

Modelos Interespecíficos para Controle Químico de Áreas Foliaves Lesionadas por Fungos

R. ZOTIN¹, Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP, Brasil

R.C. BASSANEZI, H.M. YANG, Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

Resumo: Apresentamos um modelo para o estudo de uma população de fungos, sujeita a um controle químico, incorporando o efeito da aplicação do fungicida diretamente no modelo e medindo a população de fungos em termos de área lesionada. Os parâmetros, a princípio, são considerados constantes. Posteriormente, são realizadas algumas simulações a título de exemplificação e comparação com o caso constante, considerando a taxa aparente de infecção dependente do tempo (e da temperatura).

1. Introdução

Os primeiros modelos que surgiram no estudo da dinâmica de fungos na ausência de fungicidas têm como premissa comum o crescimento exponencial de cada subpopulação (sensíveis e resistentes). Além disso, como ocorre com uma grande parte dos modelos matemáticos usados em Ecologia, os parâmetros envolvidos nos modelos são considerados constantes.

Como uma tentativa de incorporar as competições inter e intra específicas, Barrett [2] utilizou o modelo geral de Kolmogorov considerando a dinâmica de duas populações N_1 e N_2 que interagem, com taxas de crescimento intrínseco r_1 e r_2 , respectivamente, dada por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 f_1(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 f_2(N_1, N_2) \end{cases} \quad (1.1)$$

As funções f_1 e f_2 descrevem os efeitos das competições inter e intra específicas entre as suas populações.

Os efeitos das competições inter e intra específicas foram incorporados por Varassin [7] numa extensão do modelo proposto por Ghini et al.[4], para o estudo do crescimento de uma população de fungos subdivida em sensíveis (S) e resistentes (R), tomando a seguinte forma :

¹rzotin@rc.unesp.br

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r_s S \left[1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K}\right] - \alpha r_s S \left[1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K}\right] \\ \frac{dR}{dt} = r_R R \left[1 - \frac{R}{K} - c_{RS} \frac{S}{K}\right] + \alpha r_s S \left[1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K}\right] \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde

- K é a capacidade suporte, que pode ser dada pelo número de propágulos ou pela área foliar lesionada, dependendo de como a população de fungos está sendo quantificada;
- r_S e r_R são as taxas aparentes de infecção;
- c_{SR} e c_{RS} medem a intensidade da interação ente S e R ;
- o termo $\alpha r_s S [1 - S/K - c_{SR}R/K]$ representa o fluxo de sensíveis para resistentes, onde α é a frequência de mudança.

Este modelo é, portanto, um caso particular do modelo de Lotka-Volterra e uma análise dos pontos de equilíbrio e estabilidade também é apresentada em [7].

Neste trabalho propomos uma extensão do modelo descrito pelas equações (1.2) incorporando o efeito da aplicação do fungicida diretamente no modelo e medindo a população de fungos em termos de área lesionada.

A partir disso, pretendemos obter uma estratégia de controle ótima no sentido de minimizar tanto o fungicida aplicado quanto a área lesionada pela população de fungos durante o intervalo de tempo decorrido entre o momento em que a doença é detectada ($t = 0$) e o momento da colheita ($t = t_f$).

2. Modelo: Controle de Área Lesionada (r Constante)

O modelo que propomos para o controle de fungos com aplicação de fungicidas em populações que desenvolvem resistência está sujeito às seguintes hipóteses:

- a) A “população” de fungos (representada pela área total ocupada N) analisada em uma certa cultura é subdividida em sensíveis e resistentes, sendo que $S(t)$ e $R(t)$ representam a fração de área foliar da cultura lesionada por sensíveis e resistentes, respectivamente, em cada instante de tempo. Inicialmente, antes da aplicação de fungicida, temos as condições iniciais dadas por $S(0) = S_0 > 0$ e $R(0) = R_0 > 0$;
- b) as taxas aparentes de infecção provocadas por sensíveis e resistentes são r_s e r_r , respectivamente;
- c) a taxa de mudança de sensível para resistente é dada por α ;
- d) a eficácia do fungicida aplicado é dada por β e incorpora o fato da mesma depender da concentração do fungicida utilizado;

- e) a taxa de aplicação de fungicida é dada por $u = u(t)$, função contínua por partes. Além disso, utilizamos uma limitação nessa aplicação da forma $0 \leq u(t) \leq 1$, ou seja, consideramos u sempre em relação a um valor u_{max} permitido;
- f) consideramos também que $dS/dt > 0$ e $dR/dt > 0$ no sentido de, uma vez que uma folha é atacada por fungos, a área lesionada não mais se regenerar mesmo com a aplicação de fungicida.

