

Modelagem e Resolução do Processo de Planificação de Sólidos

N.T. ORO, R.M.L. KRIPKA, N.L. MAZIERO, Universidade de Passo Fundo, Campus 1 – Km 171 – BR 285, Bairro São José, Cx.P. 611, 99001-970 Passo Fundo, RS, Brasil.

Resumo. O artigo apresenta um modelo matemático e um protótipo de software para se obter a planificação de sólidos retos e oblíquos (peças ou similares), cujas bases podem ser circulares ou polígonos regulares. As equações do modelo, obtidas usando o método de triangulação e os conceitos de geometria analítica, permitiram o desenvolvimento do protótipo de software que calcula as coordenadas no plano do sólido considerado e, também, fornece a visualização virtual da superfície lateral planificada. O protótipo de software apresentado pode facilitar a automação, permitindo que a execução das peças seja realizada num menor tempo, o que reduz o custo de fabricação.

1. Introdução

No ramo da caldeiraria industrial, trabalha-se na obtenção de peças a partir de chapas planificadas que, após operações de dobramento, resultem na peça desejada. A planificação consiste, então, em determinar a superfície da peça. O desenvolvimento desses modelos é feito, geralmente de forma tradicional, partindo da construção do molde em papelão, transferindo-o para chapa e, posteriormente, realizando o processo de corte. Porém, mesmo que o projetista tenha habilidade prática e amplos conhecimentos, nem sempre a confecção dos moldes é rápida e precisa. O maior problema nessa área de desenvolvimento de superfícies está na demora para a solução de uma peça, ou seja, o tempo gasto para dar a forma planificada da peça a ser cortada na chapa e executar o corte para a sua confecção.

Em face do processo de globalização da economia, a maioria das indústrias nacionais passaram a procurar soluções mais eficientes para os seus processos de fabricação, visando à melhoria na qualidade do produto e à redução dos custos. Com o advento da automação, máquinas mais modernas têm surgido, aliadas a computadores, com aplicações em todas as áreas industriais.

O uso de computadores implica, entretanto, na utilização de programas, que por sua vez implementam algoritmos com soluções matemáticas para o problema em questão. Desse modo, a modelagem matemática dos sólidos e a posterior planificação da superfície passam a ser um problema de cunho matemático.

O artigo discorre sobre a busca da solução para se obter a planificação da superfície de um sólido qualquer, através do desenvolvimento de um protótipo de software.

2. Revisão bibliográfica

Na fabricação e montagem de uma peça, é necessário que seja executado um projeto que forneça os desenhos de sua planificação, ou seja, é preciso cortar essa superfície ao longo de uma de suas geratrizes, abrindo-a e tornando-a plana, como está ilustrado nas Figuras 1(a) e 1(b).

Para isso existem métodos manuais, baseados em Geometria Descritiva, que fornecem as coordenadas dos pontos de linhas de corte através de desenhos. Araújo [1] apresenta um método prático para o desenvolvimento das peças mais usualmente trabalhadas no campo da funilaria, da caldeiraria e da manutenção industrial. No entanto, no caso de peças mais elaboradas, tal método torna-se complicado e impreciso.

Cookson [4] apresentou em seu livro, editado pela primeira vez em 1941, métodos padrões de procedimentos simplificados de desenvolvimento geométrico de sólidos. Nele, fórmulas matemáticas também são apresentadas para obtenção das verdadeiras grandezas de casos específicos.

Em virtude dos avanços tecnológicos, a automação do processo de obtenção de peças torna-se possível, fazendo com que a planificação da superfícies dos sólidos possa se converter num processo preciso, fácil e rápido de ser executado.

Além disso, segundo Plastok e Gordon [6], a descrição e manipulação de objetos geométricos num sistema de computação gráfica encontram-se na interação entre a geometria e os números. Nessa área de pesquisa, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos ao longo do tempo [2, 3, 5, 7].

