(x,\mu,z) = \sum_{k=0}^{M} S^k(x,\mu)L_k(z), \tag{2.10}$$

tal que

$$\int_0^\infty e^{-z}L_k(z)L_m(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq m \\ 1 & \text{se} \quad k = m\,, \end{cases} \tag{2.11}$$

substituimos (2.9) e (2.10) na equação (2.5), multiplicamos a equação resultante por $e^{-z}L_m(z)$ e integramos de 0 a ∞ sobre z, com $m = 0,1,2,...,M$, obtendo-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\mu\frac{\partial}{\partial x}\Psi^m(x,\mu) + \sigma_t\Psi^m(x,\mu) \\ &\qquad = \frac{\sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\Psi^m(x,\mu')d\mu' + S^m(x,\mu) + \sum_{k=m+1}^{M}\Psi^k(x,\mu)\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado, substituindo a expressão (2.9) na condição inicial (2.8), resulta em

$$\sum_{k=m+1}^{M}\Psi^k(x,\mu) = \Phi(x,\mu) - \sum_{k=0}^{m}\Psi^k(x,\mu)\,. \tag{2.13}$$

Finalmente, após a substituição da expressão (2.13) na equação (2.12), concluimos que cada componente $\Psi^m(x,\mu)$, para $m = 0,1,...,M$, satisfaz o seguinte problema estacionário de transporte:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\Psi^m(x,\mu) + \sigma_t^*\Psi^m(x,\mu) = \frac{\sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\Psi^m(x,\mu')d\mu' + Q^m(x,\mu)\,. \tag{2.14}$$

$$\Psi^m(0,\mu) = \Psi^m(0,-\mu), \qquad \mu > 0 \tag{2.15}$$

$$\Psi^m(L,\mu) = 0, \qquad \mu < 0 \tag{2.16}$$

onde

$$\sigma_t^* = \sigma_t + 1 \tag{2.17}$$

e

$$Q^m(x,\mu) = S^m(x,\mu) + \Phi(x,\mu) - \sum_{k=0}^{m-1}\Psi^k(x,\mu)\,. \tag{2.18}$$

Cabe ressaltar que as condições de contorno (2.15) e (2.16) foram obtidas quando substituimos a eq.(2.9) nas condições de contorno (2.6) e (2.7), multiplicamos as equações resultantes por $e^{-z}L_m(z)$, com $m = 0,1,...,M$, e em seguida integramos de 0 a ∞ sobre z.

Conhecido $Q^m(x,\mu)$, isto é, uma vez que os momentos $\Psi^k(x,\mu)$ estejam estabelecidos para $k < m$, então o momento $\Psi^m(x,\mu)$ pode ser determinado pela aplicação de um dos métodos: LTS_N [19]–[21], LTP_N [22], LTCh_N [23], LTW_N [24], LTA_N [25] ou LTLD_N [26], dentre outros, no problema (2.14–2.18). Estes métodos consistem em aplicar a Transformada de Laplace na variável espacial das aproximações S_N, P_N, Ch_N, W_N, A_N ou LD_N do problema unidimensional de transporte, resolver o sistema algébrico resultante e reconstruir o fluxo angular pela inversão da Transformada de Laplace (Vilhena et alli [27]–[29]). A escolha do método LTS_N para resolução do problema (2.14–2.18) deve-se ao fato deste ter convergência comprovada [9, 10]. Assim, a partir da solução de $\Psi^0(x,\mu)$ podemos determinar no problema (2.14–2.18), os momentos $\Psi^m(x,\mu)$, $m = 1, 2, ..., M$, de forma ascendente. Finalmente, o fluxo angular é completamente estabelecido pela equação (2.9).

3. Resultados Numéricos

Com o objetivo de verificar a formulação proposta, consideremos um domínio unidimensional homogêneo de espessura $L = 10cm$, com condições de contorno reflexiva à esquerda e do tipo vácuo à direita. A seção de choque total é $\sigma_t = 1.0cm^{-1}$ e a seção de choque de espalhamento é $\sigma_s = 0.9cm^{-1}$. Assumimos a velocidade dos nêutrons $v = 10^6 cm/s$. Este domínio unidimensional tem uma fonte uniforme e isotrópica de nêutrons com intensidade $Q = 1.0$. Subitamente, em $t = 0$, a fonte de nêutrons é removida. Este problema é descrito pelas equações (2.1–2.4) com fonte $F(x,\mu,t) = 0$ e condição inicial $\Phi(x,\mu)$ solução do problema:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,\mu) + \sigma_t\Phi(x,\mu) = \frac{\sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(x,\mu)d\mu + 1, \tag{3.1}$$