Com estas considerações formulamos o seguinte modelo matemático:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) &= (1 - \alpha)r_s S(1 - S - R)(1 - \beta u), \\ \dot{R}(t) &= r_r R(1 - S - R) + \alpha r_s S(1 - S - R)(1 - \beta u), \\ S(0) &= S_0, R(0) = R_0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Embora S , R , N e u sejam funções de t , estaremos omitindo a variável t para simplificarmos a notação.

Tratando o sistema (2.1) em termos da área total ocupada e considerando $r_s = r_r = r$, o sistema (2.1) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) &= rN(1 - N)(1 - \beta u) + rR\beta u(1 - N) \\ \dot{R}(t) &= rR(1 - N) + \alpha r(N - R)(1 - N)(1 - \beta u), \\ N(0) &= N_0 = S_0 + R_0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

O problema de controle ótimo associado à dinâmica (2.2) consiste em encontrar $u^*(t)$ que minimiza o funcional

$$J(u) = N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u(t) dt, \quad (2.3)$$

ou seja, $J(u^*) = \min_u N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u(t) dt$.

Consideramos o tempo final (t_f) fixo, que corresponde ao dia da colheita ou ao tempo máximo em que é permitida a aplicação do fungicida..

Introduzindo o Hamiltoniano [5] associado a este problema (omitindo a variável t de λ_1 e λ_2), temos

$$\begin{aligned} H(t, u, \lambda_1, \lambda_2, S, R) &= c_1 u + \lambda_1 [rN(1 - N)(1 - \beta u) + rR\beta u(1 - N)] \\ &\quad + \lambda_2 [rR(1 - N) + \alpha r(N - R)(1 - N)(1 - \beta u)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

As equações adjuntas (ou de coestado), em função do Hamiltoniano, são dadas por:

$$\dot{\lambda}_1^* = -\partial H / \partial N \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_2^* = -\partial H / \partial R$$

que, na sua forma já simplificada, são descritas por:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^* = -[r(1 - \beta u^*)(1 - 2N^*) - r\beta R^* u^*] \lambda_1^* + rR^* \lambda_2^* \\ \quad - \lambda_2^* \alpha r(1 - \beta u^*)(1 - 2N^* + R^*), \\ \dot{\lambda}_2^* = -r(1 - N^*)[1 - \alpha(1 - \beta u^*)] \lambda_2^* - \lambda_1^* r\beta u^*(1 - N^*), \\ \text{com} \quad \lambda_1^*(t_f) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2^*(t_f) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

As condições finais sobre λ_1^* e λ_2^* vêm do fato de t_f ser fixo e $N^*(t_f)$ e $R^*(t_f)$ serem livres.

Voltando ao Hamiltoniano dado por (2.4) e simplificando as expressões, obtemos

$$\begin{aligned} H(t, u, \lambda_1, \lambda_2, S, R) &= [c_1 - r(1 - N)(N - R)\beta(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)] u \\ &\quad + \lambda_1 r N(1 - N) + \lambda_2 r R(1 - N) \\ &\quad + \alpha r \lambda_2 (N - R)(1 - N). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim, denotando a função que decide o controle por $g(t)$, vem

$$g(t) = c_1 - r(1 - N)(N - R)\beta(\lambda_1 + \alpha\lambda_2), \quad (2.7)$$

e, portanto, $u^*(t)$ é dado por

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } g(t) > 0 \\ 1, & \text{se } g(t) < 0 \\ \text{indet.}, & \text{se } g(t) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

A não linearidade do modelo torna as equações diferenciais para λ_1 e λ_2 complicadas do ponto de vista analítico, tornando-se praticamente impossível uma análise através das expressões para λ_1 e λ_2 . Conseqüentemente, a análise da função $g(t)$ para a obtenção da lei de controle ótimo não é imediata.

Optamos, assim, por “investigar” quais tipos de controles são factíveis através de demonstrações por absurdo, ou seja, supõe-se que o controle tem um determinado aspecto e chega-se a uma contradição caso ele não seja factível.

Lema 1 *Se o controle ótimo for zero ($u^*(t) = 0$) durante algum intervalo $(\bar{t}, t_f]$, então $u^*(t) = 0 \forall t \in [0, t_f]$, considerando $\alpha \approx 0$.*

Demonstração: Suponha que o controle seja da forma

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \bar{t}, \\ 0, & \bar{t} < t \leq t_f, \end{cases} \quad (2.9)$$

ou seja, o controle acaba com zero e tem uma única troca em \bar{t} ($g(\bar{t}) = 0$).

