

## Usando o ATSP na Modelagem do Problema Integrado de Produção de Bebidas

C.M. DEFALQUE<sup>1</sup>, S. RANGEL<sup>2</sup>, Departamento de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP - Univ Estadual Paulista, 15054-000, São José do Rio Preto, SP, Brasil.

D. FERREIRA<sup>3</sup>, Departamento de Matemática Aplicada, UFTM, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 38025-180, Uberaba, MG, Brasil.

**Resumo.** Neste trabalho, propomos um modelo integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção monomáquina para uma fábrica de refrigerantes de pequeno porte. As decisões de dimensionamento foram baseadas em um modelo encontrado na literatura e as decisões de sequenciamento foram modeladas utilizando restrições do problema do caixeiro viajante assimétrico. Para a validação do modelo proposto foram feitos testes computacionais com exemplares gerados aleatoriamente, e também exemplares baseados em dados reais obtidos da literatura. Os exemplares foram resolvidos pelo método *Branch-and-Cut* incluído no pacote computacional CPLEX 10.0. Os resultados mostram que o modelo proposto representa o planejamento da produção em fábricas de bebidas monomáquinas e que, em algumas situações, produz resultados melhores que o modelo da literatura.

**Palavras-chave.** Dimensionamento de lotes, Sequenciamento da produção, *Asymmetric Traveling Salesman Problem*.

### 1. Introdução

Os problemas de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção vêm repercutindo consideravelmente na literatura. Uma tendência recente são os trabalhos que apresentam modelos matemáticos que capturam simultaneamente as relações entre os dois problemas. Há vários trabalhos com aplicações práticas do problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes. Almada-Lobo *et al.* [1] apresentam um modelo para o planejamento da produção de uma indústria de contêineres de vidro cujas decisões de dimensionamento de lotes são baseadas no modelo *Capacitated Lotsizing and Scheduling Problem* (CLSP) (*e.g.* [17]) e as decisões do sequenciamento são formuladas com base no problema do caixeiro viajante assimétrico considerando restrições de *setup carryover*. Para eliminar as subrotas que

---

<sup>1</sup>crisdefalque2@hotmail.com

<sup>2</sup>socorro@ibilce.unesp.br

<sup>3</sup>deisemara@icte.uftm.edu.br

podem surgir na modelagem do sequenciamento, são consideradas restrições de eliminações de subrotas baseadas nas restrições propostas por Miller, Tucker e Zemlin (MTZ) [12]. Toso *et al.* [16] apresentam dois modelos para uma indústria de suplementos para nutrição animal cujas decisões de dimensionamento são baseadas no modelo CLSP e as do sequenciamento são baseadas no problema do caixeiro viajante assimétrico. Os modelos se diferem pela consideração, ou não, de *setup carryover*. Diferente do modelo proposto por Almada-Lobo *et al.*, nos modelos propostos em Toso *et al.* são levados em consideração os atrasos que podem ocorrer na produção e seus custos, lote mínimo, horas extras e os custos gerados pelas horas extras. Além disso, para eliminar as subrotas são consideradas restrições de eliminação de subrotas baseadas nas restrições propostas por Dantzig, Fulkerson e Jonhson (DFJ) [12]. Toledo *et al.* [15] propõem um modelo multiestágio integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção, baseado no modelo GLSP (*General Lotsizing and Scheduling Problem*) [9], para o planejamento da produção de uma fábrica de refrigerantes de grande porte considerando sincronia entre os múltiplos estágios. Ferreira *et al.* [7] apresentam um modelo para o mesmo problema de planejamento da produção de refrigerantes também baseado no modelo GLSP, porém o modelo proposto considera que existe um tanque dedicado para cada máquina.