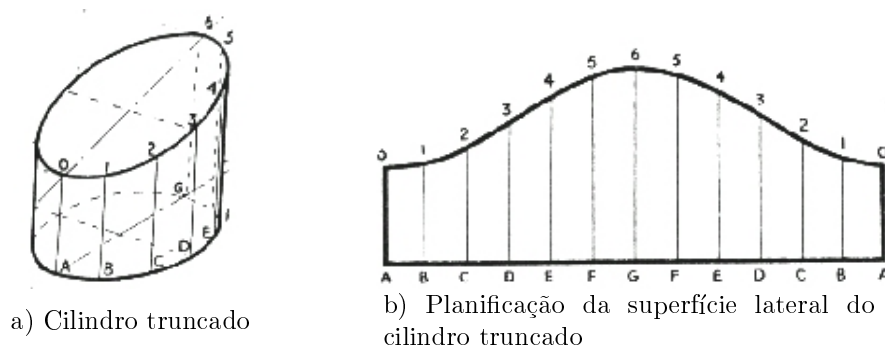


Figura 1: Planificação das superfícies.

Segundo Castro [3], um dos primeiros trabalhos voltados para a resolução analítica desse problema apresenta um método para resolver problemas relativos a curvas cilíndricas e cônicas. Contudo, o método, apresentado apenas para curvas, exige a aplicação de muitas equações, tornando-se, assim, de execução exaustiva.

As dificuldades e erros nos projetos, que acarretam trabalhos caros e complexos de retificação, estimularam o engenheiro Castro [3] a resolver de forma analítica e computacional alguns casos de planificação. O autor apresentou um método analítico para planificação de interseções entre superfícies cilíndricas e cônicas, publicado pela primeira vez em 1987. Essa obra trata da determinação das equações matemáticas das linhas de corte, que devem ser traçadas nas superfícies planificadas das peças componentes dos conjuntos formados pela interseção entre superfícies cilíndricas e superfícies cônicas.

O trabalho desenvolvido por Asteasu [2] também está relacionado com a resolução de problemas de interseção entre duas superfícies arbitrárias. Nesse, o autor apresenta um método alternativo, utilizando as formas implícitas de cada superfície na resolução do problema.

Piegl [5] apresentou um método de aproximação geométrica para obtenção da linha de interseção de superfícies quadráticas (plano, cone, cilindro e esfera).

No entanto, os dois últimos trabalhos citados não abordam a parte da planificação dessa interseção. Raj [7], em seu artigo também apresenta modelos matemáticos e algoritmos específicos para o desenvolvimento de superfícies e fabricação de dutos.

Nota-se, pela bibliografia consultada, que muitos trabalhos vem sendo desenvolvidos na área de planificação de superfícies. No entanto, apresentam modelos de planificação específicos para alguns casos particulares.

3. Metodologia

A elaboração do modelo foi dividida em duas partes: a primeira corresponde à representação da superfície lateral do sólido no espaço e a segunda, o cálculo dos pontos no plano correspondentes à superfície lateral planificada.

A modelagem matemática do problema de planificação de superfície apresentada utiliza o método da triangulação da Geometria Descritiva tradicional encontrado na literatura [4]. Esse método consiste em discretizar a superfície lateral do sólido através de “ $2n$ ” triângulos e posteriormente realizar a planificação dos pontos do espaço que definem os vértices dos triângulos.

Os vértices dos triângulos representam o sólido de maneira única no espaço e são obtidos pela divisão das bases (inferior e superior) em n pontos igualmente espaçados.

A planificação dos pontos do espaço é realizada através da obtenção de seus respectivos pontos no plano, considerando que as verdadeiras grandezas (distâncias entre eles) no espaço e no plano devem ser mantidas.

Na primeira etapa do modelo são necessárias apenas algumas características básicas como: altura, raios das bases, quando essas forem circulares e caso possuam

diâmetros diferentes ou medida das arestas, quando as bases tratarem de polígonos regulares e caso possuam tamanhos diferentes.

No modelo a representação dos sólidos através de pontos no espaço foi idealizada de forma genérica, considerando sempre as bases dos sólidos como polígonos inscritos em circunferências, mesmo quando as bases são circulares. Neste último caso, as bases são consideradas como polígonos de *infinitos* lados.

A fim de ilustrar os procedimentos utilizados no desenvolvimento das equações do modelo proposto será considerado um tronco de cone.

Para interpretação e equacionamento das coordenadas do sólido no espaço, obteve-se a representação plana do cone truncado em *épura*, através dos princípios básicos da Geometria Descritiva, desenhando sua vista frontal (plano yz) e superior (plano xy), como pode ser visualizado pela Figura 2.

A superfície lateral do sólido pode ser representada no espaço apenas através dos pontos que definem suas bases inferior e superior. Nesse caso, se as bases forem divididas em n partes iguais, obteremos $n + 1$ pontos que definirão a base inferior do sólido e $n + 1$ pontos que definirão a base superior do sólido. No caso, o primeiro ponto de cada base é coincidente com o último ponto da mesma.