Como $u^*(t) = 0$ para $t \in (\bar{t}, t_f]$ temos $g(t) > 0$ neste intervalo, e as equações diferenciais (2.5) para λ_1^* e λ_2^* tomam a seguinte forma:

$$\dot{\lambda}_2^* + r(1 - N^*)(1 - \alpha)\lambda_2^* = 0, \quad (2.10)$$

$$\dot{\lambda}_1^* + r(1 - 2N^*)\lambda_1^* = -\lambda_2^* [-rR^* + \alpha r(1 - 2N^* + R^*)].$$

Usando o fato de conhecermos λ_2^* em $t = t_f$, obtemos como solução de (2.10)

$$\lambda_2^*(t) = \lambda_2^*(t_f) e^{\int_t^{t_f} r(1-\alpha)(1-N)ds} = 0, \quad \forall t \in (\bar{t}, t_f],$$

pois $\lambda_2^*(t_f) = 0$.

Conseqüentemente, temos como solução para λ_1^* , usando o fato de $\lambda_1^*(t_f) = 1$

$$\lambda_1^*(t) = e^{\int_t^{t_f} r(1-2N^*) ds} > 0, \quad \forall t \in (\bar{t}, t_f].$$

Analisando o comportamento de $g(t)$, a função que decide o controle, temos:

$$g'(t) = r^2\beta(1 - N^*)(N^* - R^*) [\alpha\lambda_1^*(1 - N^*) + \lambda_2^* [(\alpha - 1)R^* + \alpha(1 - N^*)]] .$$

Tomando $\alpha \approx 0$ (na prática está no intervalo $10^{-9} < \alpha < 10^{-5}$) e $\lambda_2^* = 0$, temos $g'(t) = 0 \forall t \in (\bar{t}, t_f] \Rightarrow g(t) = \text{constante} > 0, \forall t \in (\bar{t}, t_f]$. Pela continuidade de $g(t)$, não é possível $g(\bar{t}) = 0$, ou seja, \bar{t} suposto inicialmente não existe. Assim, $u^*(t) = 0, \forall t \in [0, t_f]$. ■

Do lema anterior, a possibilidade de que, a partir de um certo instante, $u^*(t)$ tenha o comportamento descrito em (2.9) é excluída. Assim, o controle ótimo, se não for nulo sempre, deve ser tal que acabe com $u^*(t) = 1$.

Analisaremos agora uma outra situação.

Lema 2 *Se o controle ótimo terminar com $u^*(t) = 1$ e $\alpha \approx 0$, então ele terá no máximo uma troca de controle.*

Demonstração: Suponha que o controle seja da forma

$$u^*(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < \bar{t}_1 \\ 0; & \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2 \\ 1; & \bar{t}_2 < t \leq t_f \end{cases}$$

e, conseqüentemente, teremos

$$g(t) \begin{cases} < 0; & 0 \leq t < \bar{t}_1 \\ > 0; & \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2. \\ < 0; & \bar{t}_2 < t \leq t_f \end{cases}$$

Considerando novamente $\alpha \approx 0$, vamos analisar o comportamento de $g(t)$ em cada subintervalo:

- Para $0 \leq t < \bar{t}_1$ temos $g(t) < 0$ e, portanto, $g(t)$ deve ser crescente para que exista troca de controle em $t = \bar{t}_1$. Assim, $g'(t) > 0 \Rightarrow \lambda_2^*(t) < 0$;

- Em $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2$ as equações diferenciais para λ_1^* e λ_2^* são:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^* + r(1 - 2N^*)\lambda_1^* & = rR\lambda_2^*, \\ \dot{\lambda}_2^* + r(1 - N^*)\lambda_2^* & = 0, \end{cases}$$

cuja solução para λ_2^* é

$$\lambda_2^*(t) = \lambda_2^*(\bar{t}_1) \exp \int_{\bar{t}_1}^t -r(1 - N^*)ds. \quad (2.11)$$

Como $g(t) > 0$ para $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2$ e $g(t) < 0$ em $\bar{t}_2 < t \leq t_f$, $g(t)$ deve continuar crescendo para $t > \bar{t}_1$, atingir um máximo em $t = \tilde{t}$ dentro desse intervalo para que, posteriormente, $g(\bar{t}_2) = 0$.

Dessa forma, $\lambda_2^*(t) < 0$ em $\bar{t}_1 < t < \tilde{t}$, $\lambda_2^*(\tilde{t}) = 0$ e $\lambda_2^*(t) > 0$ para $(\tilde{t}, t_f]$.

Voltando em (2.11) concluímos que $\lambda_2^*(t) < 0$ em todo o intervalo (\bar{t}_1, \bar{t}_2) , o que nos leva a uma contradição. ■

Com a exclusão de alguns possíveis controles, através dos dois lemas anteriores podemos enunciar um resultado geral:

Teorema 1 Para o problema de controle (2.2)-(2.3), com $\alpha \approx 0$, o controle ótimo $u^*(t)$ é do tipo

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 1, & \bar{t} < t \leq t_f, \end{cases}$$

com $\bar{t} \in [0, t_f]$.