O problema de planejamento da produção de bebidas em uma fábrica de pequeno porte é tratado em [8] e [13]. Em uma fábrica de refrigerantes, a produção de diferentes sabores e tamanhos é feita basicamente em dois estágios principais: preparação de xarope (Estágio I) e envase da bebida (Estágio II). O modelo P1S1M (*one-stage one-machine lot-scheduling problem*) proposto em Ferreira *et al.* [8] é baseado no modelo GLSP e considera a situação em que há vários tanques dedicados a uma única máquina, o que torna desnecessário considerar a programação de xarope nos tanques. Em relação ao Estágio I são consideradas apenas as quantidades mínimas de produção de xarope para garantir a homogeneidade do mesmo, e a capacidade máxima do tanque. No primeiro estágio, os ingredientes que formam o xarope, são pré-misturados, e o composto resultante é enviado aos tanques de preparo, onde então recebe o açúcar líquido ou adoçante (para os sabores *diet*). Esta mistura é agitada por hélices que tornam o xarope uma mistura homogênea. Para que este composto seja bem misturado, é necessária uma quantidade mínima de xarope no tanque, suficiente para cobrir estas hélices. Um tanque pode abastecer ao mesmo tempo várias linhas de produção, mas uma linha recebe xarope de apenas um tanque por vez. No segundo estágio, a bebida é envasada em linhas de produção. Nelas, os vasilhames entram por uma esteira rolante onde são lavados e em seguida, passam por uma máquina que os enche com uma determinada quantidade de xarope e água carbonatada. Os vasilhames são então fechados, rotulados, empacotados e levados para o estoque. A linha de produção (doravante chamada máquina) deve aguardar até que o xarope esteja pronto para ser enviado para o envase. Do mesmo modo, o envio de xarope para a máquina deve ocorrer somente se esta estiver pronta para o envase da bebida, ou seja, deve haver uma sincronia entre os estágios de produção de xarope e envase da bebida. O modelo proposto em [13] é mais simples que o modelo P1S1M e considera apenas o dimensionamento dos lotes no Estágio II (envase da bebida). Mais informações sobre o processo de produção de refrigerantes, incluindo figuras para ilustrar os estágios de produção,

podem ser encontradas nas referências citadas.

Neste trabalho, é proposto um modelo alternativo para o problema monomáquina de dimensionamento e sequenciamento de lotes. As idéias usadas para modelar o dimensionamento dos lotes são similares às encontradas em Ferreira *et al.* [8], e as idéias para o sequenciamento são baseadas no problema do caixeiro viajante assimétrico. O modelo proposto, P1S1MTS *one-stage one-machine traveling salesman lot-scheduling problem*, é apresentado na Seção 2. Na Seção 3 descrevemos o procedimento para validação do modelo. Testes computacionais realizados com dados reais são apresentados e discutidos na Seção 4, e na Seção 5 são feitas as considerações finais. Resultados parciais deste trabalho estão descritos em [4].

## 2. Modelo P1S1MTS: uma nova proposta

O modelo proposto neste trabalho é uma reformulação do modelo P1S1M proposto por Ferreira *et al.* [8]. O modelo P1S1M é baseado no modelo GLSP que envolve a divisão de cada período do horizonte de planejamento em subperíodos. Para cada período, indexado por  $t$ ,  $S_t$  é o conjunto de subperíodos associados. As variáveis de produção, preparo e troca são indexadas por item e subperíodo (subscritos  $j$  e  $s$  respectivamente). Para representar os dois estágios de produção são usados os sobrescritos  $I$  para o estágio de preparação do xarope e  $II$  para o estágio de envase da bebida. A variável  $x_{js}^{II}$  representa a quantidade produzida da bebida (item)  $j$  no subperíodo  $s$ ;  $y_{ls}^I$  é igual a 1 se há a produção do xarope  $l$  no subperíodo  $s$  e 0 caso contrário;  $y_{js}^{II}$  é igual a 1 se a máquina está preparada para a produção do item  $j$  no subperíodo  $s$  e 0 caso contrário;  $z_{ijs}^{II}$  é igual a 1 se há troca na máquina do item  $i$  para o item  $j$  no subperíodo  $s$  e 0 caso contrário.