No exemplo considerado, tomando $n = 12$, existem 26 pontos, que foram utilizados para representação espacial do sólido, como apresentado na Figura 2.

Considerando que o eixo central do sólido coincida com o eixo z e que sua base inferior esteja localizada no plano xy , as abscissas e as ordenadas espaciais desses pontos podem ser calculadas através dos valores dos ângulos definidos pela divisões das bases e as cotas, caso estejam na base inferior do sólido serão sempre nulas e caso estejam na base superior do sólido devem sempre ser iguais a altura.

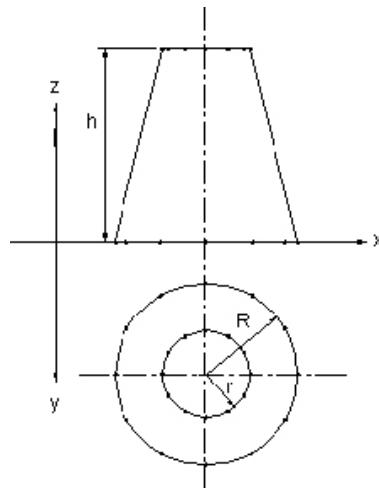


Figura 2: Cone truncado em *épura*.

Desta forma as coordenadas retangulares dos $2n + 2$ pontos no espaço podem

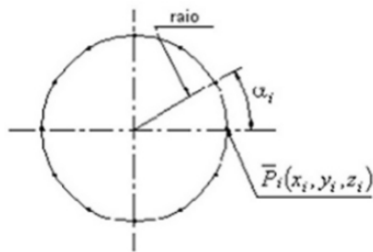
ser obtidas da seguinte forma:

$$\overline{P}_{2i-1} = (R \cos(\alpha_i), R \sin(\alpha_i), 0) \tag{3.1}$$

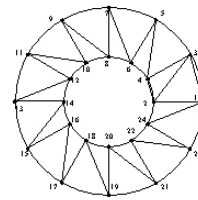
$$\overline{P}_{2i} = (R \cos(\alpha_i), R \sin(\alpha_i), h) \tag{3.2}$$

onde, conforme ilustrado nas Figuras 3(a) e 3(b),

- $\alpha_i = (i - 1) \times (2\pi/n)$,
- r = raio da base superior,
- R = raio da base inferior,
- h = altura do sólido,
- n = número de divisões das bases,
- $i = 1, 2, \dots, n + 1$.



a) Divisões de uma das bases do cone truncado.



b) Orientação dos pontos obtidos da divisão.

Figura 3: Nomenclatura para divisão das bases.

Após a identificação do sólido através de suas coordenadas, para decompor a superfície lateral em triângulos segundo o método da triangulação, inicialmente unem-se somente os pontos correspondentes em cada base, definindo-se as geratrizes do sólido, as quais representaremos por G_i , obtendo desta forma a superfície decomposta em trapézios, conforme ilustra a Figura 4(a). Em seguida, traçando-se uma das diagonais desses trapézios, representadas por D_i , obtém-se a superfície decomposta em triângulos, conforme ilustra a Figura 4(b).

Note que os lados dos triângulos ficam totalmente definidos pelas geratrizes, as diagonais e as cordas, onde as cordas correspondem às bases inferior e superior dos trapézios definidos pelas geratrizes do sólido em questão.

Quando as bases são circulares, ressalta-se que o processo é válido somente quando o número de divisões da base é suficientemente grande para que o comprimento do arco, considerado como base do trapézio, e a sua corda tendam a ser praticamente iguais. Durante o processo de planificação, a quantidade de divisões