Demonstração: Ver lemas 1 e 2.

Do teorema anterior conseguimos identificar quais os possíveis tipos de controle que, naturalmente, dependem dos parâmetros envolvidos no modelo: S_0 , R_0 , α , β , c_1 e r . No entanto, para este modelo estudado não obtivemos uma relação explícita entre os parâmetros de maneira a identificar, por exemplo, quando $u^*(t) = 0$, $\forall t \in [0, t_f]$.

2.1. Aplicação: controle de fungos do feijoeiro

No trabalho de Bassanezi et al.[3] alguns parâmetros monocíclicos do fungo causador da ferrugem (*Uromyces appendiculatus*) e da mancha angular (*Phaeoisariopsis griseola*) no feijoeiro foram quantificados a diferentes temperaturas em dois cultivares: Rosinha G-2 e Carioca. Na descrição do procedimento realizado para a análise dos dados, observa-se que o desenvolvimento de cada tipo de fungo é analisado através de área lesionada e não com o número de propágulos. Outros parâmetros foram observados como, por exemplo, a severidade da doença (% de área foliar com lesões) e a **taxa de crescimento das lesões**.

Os resultados obtidos para este último parâmetro podem ser visualizados na Figura 1, observando-se que a temperatura ótima para o desenvolvimento da ferrugem é de 17°C e para a mancha angular, 24°C .

Utilizamos os dados da Figura 1 nas simulações realizadas e procuramos observar a variação do controle quando alteramos cada um dos parâmetros, já que uma relação explícita entre \bar{t} e os demais parâmetros presentes no modelo não foi obtida.

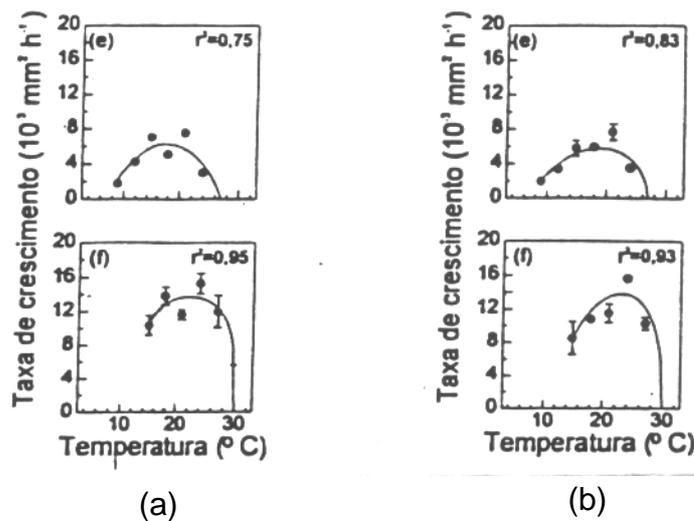


Figura 1: (a) taxa de crescimento do fungo causador da ferrugem e da mancha angular, respectivamente, ao cultivar Rosinha G-2, em função da temperatura. (b) análogo ao item anterior para cultivar Carioca [3].

Nas simulações realizadas os parâmetros foram utilizados com as seguintes unidades: α (adimensional), t , t_f e \bar{t} (dias), r e β (dias^{-1}), c_1 (área lesionada/dias). Por questões de simplificação, as unidades serão omitidas na descrição das simulações assim como na maioria dos gráficos. Utilizamos o software desenvolvido por Adami [1], em linguagem Fortran, que tem por objetivo resolver problemas de Controle Ótimo utilizando um algoritmo conhecido como BOX, de programação não linear. Neste algoritmo o objetivo é a resolução de um problema do tipo

$$\min f(x)$$

$$s.a \ x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

onde $f: R^n \rightarrow R$ é diferenciável e $x_{\min}, x_{\max} \in R^n$. As tabelas e os gráficos foram realizados utilizando o software Excel.

Vamos considerar que, na cultura analisada, a fração total de área infectada é de 10% ($N(0) = 0,1$), onde $S(0) = 0,08$ e $R(0) = 0,02$ ($t = 0$ é o instante em que a

doença é observada) e que a doença foi detectada restando 80 dias para a colheita, ou seja, $t_f = 80$ dias. Vejamos algumas situações analisadas:

a) Influência de r na determinação de \bar{t} (instante de comutação do tratamento):

Consideramos fixos os parâmetros β , c_1 , α , as condições iniciais S_0 , R_0 e realizamos algumas simulações utilizando alguns valores de r obtidos em [3] para a mancha angular na cultivar Rosinha G-2. Dentre os valores de r , escolhemos: $r_1 = 0,026$ A/dia onde $A = 10\text{mm}^2$, $r_2 = 0,031$ A/dia e $r_3 = 0,0336$ A/dia. Embora neste experimento realizado a taxa de crescimento máxima obtida seja r_3 , consideraremos diversos valores de r (maiores que r_3 e também menores que r_1) com o propósito de observarmos a variação de \bar{t} em função de r .