O modelo P1S1M possui, associado ao Estágio II, restrições usuais de balanceamento entre estoque e produção; restrições de capacidade; restrições de preparo da máquina; restrições que controlam a troca de produção entre itens; e restrições que garantam que haverá apenas um item preparado e apenas uma troca por subperíodo. Em relação ao estágio I, há restrições de lotes máximos e mínimos de xarope, que também cumprem o papel de controlar o preparo do tanque, ou seja, se não houver o preparo do tanque não há produção, e se houver, o tamanho do lote de xarope estará entre a quantidade mínima exigida para garantir a homogeneidade do xarope e o controle da capacidade do tanque. A função objetivo minimiza custos de estoque, atraso e troca de itens na máquina. A dimensão do modelo P1S1M depende também do número de subperíodos (associado ao número máximo de preparos por período) e portanto, ao aumentar o número de subperíodos, o número de variáveis e restrições cresce, o que pode tornar o modelo difícil de ser resolvido ainda que hajam poucos itens para serem programados. A descrição completa do modelo P1S1M conforme proposto em Ferreira *et al.* [8] é dada pelas expressões (6.1)-(6.10) apresentadas no Apêndice.

No modelo proposto neste trabalho para integrar o dimensionamento e o sequenciamento dos lotes, modelo P1S1MTS, o dimensionamento dos lotes é formulado utilizando restrições do modelo CLSP também encontradas no modelo P1S1M, e para modelar as decisões do sequenciamento são utilizadas as restrições do problema do

caixeiro viajante assimétrico. O sequenciamento dos itens pode ser definido da seguinte forma: para cada período do horizonte de planejamento, definimos um grafo  $G = (V, A)$ , onde  $V$  corresponde aos itens que podem ser produzidos no período (ou seja, é considerado apenas um subconjunto do número total de itens para os quais pode haver produção) e os arcos em  $A$  correspondem às possíveis trocas entre cada par de itens. O problema consiste em encontrar um caminho hamiltoniano partindo de uma origem qualquer no grafo associado a cada período.

Para obter o caminho hamiltoniano, Toso *et al.* [16] incluem um item fantasma,  $i_0$  e consideram que o tempo de troca do item  $i_0$  para um item qualquer  $j$  é zero e de um item  $j$  qualquer para o item  $i_0$  é infinito. Desta forma não há necessidade de definir *a priori* o primeiro item a ser produzido em cada período, o item inicial é o item  $i_0$ . Neste trabalho também consideramos a inclusão do item fantasma, porém o tempo de troca de um item  $j$  qualquer para o item  $i_0$  é zero. Com a inclusão desse item extra (nó adicional no grafo associado a cada período) e custos apropriados, é possível usar um modelo matemático para o problema do caixeiro viajante para obter um caminho hamiltoniano [12]. É considerado ainda que a troca entre itens iguais não é permitida. As restrições para eliminação de subrotas consideradas em Toso *et al.* são as propostas por Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ) [12]. Neste trabalho, consideramos as restrições propostas por Miller, Tucker e Zemlin (MTZ) [12]. Diferente das restrições DFJ que devem ser incorporadas de forma dinâmica por causa do número elevado de possibilidades, as restrições MTZ podem ser incorporadas *a priori* e, apesar de em geral não fornecerem uma relaxação linear tão boa quanto a obtida usando as restrições DFJ [14], forneceram bons resultados.

Assim, propomos um modelo monoestágio monomáquina com as restrições do sequenciamento formuladas com base no problema do caixeiro viajante assimétrico. Da mesma forma que no modelo P1S1M, para formular o modelo P1S1MTS serão considerados os sobrescritos  $I$  e  $II$  que estão relacionados aos estágios  $I$  (preparo do xarope) e  $II$  (envase), respectivamente, nos índices, parâmetros e variáveis definidos a seguir. O modelo proposto é definido pelas expressões (2.1)-(2.14).