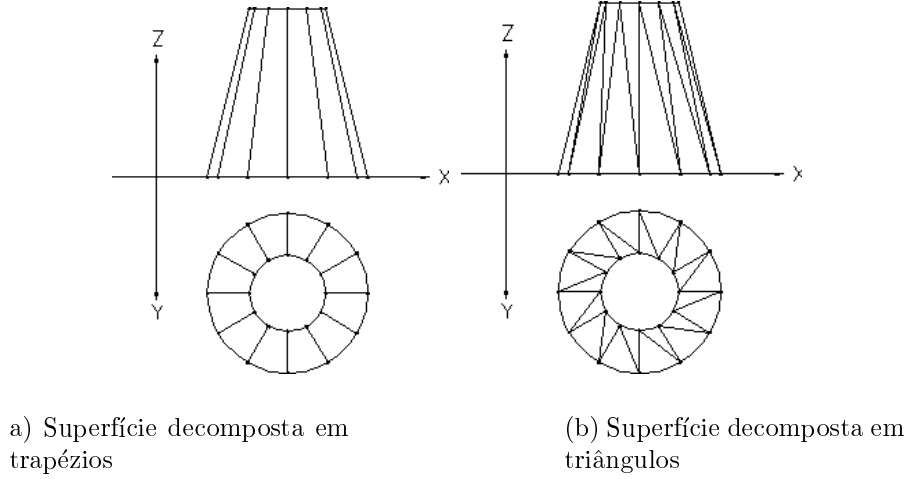


Figura 4: Superfície decomposta pelo Método da Triangulação.

das bases é definida em função da precisão desejada. A precisão considerada no protótipo é de 10^{-1} .

Para se manter as características da superfície lateral do sólido, as verdadeiras grandezas das geratrizes, das diagonais e das cordas, devem ser iguais tanto no espaço como no plano.

No espaço, como as coordenadas dos pontos já foram determinadas anteriormente, para se calcular as verdadeiras grandezas utilizou-se do conceito de distância entre pontos da Geometria Espacial.

Desta forma, as geratrizes e as diagonais são calculadas da seguinte maneira:

$$G_i = d(\overline{P}_{2i-1}, \overline{P}_{2i}), \quad (3.3)$$

$$D_i = d(\overline{P}_{2i}, \overline{P}_{2i+1}), \quad (3.4)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n + 1$.

As cordas correspondentes às bases superiores (c_s) e inferiores (c_i) dos triângulos que definem a superfície lateral do sólido são calculadas no espaço através do cálculo da distância entre pontos subsequentes da mesma base, ou seja,

$$c_s = d(\overline{P}_{2i}, \overline{P}_{2i+2}), \quad (3.5)$$

$$c_i = d(\overline{P}_{2i-1}, \overline{P}_{2i+1}). \quad (3.6)$$

Tomando-se os pontos no espaço como referenciais e utilizando as G_i , D_i , c_s e c_i calcula-se os $2n+2$ pontos do plano $P_i(x_i, y_i)$, correspondentes a eles na planificação da superfície do sólido, observando o fato que devem ser mantidas estas distâncias entre os pontos correspondentes da superfície planificada.

Por convenção, o primeiro ponto da superfície planificada P_1 , correspondente ao primeiro ponto da base inferior (\overline{P}_1), foi localizado na origem do sistema xy , ou

seja: $P_1 = (0, 0)$; o segundo ponto da superfície planificada P_2 , correspondente ao primeiro ponto da base superior (\bar{P}_2) foi localizado no eixo y , onde a ordenada do ponto corresponde à primeira geratriz, ou seja: $P_2 = (0, G_1)$.

Conhecidos os dois primeiros pontos planificados, passou-se ao cálculo dos demais, utilizando-se equações obtidas através dos conceitos de cálculo de distância entre pontos e de cálculo da área determinada através das coordenadas dos vértices de um triângulo da Geometria Plana e Espacial, levando em consideração o fato que esses valores devem se corresponder no espaço e no plano. Observa-se que a identidade entre as áreas dos triângulos no espaço e no plano, uma vez que a superfície foi discretizada é sempre válida: o triângulo planificado é obtido mediante um movimento rígido do triângulo, o que conserva suas dimensões.

No caso de sólidos com bases circulares, deve-se ressaltar que a identidade entre o modelo real e o discretizado será mais fiel com o aumento do número de pontos, obtidos na divisão das bases. Dessa forma, os triângulos definem com maior precisão a área a ser planificada.

Sendo conhecidos os pontos P_i e P_{i+1} , para determinação dos próximos dois pontos P_{i+2} e P_{i+3} utilizou-se o procedimento descrito a seguir:

Para o cálculo do ponto P_{i+2} , pelo método da triangulação tem-se que:

$$d(P_{i+1}, P_{i+2}) = D_i, \quad (3.7)$$

$$d(P_i, P_{i+2}) = c_i. \quad (3.8)$$

Como são conhecidas as medidas dos lados do triângulo no espaço (G_i , D_i e c_i), também determinou-se a área do triângulo através da fórmula de Heron

$$\text{Área} = \sqrt{p(p - D_i)(p - G_i)(p - c_i)}, \quad (3.9)$$

onde p é o semi-perímetro do triângulo cujos vértices correspondem aos pontos no espaço \bar{P}_i , \bar{P}_{i+1} e \bar{P}_{i+2} .