Na tabela que será apresentada a seguir podemos observar a variação de \bar{t} em função de r assim como a área total lesionada ($S^*(t_f)$, $R^*(t_f)$, $N^*(t_f)$) após o respectivo controle efetuado, sendo que, do Teorema 1, se existe troca de controle ela ocorre de $u = 0$ para $u = 1$. Para $\bar{t} = 80$ temos $u^*(t) = 0$, $\forall t \in [0, 80]$ e, para $\bar{t} = 0$, temos $u^*(t) = 1$.

r	t	$S^*(t_f)$	$R^*(t_f)$	$N^*(t_f)$
0,01	80	0,1586	0,0396	0,1982
0,015	80	0,2155	0,05389	0,26939
0,016	80	0,2284	0,0571	0,2855
0,017	80	0,2416	0,0604	0,302
0,018	80	0,2553	0,0638	0,3191
0,019	79,19	0,261	0,0674	0,3284
0,02	61,5	0,2437	0,07152	0,31522
0,021	49,24	0,23	0,0762	0,3062
0,022	38,9	0,2191	0,0815	0,3006
0,023	30,75	0,2099	0,0872	0,2971
0,024	24,72	0,2022	0,0935	0,2957
0,025	18,49	0,1961	0,1	0,2961
0,026	14,27	0,1906	0,1072	0,2978
0,027	10,25	0,1865	0,1147	0,3012
0,028	6,23	0,1833	0,1225	0,3058
0,029	4,22	0,1804	0,1309	0,3113
0,03	2,21	0,1784	0,1396	0,318
0,031	0	0,1783	0,1483	0,3266
0,032	0	0,1821	0,1564	0,3385
0,036	0	0,1976	0,1918	0,3894
0,04	0	0,2129	0,2312	0,4441
0,045	0	0,2314	0,2846	0,516
0,05	4,22	0,2664	0,3285	0,5949
0,055	9,24	0,3271	0,3478	0,6749
0,056	10,25	0,3374	0,3516	0,689
0,057	11,25	0,3518	0,3521	0,7039
0,058	12,26	0,3637	0,3539	0,7176
0,059	13,26	0,378	0,3534	0,7314
0,06	14,17	0,3899	0,3542	0,7441
0,065	18,49	0,4602	0,3433	0,8035
0,07	22,71	0,5293	0,3227	0,852
0,075	80	0,7825	0,1956	0,9781
0,077	80	0,785	0,1962	0,9812
0,08	80	0,7881	0,197	0,9851

Tabela 1 - Valores de \bar{t} e ($S^*(t_f)$, $R^*(t_f)$, $N^*(t_f)$) para cada taxa de crescimento r dada, considerando os parâmetros e as condições iniciais fixos: $S_0 = 0,08$, $R_0 = 0,02$, $c_1 = 0,002$ e $\beta = 0,6$.

Na Tabela 1 tomamos $S_0 = 0,08$, $R_0 = 0,02$, $c_1 = 0,002$, $\beta = 0,6$ e $\alpha = 10^{-5}$. Podemos observar que, com a eficiência β e “custo” c_1 fixados, à medida que r aumenta passa a existir troca de controle de modo que o período de aplicação aumenta (\bar{t} diminui) até que, para $r \in [0,031, 0,045]$ torna-se necessário a aplicação durante todo o intervalo $[0, 80]$. Para valores de r maiores que $0,045$ o valor de \bar{t} aumenta e a aplicação de fungicida torna-se inviável para valores de r muito altos (veja Figura 2(a)). Na Figura 2(b) observamos o comportamento da área lesionada no tempo final t_f para cada tipo de controle obtido (em função de r).

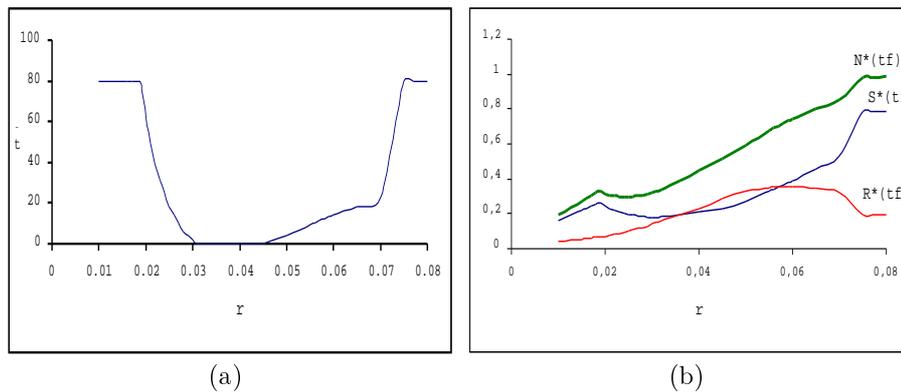


Figura 2 - (a) Instante de comutação \bar{t} do controle em função da taxa de crescimento r do fungo (dados fixados na Tabela 1). (b) $S^*(t_f)$, $R^*(t_f)$ e $N^*(t_f)$ em função de r para os dados da Tabela 1. $N^*(t_f)$ é a percentagem de área lesionada no tempo final t_f para cada valor de r fixo.