$$\Phi(0,\mu) = \Phi(0,-\mu), \qquad \mu > 0 \tag{3.2}$$

$$\Phi(L,\mu) = 0, \qquad \mu < 0. \tag{3.3}$$

O fluxo angular é calculado para uma aproximação em polinômios de Laguerre de ordem M, variando de 0 a 20, sendo que a solução do conjunto de problemas estacionários (2.14–2.18) é obtida pelo método LTS_N com $N = 2$. Resolvemos a integral de convolução resultante da transformada inversa de Laplace no fluxo angular transformado pela regra de integração dos trapézios, considerando 101 pontos, igualmente espaçados. Devido ao caráter recursivo do termo de fonte $Q^m(x,\mu)$, é praticamente impossível calcular essa integral analiticamente. Na Tabela 1, apresentamos os valores do fluxo escalar

$$\phi(x,t) = \int_{-1}^{1}\psi(x,\mu,t)d\mu\,, \tag{3.4}$$

na posição $x = 10cm$ e instante $t = 9 \times 10^{-6}s$, de duas formas distintas: particionando o domínio de tempo em intervalos de $10^{-6}s$, aplicando o método proposto em cada intervalo, usando como condição inicial a solução no intervalo anterior; e sem particionar o domínio tempo.

Tabela 1: Fluxo escalar em $x = 10cm$ e $t = 9 \times 10^{-6}s$ com M variando de 0 a 20.

M	Sem Particionamento	Com Particionamento
0	2.022131153494490	6.228379997269584E-001
1	-3.791052786293175E-001	6.228379997269584E-001
2	9.851645814523031E-001	6.185969402871896E-001
3	6.031493776875979E-001	6.178051516389188E-001
4	5.820297756941733E-001	6.176824266489532E-001
5	6.157925123140909E-001	6.176643595883538E-001
6	6.225940037026349E-001	6.176620585332971E-001
7	6.195384723360150E-001	6.176619630646147E-001
8	6.174278198994230E-001	6.176620688451426E-001
9	6.171057000422013E-001	6.176621358349982E-001
10	6.174181632658773E-001	6.176621661821051E-001
11	6.177214995331419E-001	6.176621784320017E-001
12	6.178485569044431E-001	6.176621830819142E-001
13	6.178142682659924E-001	6.176621847683621E-001
14	6.176908713708967E-001	6.176621853525282E-001
15	6.175637776190138E-001	6.176621855430575E-001
16	6.174996338653833E-001	6.176621855993911E-001
17	6.175232815016412E-001	6.176621856128988E-001
18	6.176146932003495E-001	6.176621856142295E-001
19	6.177257002005925E-001	6.176621856129326E-001
20	6.178056018864474E-001	6.176621856115971E-001

4. Considerações Finais

Os resultados apresentados na Tabela 1 mostram a convergência da formulação proposta com a variação de M, sendo que esta convergência é acelerada quando particionamos o domínio tempo. Além disso, como já foi dito anteriormente, a convergência do método $\mathrm{LTS_N}$ para problemas unidimensionais foi demonstrada por Pazos [9, 10].

Convém salientar que devido a este processo recursivo ascendente é possível aumentar a ordem de aproximação M indefinidamente e que a diferença:

$$\Psi_M(x,\mu,z) - \Psi_{M-1}(x,\mu,z) = \Psi^M(x,\mu)L_M(z)\,, \tag{4.1}$$

permite que tenhamos controle sobre o erro cometido na aproximação.

Em trabalhos futuros pretendemos resolver o problema acima para tempos maiores e aplicar a formulação proposta a problemas de transporte associados à variação de temperatura (problemas não-lineares).

Referências

[1] B.D. Ganapol, P.W. Mckent and K.L. Peddicord, The Generation of Time-Dependent Neutron Transport Solutions in Infinite Media, *Nuclear Science and Engineering*, **64** (1977), 317-331.

[2] B.D. Ganapol, Solution of the Time-Dependent Monoenergetic Neutron Transport Equation in Semi-Infinite Medium, *Transport Theory and Statistical Physics*, **7** (1978), 103-122.

[3] B.D. Ganapol, P_1 Approximation to the Time-Dependent Monoenergetic Neutron Transport Equation in Infinite Media, *Transport Theory and Statistical Physics*, **9** (1980), 145-159.

[4] B.D. Ganapol, Time-Dependent Surface Angular Flux for a Semi-Infinite Medium With Specular Reflection, Nuclear Science and Engineering, **80** (1982), 412-415.

[5] R.M. Cotta and M.D. Mikhailov, "Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation", John Wiley & Sons, England, 1997.

[6] B. Davison, "Neutron Transport Theory", Oxford University Press, London, 1957.

[7] K.M. Case and P.F. Zweifel, "Linear Transport Theory", Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1967.

[8] J.P. Davis and P. Rabinowitz, "Methods of Numerical Integration", Academic Press, London, 1975.