A área do triângulo correspondente no plano, também foi calculada através das coordenadas correspondentes dos vértices no plano P_i , P_{i+1} e P_{i+2} , da seguinte forma:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

No cálculo da área no plano, foi considerado a orientação dos pontos sempre no sentido anti-horário, evitando dessa forma a duplicidade da solução.

A Figura 5 ilustra a seqüência utilizada para a determinação dos pontos.

Igualando-se as áreas no espaço e no plano (equações 3.9 e 3.10) e utilizando-se as equações 3.7 e 3.8, determina-se as coordenadas do ponto P_{i+2} .

Em seguida, conhecidos os pontos P_{i+1} e P_{i+2} , utilizando-se do mesmo procedimento, passa-se para o cálculo do ponto P_{i+3} , através das seguintes equações:

$$d(P_{i+2}, P_{i+3}) = G_{i+1}, \quad (3.11)$$

$$d(P_{i+1}, P_{i+3}) = c_s, \quad (3.12)$$

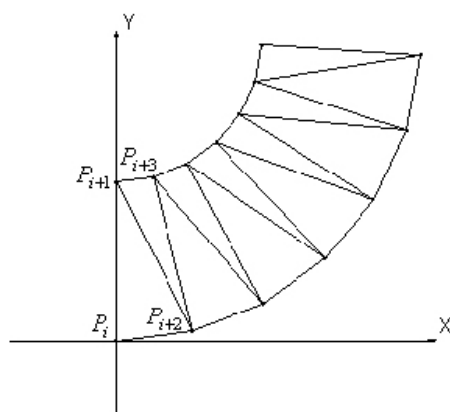


Figura 5: Indicação dos pontos P_i, P_{i+1}, P_{i+2} e P_{i+3} .

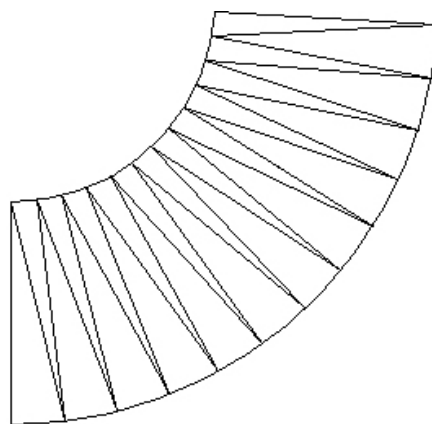


Figura 6: Planificação da superfície lateral do cone truncado.

e

$$\text{Área} = \sqrt{p(p - D_i)(p - G_{i+1})(p - c_s)}, \quad (3.13)$$

onde p é o semiperímetro do triângulo cujos vértices correspondem aos pontos no espaço \overline{P}_{i+1} , \overline{P}_{i+2} e \overline{P}_{i+3} ,

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \\ x_{i+3} & y_{i+3} & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.14)$$

onde considera-se as coordenadas correspondentes dos vértices do triângulo no plano P_{i+1} , P_{i+2} e P_{i+3} .

Utilizando-se as fórmulas anteriores é possível calcular as $2n + 2$ coordenadas do plano correspondentes à superfície do sólido planificado.

Esses pontos foram unidos, tanto a base superior como a inferior, e a superfície lateral do sólido planificada pode ser visualizada pela Figura 6. Ao se unir os pontos iniciais com os finais, obteve-se a construção final da superfície do tronco de cone.

3.1. Algoritmo Planificação de Superfície

As equações apresentadas anteriormente permitiram o desenvolvimento do protótipo de software descrito pelo algoritmo abaixo.