Mantendo os mesmos parâmetros da Tabela 1, exceto c_1 e β , que foram considerados como $c_1 = 0,004$ e $\beta = 0,8$, não temos o mesmo tipo de comportamento já observado. Para este novo conjunto de dados não observamos um intervalo de r para o qual $u^*(t) = 1$ (como na Tabela 1) mas sim um intervalo de r onde a troca de controle praticamente não sofre alteração.

Se tomarmos os mesmos parâmetros da Tabela 1, porém com $c_1 = 0,02$ (10 vezes maior que o utilizado) encontramos que $u^*(t) = 0$ sempre, para qualquer valor de r da tabela.

b) Influência de β e c_1 na determinação de \bar{t} :

Mantendo fixos $\alpha = 10^{-5}$, $S_0 = 0,08$, $R_0 = 0,02$, $r = 0,026$, $t_f = 80$ e variando os parâmetros β e c_1 , observamos na tabela a seguir o valor de \bar{t} obtido. Para este conjunto de dados tem-se que, fixando β , existe um intervalo $[a, b]$ de c_1 para o qual existe troca de controle e, à medida que c_1 aumenta ($c_1 > b$) torna-se inviável a aplicação de fungicida; se $c_1 < a$ então $u^*(t) = 1$ ($\bar{t} = 0$), $\forall t \in [0, 80]$.

$\beta \setminus c_1$	0,0015	0,00175	0,002	0,00225	0,0025	0,003	0,0035	0,004	0,0045
0,8	0	3,21	10,25	18,49	24,72	38,99	53,26	71,75	80
0,75	0	2,21	10,25	18,49	26,73	42,2	59,49	80	80
0,7	0	2,21	10,25	20,5	28,94	47,43	68,73	80	80
0,65	0	2,21	12,26	22,71	32,76	55,27	80	80	80
0,6	0	2,21	14,27	26,73	38,99	68,73	80	80	80

Tabela 2 - Valor de \bar{t} para cada par (β, c_1) - Por exemplo, para $c_1 = 0,003$ e $\beta = 0,7$ tem-se que $\bar{t} = 47,43$.

Embora não tenhamos uma relação explícita entre os parâmetros para a obtenção de $u^*(t)$, as simulações numéricas utilizando o pacote desenvolvido em [1] possibilitou-nos alguma análise e obtenção de $u^*(t)$.

3. Taxa de Crescimento Dependente do Tempo

No caso específico de fungos, vários fatores exercem grande influência no seu desenvolvimento como umidade, luminosidade, temperatura, dentre outros. No que se refere à temperatura, a atividade fúngica começa a uma temperatura mínima, aumenta até um valor ótimo e então declina e pára a uma temperatura máxima. Estas temperaturas são conhecidas como **temperaturas cardinais** e dependem de outros fatores, que inclui o tempo de exposição a qualquer temperatura [6]. Além disso, para cada tipo de fungo e sob diferentes condições, estas temperaturas cardinais podem variar sensivelmente.

Diante dessas considerações a respeito da dependência da taxa de crescimento em relação a temperatura (e consequentemente do tempo), efetuaremos algumas simulações a título de comparação com o caso constante, tomando $r(t)$ como uma função periódica.

Utilizaremos alguns dos dados presentes na Figura 1 para a taxa de crescimento da lesão da mancha angular ao cultivar Rosinha G-2. Por exemplo, a temperatura ótima para o desenvolvimento desse fungo ($24^\circ C$) e os valores de r nas temperaturas $24^\circ C$ ($r = 0,014mm^2/h$) e $29^\circ C$ ($r = 0,002mm^2/h$). Esses valores de r serão utilizados com as mesmas unidades já usadas nas simulações anteriores.

Se considerarmos que a temperatura máxima atingida durante o ano é $39^\circ C$ e que a mínima é $1^\circ C$, podemos simular a temperatura em função de t (dias do ano, de janeiro a dezembro) da seguinte forma:

$$T(t) = 20 + 19 \cos(\pi t/180), \quad (3.12)$$

onde $20^\circ C$ corresponde a uma temperatura média anual.