[9] R.P. Pazos and M.T. Vilhena, Convergence of Spectral Approximations for Steady-State Two-dimensional Transport Problem, in "Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications - International Conference", Madrid, Spain, September, 27-30, 1999.

[10] R.P. Pazos and M.T. Vilhena, Convergence in Transport Theory, *Applied Numerical Mathematics*, **1** (1999), 79-92.

[11] T. Yamagashi, Solutions of Monoenergetic Time-Dependent Neutron Transport Equation in Slab Geometry, *Journal of Nuclear Science and Technology*, **10** (1973), 284-291.

[12] Y. Ilamed and M. Lemanska, On Exponential and Polynomial Space-Time Dependent Solutions of the Monoenergetic Neutron Transport Equation, *Transport Theory and Statistical Physics*, **9** (1980), 17-26.

[13] W.L. Fillipone and B.D. Ganapol, Time-Dependent One-Dimensional Transport Calculations Using the Streaming Ray Method,*Nuclear Science and Engineering*, **83** (1983), 366-373.

[14] B.D. Ganapol, Exact Time-Dependent Moments for the Monoenergetic Neutron Transport Equation With Isotropic Scattering, *Nuclear Science and Engineering*, **89** (1985), 256-260.

[15] P.F. Windholfer and N. Pucker, Multiple-Collision Solutions for Time-Dependent Neutron Transport in Slabs of Finite Thickness, *Nuclear Science and Engineering*, **91** (1985), 223-233.

[16] B.D. Ganapol, Solution of the One-Group Time-Dependent Neutron Transport Equation in a Infinite Medium by Polynomial Reconstruction, *Nuclear Science and Engineering*, **92** (1986), 272-279.

[17] G.S. Chen, The Time-Dependent Multigroup Transport Equations in Reactor Kinetics, *Annals of Nuclear Energy*, **16** (1989), 279-291.

[18] B.D. Ganapol, C.T. Kelley and G.C. Pomraning, Asymptotically Exact Boundary Conditions for the PN Equations, *Nuclear Science and Engineering*, **114** (1993), 12-19.

[19] M.T. Vilhena and L.B. Barichello, A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation, *Kerntechnik*, **56** (1991), 334-336.

[20] M. T. Vilhena and L.B. Barichello, A General Approach to One-Group One-Dimensional Transport Equation, *Kerntechnik*, **58** (1993), 182-184

[21] J.V.P. de Oliveira, M.N. Agostini, L.B. Barichello and M.T. Vilhena, Formulação Analítica para a Solução do Problema de Ordenadas Discretas Unidimensional de Transporte com Espalhamento Anisotrópico. in "Anais do IX Encontro de Física de Reatores e Termo-Hidráulica "(IX ENFIR), Caxambú/MG, 1993.

[22] M.T. Vilhena and E.E. Streck, An Approximated Analytical Solution of the One-Group Neutron Transport Equation, *Kerntechnik*, **57** (1992), 196-198.

[23] A.V. Carodona and M.T. Vilhena, A Solution of Linear Transport Equation using Chebyshev Polynomials and Laplace Transform, *Kerntechnik*, **59** (1994), 278-281.

[24] A.V. Cardona and M.T. Vilhena, A Solution of Linear Transport Equation using Walsh Function and Laplace Transform,*Annals of Nuclear Energy*, **21** (1994), 495-505.

[25] A.V. Cardona and M.T. Vilhena, Analytical Solution for the AN Approximation, *Progress in Nuclear Energy*, **31** (1997), 219-223.

[26] R.C. Barros, A.V. Cardona and M.T. Vilhena, Analytical Numerical Methods Applied to Linear Discontinuous Angular Approximations of the Transport Equation in Slab Geometry, *Kerntechnik*, **61** (1996), 111-116.

[27] M.T. Vilhena, L.B. Barichello, C.F. Segatto, J. Zabadal and A.V. Cardona, General solution of one-dimensional approximations to the transport equation, *Progress in Nuclear Energy*, **33** (1998), 99-115.

[28] J.D. Brancher, A.V. Cardona and M.T. Vilhena, A Recursive Method to Invert the LTSN Matrix, *journal Progress in Nuclear Energy*, in press.

[29] C.F. Segatto and M.T. Vilhena, Solução Genérica da Equação de Transporte Unidimensional para Elevadas Ordens de Quadratura, in "Anais do XI Encontro de Física de Reatores e Termo-Hidráulica" (XI ENFIR), Poços de Caldas/MG, 1997.

[30] G.A. Gonçalves, C.F. Segatto and M.T. Vilhena, The LTS_N Particular Solution in a Slab for na Arbitrary Source and Large Order of Quadrature. Aceito para publicação no JQSRT.