Início

Leitura de Dados

início

Escolha entre as opções:

1. Cone,
2. Cone Truncado,
3. Cilindro,
4. Pirâmide,
5. Pirâmide Truncada,
6. Prisma

Caso as bases sejam circulares

início

Leia: raio(s) R e r e altura h

Caso seja oblíquo, leia deslocamento do eixo superior central (dx, dy)

Calcula n (número de divisões das bases)

início

erro = 10^{-1}

$n = 20$

Calcula arco

Calcula corda

Enquanto | arco-corda | \leq erro faça

```

    início
        arco = corda
        Calcula ângulo  $\theta$ 
        Calcula corda
    fim enquanto
     $n = \text{valor inteiro de } (2\pi/\theta) + 1$ 
    fim Calcula  $n$ 
    fim Caso as bases sejam circulares
    Caso as bases sejam polígonos regulares
    início
        Leia:  $n = \text{número de lados da(s) base(s), tamanho da(s) aresta(s) } Lg \text{ e } Lp$ 
        e altura  $h$ .
        Calcula raio(s)  $R$  e  $r$  definido(s) pelo(s) ângulo(s)
        Caso seja Oblíquo, leia deslocamento do eixo superior central  $(dx, dy)$ 
    fim Caso as bases sejam polígonos regulares
    fim da Leitura de Dados

```

Cálculo das Coordenadas no Espaço do Sólido

```

    início
        Para  $i = 1, \dots, n + 1$  faça
            início
                 $\alpha_i = (i - 1) \star (2\pi/n)$ 
                 $\overline{P}_{2i-1} = (R \cos(\alpha_i), R \sin(\alpha_i), 0)$ 
                 $\overline{P}_{2i} = (r \cos(\alpha_i) + dx, r \sin(\alpha_i) + dy, h)$ 
            fim para
        fim do Cálculo das Coordenadas no Espaço do Sólido

```

Cálculo das Geratrizes da Superfície no Espaço

```

    início
        Para  $i = 1, \dots, n + 1$  faça
            início
                 $G_i = d(\overline{P}_{2i-1}, \overline{P}_{2i})$ 
                 $D_i = d(\overline{P}_{2i}, \overline{P}_{2i_1})$ 
            fim para
        fim do Cálculo das Geratrizes da Superfície no Espaço

```

Planificação da Superfície Lateral do Sólido

```

    início
         $P_1 = (0, 0)$ 
         $P_2 = (0, G_1)$ 
        Para  $i = 1, \dots, n + 1$  faça
            início

```

$$c_i = d(\overline{P}_{2i-1}, \overline{P}_{2i+1})$$

$$d(\overline{P}_{2i}, \overline{P}_{2i+1}) = D_i$$

$$d(\overline{P}_{2i-1}, \overline{P}_{2i+1}) = c_i$$

$$p = (D_i + G_i + c_i)/2$$

$$\sqrt{p(p - D_i)(p - G_i)(p - c_i)} = \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i-1} & 1 \\ x_{2i+1} & y_{2i+1} & 1 \\ x_{2i} & y_{2i} & 1 \end{vmatrix}$$

$$c_s = d(\overline{P}_{2i}, \overline{P}_{2i+2})$$

$$d(\overline{P}_{2i+1}, \overline{P}_{2i+2}) = G_{i+1}$$

$$d(\overline{P}_{2i}, \overline{P}_{2i+2}) = c_s$$

$$p = (D_i + G_{i+1} + c_s)/2$$

$$\sqrt{p(p - D_i)(p - G_{i+1})(p - c_s)} = \begin{vmatrix} x_{2i} & y_{2i} & 1 \\ x_{2i+1} & y_{2i+1} & 1 \\ x_{2i+2} & y_{2i+2} & 1 \end{vmatrix}$$

fim para
fim da Planificação da Superfície Lateral do Sólido

Desenho da planificação

início

Para $i = 1, \dots, 2n$ faça

início

Una os pontos P_i e P_{i+1}

Una os pontos P_i e P_{i+2}

fim para

Una os pontos P_{2n+2} e P_{2n+1}

fim do Desenho da planificação

Fim do Programa Principal

Para representação dos diferentes tipos de sólidos, foram necessários apenas alguns ajustes nos dados de entrada do programa, conforme listados na Tabela 1.

No caso da planificação dos sólidos na forma oblíqua, como as extremidades superior e inferior que definem as bases do sólido, por convenção, estão localizadas em planos paralelos ao plano xy , considera-se a base inferior fixa e permite-se o deslocamento desejado da outra base, através do deslocamento dos pontos que a definem. Dessa forma, mantém-se o formato das bases, alterando-se apenas a superfície lateral do sólido.

Tabela 1: Ajustes nos dados de entrada do protótipo de software.