Utilizando a idéia de temperaturas cardinais citadas anteriormente, ou seja, a atividade dos fungos começa a uma temperatura mínima, aumenta até um ótimo e então declina, vamos supor a taxa de crescimento em função da temperatura da forma:

$$r(T) = a \exp[-b(T - T^*)],$$

onde T^* é a temperatura em que a maior taxa de crescimento é atingida e os coeficientes a e b podem ser determinados a partir de informações de r em algumas temperaturas.

Como esse fungo praticamente não se desenvolve em temperaturas inferiores a $17^\circ C$ e superiores a $30^\circ C$, para efeito de simplificação e obtenção de $r(t)$ de modo contínuo, vamos considerar

$$\begin{aligned} T = 24^\circ C &\Rightarrow r = 0,0336 \\ T = 6^\circ C &\Rightarrow r = 0,0048 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a função $r(t) = r(T(t))$, dada por

$$r(t) = 0,0336 \exp[-0,006 * (-4 + 19 * \cos(\pi t/180))^2],$$

cujos gráfico pode ser visualizado a seguir:

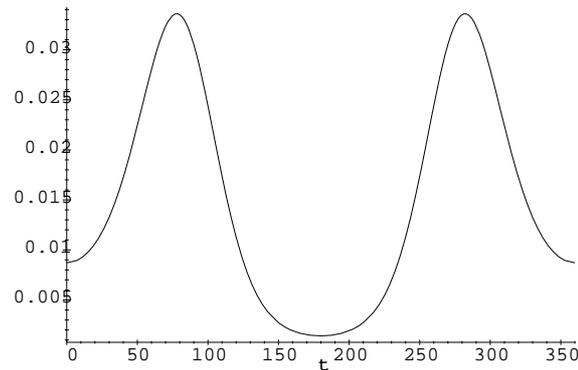


Figura 3 - Gráfico de $r(t) = 0,0336 \exp[-0,006 * (-4 + 19 * \cos(\pi t/180))^2]$.

Utilizando $S_0 = 0,08$, $R_0 = 0,02$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0,6$, $c_1 = 0,002$ e a função $r(t)$ acima, observamos que o controle obtido não necessariamente apresenta o mesmo tipo de comportamento do caso r constante.

Tomando r para $t \in [50, 130]$ obtém-se uma troca de controle em $\bar{t}_1 = 4,22$ e $\bar{t}_2 = 50,24$ enquanto que, considerando $t \in [0, 80]$ obtemos $\bar{t} = 52,25$. Nas figuras que se seguem podemos observar estes resultados e comparar $r(t)$ com o intervalo de tempo em que $u^*(t) = 1$, ou seja, $u^*(t) = 1$ para uma “faixa” em que $r(t)$ é máxima.

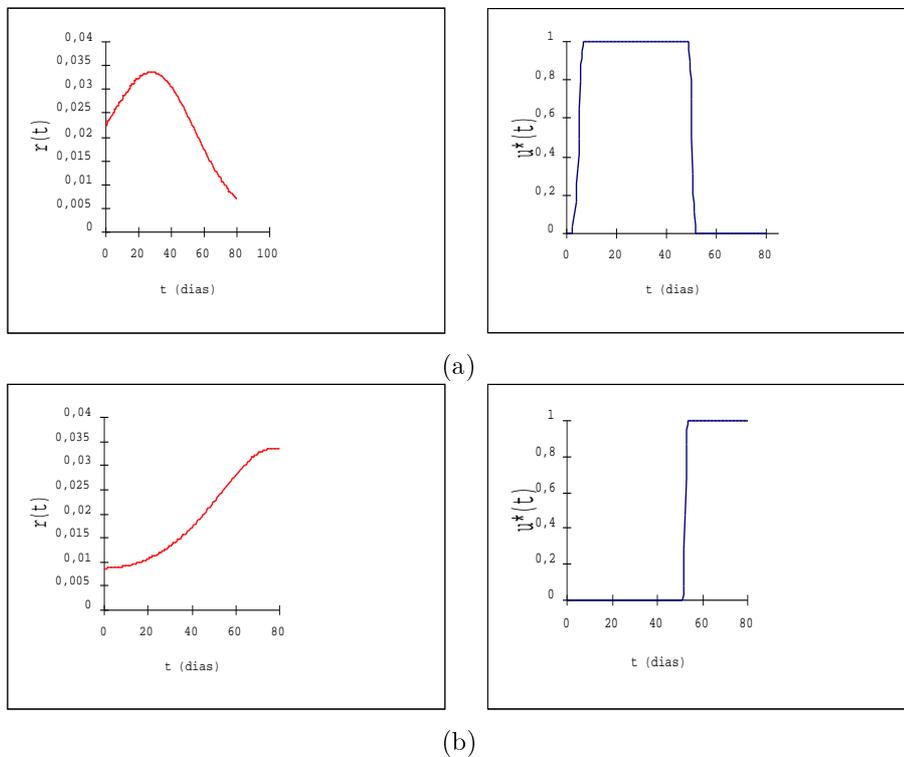


Figura 4 - Intervalo da função $r(t)$ considerado e o respectivo controle obtido - (a) r para $t \in [50, 130]$, (b) r para $t \in [0, 80]$.

Vale a pena ressaltar que a passagem de $u = 0$ para $u = 1$, utilizando métodos numéricos, não ocorre de forma instantânea, o que pode ser observado nos gráficos para $u^*(t)$.

Assim, a inclusão do efeito da temperatura na taxa de crescimento das lesões resulta em um comportamento diferente em modelo linear [8] e em modelo não linear.

Embora esse fato só tenha sido observado numericamente sem uma demonstração formal, constatamos que a não linearidade do modelo, com a inclusão das competições inter e intra específicas, tem uma grande influência na determinação de uma estratégia ótima de controle, principalmente quando consideramos $r = r(t)$ variável.

4. Considerações Finais

No caso específico deste trabalho buscamos modelar matematicamente uma situação de produção agrícola sujeita ao ataque de fungos, onde se buscava otimizar a produção (minimizando a infestação no final da colheita) com um custo menor

possível no combate à doença (otimizando o uso de agrotóxico) considerando “populações de fungos” sensíveis e resistentes aos fungicidas.

Consideramos a dinâmica da área foliar lesionada contemplando a competição intra-específica entre as populações de fungos sensíveis e resistentes pela ocupação da área foliar. Tal ocupação é cumulativa, isto é, uma vez lesionada a área foliar não se recupera para a fotossíntese, o que acarreta uma menor produtividade da planta. A produtividade é afetada significativamente se a região lesada ultrapassa algum índice de infestação que varia para cada cultivar. O problema de controle que procuramos analisar visou estabelecer um valor mínimo para a região foliar lesionada no tempo final (colheita) sujeita ao gasto (aplicação) mínimo de fungicidas.

Consideramos r constante e $r = r(t)$ variável com o tempo sendo que no primeiro caso a troca de controle (quando existe) é de $u = 0$ para $u = u_{\max}$ e, para $r(t)$ variável, existe a possibilidade de duas trocas de controle (embora só observado em simulações) sendo que $u = u_{\max}$ é obtido sempre no intervalo onde a taxa de crescimento é máxima. Comportamento semelhante não foi observado para o modelo linear em [8], que possui no máximo uma troca de controle, tanto para $r = \text{constante}$ como para $r = r(t)$.

É importante ressaltarmos que, tanto no modelo linear tratado em [8] como no modelo não linear aqui proposto, obtivemos algumas particularidades de cada modelo apresentado considerando $\alpha \approx 0$. Assim, a mutação de sensível para resistente tem pouca influência na adoção de uma medida de controle quando desejamos identificar como o fungicida deve ser aplicado, logo após a doença ter sido detectada. A pressão de seleção se mostra muito mais importante para o desenvolvimento da resistência do que as mutações, uma vez que a resistência está sempre presente na população. Neste caso, não estamos levando em consideração aplicações anteriores, mas o nível atingido pela “população” resistente, logo após o controle, pode ser analisado para futuras aplicações.

Referências

- [1] A. Adami, Resolução de problemas de controle ótimo utilizando o algoritmo BOX - *Tese de Mestrado*, IMECC- UNICAMP, 1996.
- [2] J.A. Barrett, Estimating Relative Fitness in Plant Parasites: Some General Problems, *Phytopathology*, **73** No.4 (1983).
- [3] R.B. Bassanezi, L. Amorin, A.B. Filho e C.V. Godoy, Análise Comparativa entre a ferrugem e a mancha angular do feijoeiro: efeito da temperatura nos parâmetros monocíclicos, *Fitopatologia brasileira*, **22** No.3 (1997).
- [4] R. Ghini, L.L. Vendite e A.A. Petrucci, Dosagens de fungicidas: avaliação de seus efeitos na resistência de fungos através de um modelo matemático, *Fitopat. Bras.*, **19** (1994), 514-519.
- [5] D. Kirk, “Optimal Control Theory- An Introduction”, Prentice Hall, 1970.

- [6] C.S. Lacaz, P.S. Minami, A. Purchio, “O grande mundo dos Fungos”, Editora Polígono - Universidade de São Paulo, 1970.
- [7] C.G. Varassin, Modelagem Matemática para o crescimento de populações de fungos e o desenvolvimento da resistência a fungicidas, *Tese de Mestrado*, IMECC - UNICAMP, 1996.
- [8] R. Zotin, Controle Ótimo da Aplicação de Fungicidas na Lavoura, “Tese de Doutorado”, UNICAMP, 1999.