Sólido	Raio Base Superior	Raio Base Inferior	Altura	Número de lados	Aresta Base Superior	Aresta Base Inferior
Cone	faz $r = 0$	R	h	calcula n	—	—
Cone Truncado	r	R	h	calcula n	—	—
Cilindro	r	faz $R = r$	h	calcula n	—	—
Pirâmide	faz $r = 0$	calcula R	h	n	faz $Lp = 0$	Lg
Pirâmide Truncada	calcula r	calcula R	h	n	Lp	Lg
Prisma	calcula r	faz $R = r$	h	n	Lp	$Lg = Lp$

4. Resultados Obtidos

As figuras abaixo ilustram alguns resultados obtidos, segundo o protótipo de software implementado em Turbo Pascal 7.0.

A fim de ilustrar com nitidez o processo de planificação, ao invés de se calcular o número de divisões das bases em função da precisão para os sólidos de bases circulares, nos exemplos abaixo fixou-se $n = 24$.

Considerando um tronco de cone (cone truncado) com 90 mm de altura, 30 mm de raio da base inferior e 15 mm de raio da base superior, obteve-se a superfície planificada ilustrada pela Figura 7.

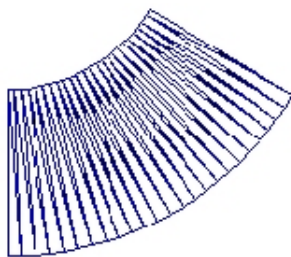


Figura 7: Exemplo da planificação da superfície do tronco de cone.

A Figura 8 ilustra a planificação da superfície de um cilindro oblíquo de base circular de raio da base de 30 mm, altura de 60 mm e deslocamento do centro da base superior do sólido de 120 mm no eixo y .

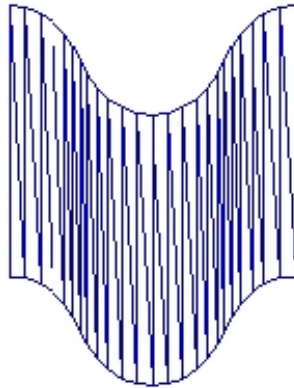


Figura 8: Exemplo da planificação da superfície do cilindro oblíquo de base circular.

O último exemplo, ilustrado pela Figura 9, refere-se à planificação da superfície lateral de uma pirâmide de base pentagonal, cuja altura é de 100 mm e aresta da base é de 30 mm.

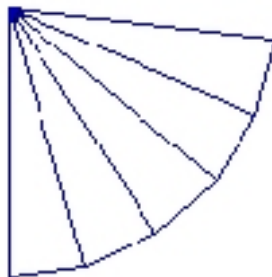


Figura 9: Exemplo da planificação da superfície da pirâmide reta de base pentagonal.

5. Conclusões

O modelo matemático desenvolvido é eficiente e de fácil implementação, pois permite a obtenção das coordenadas no plano de sólidos de bases, que são polígonos regulares ou circulares e sólidos oblíquos, utilizando exatamente o mesmo modelo de planificação, considerando apenas alguns ajustes nos dados de entrada para o cálculo das geratrizes e diagonais.

O protótipo de software desenvolvido trata-se de uma ferramenta que poderá vir a ser utilizada na resolução de problemas reais, ou seja, na fabricação de peças em caldeiraria.

Referências

- [1] E.C. Araujo, “Curso Técnico de Caldeiraria”, São Paulo, Hemus, 1976.
- [2] C. Asteasu, Intersection of arbitrary surfaces, *Computer-Aided Design*, **20** No.9 (1988), 533-538.
- [3] M.M.O. Castro, “Método Analítico para Planificação de Interseções entre Superfícies Cilíndricas e Cônicas”, vol. 1 e 2, Niterói, Universidade Federal Fluminense EDUFF, 1991.
- [4] W. Cookson, “New Methods for Sheet Metal Work”, Londres, The Technical Press, 1964.
- [5] L. Piegl, Geometric method of intersecting natural quadrics represented in trimmed surface form, *Computer-Aided Design*, **21** No.4 (1989), 201-212.
- [6] R.A. Plastock and K. Gordon, “Computação Gráfica”, Tradução por José Carlos Teixeira, Portugal: McGraw-Hill de Portugal, 1991. 414 p. Tradução de: *Schaum's Outline of Theory and Problems of COMPUTER GRAPHICS*.
- [7] S.V.P. Raj, Evolution of Generic Mathematical Models and Algorithms for the Surface Development and Manufacture of Complex Ducts, *Journal of Engineering for Industry, ASME*, **117** (1995), 177-185.