### Índices e Parâmetros

$J$  número total de itens;  $L$  número total de xaropes;  $T$  número total de períodos;  $i, j \in \{1, \dots, J\}$ ;  $l \in \{1, \dots, L\}$ ;  $t \in \{1, \dots, T\}$ ;  $|S_t|$  é a cardinalidade de  $S_t$  e corresponde ao número total de preparos em cada período  $t$ ;  $\gamma_l$  conjunto de itens que utilizam o xarope  $l$  para serem produzidos;  $a_j^{II}$  tempo necessário para a produção de uma unidade do item  $j$  (em minutos);  $b_{ij}^{II}$  tempo de troca do item  $i$  para o item  $j$  (em minutos);  $d_{jt}$  demanda (em caixas) do item  $j$  no período  $t$ ;  $g_j$  custo por atrasar uma unidade do item  $j$ ;  $h_j$  custo para estocar uma unidade do item  $j$ ;  $i_0$  (item fantasma) é o item para o qual a máquina foi preparada no início de cada período;  $I_{j0}^+$  estoque inicial do item  $j$ ;  $I_{j0}^-$  quantidade em atraso do item  $j$  no início do horizonte de planejamento.  $K^I$  capacidade máxima do tanque (em litros);  $K_t^{II}$  capacidade disponível em tempo da máquina no período  $t$  (em minutos);  $q_l$  quantidade mínima de xarope  $l$  a ser preparada no tanque para garantir a homogeneidade (em litros);  $r_{lj}$  quantidade necessária de xarope  $l$  para produzir uma unidade do item  $j$  (em litros);  $s_{ij}^{II}$  custo de troca do item  $i$  para o item  $j$  na máquina.

**Variáveis:**

$I_{jt}^+$  quantidade de estoque do item  $j$  no final do período  $t$ ;  $I_{jt}^-$  quantidade em atraso do item  $j$  no final do período  $t$ ;  $x_{jt}^I$  quantidade de produção do item  $j$  no período  $t$ ;  $y_{lt}^I$  é igual a 1 se há a produção do xarope  $l$  no período  $t$  e 0 caso contrário;  $z_{ijt}^{II}$  é igual a 1 se há troca na máquina do item  $i$  para o item  $j$  no período  $t$  e 0 caso contrário;  $u_{jt}$  posição em que o item  $j$  é produzido no período  $t$ ;  $w_{lt}$  é uma variável inteira que indica o número de tanques do xarope  $l$  que devem ser produzidos no período  $t$ ;  $n_{lt}$  controla a fração da capacidade total de um tanque do xarope  $l$  que será produzida no período  $t$ . Seu valor é controlado para garantir que a quantidade produzida do xarope  $l$  no período  $t$  seja suficiente para obter a homogeneidade do mesmo.

**Modelo P1S1MTS**

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J s_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \quad (2.1)$$

sujeito a:

Estágio II (Envase)

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + x_{jt}^{II} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^J a_j^{II} x_{jt}^{II} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J b_{ij}^{II} z_{ijt}^{II} \leq K_t^{II}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.3)$$

$$a_j^{II} x_{jt}^{II} \leq K_t^{II} \sum_{i=1, i \neq j}^J z_{ijt}^{II}, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i_0}^J z_{i_0 jt}^{II} \geq \sum_{i=1, i \neq k}^J z_{ikt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^J z_{ijt}^{II} \leq 1, \quad i = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1, i \neq k}^J z_{ikt}^{II} = \sum_{j=1, j \neq k}^J z_{kjt}^{II}, \quad k = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1, j \neq i}^J z_{ijt}^{II} \leq |S_t|, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.8)$$

$$u_{jt} \geq u_{it} + 1 - (J-1)(1 - z_{ijt}^{II}), \quad i, j = 2, \dots, J, i \neq j, t = 1, \dots, T. \quad (2.9)$$

Estágio I (Xaroparia)

$$\sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{jt}^{II} = K^I (w_{lt} - n_{lt}), \quad l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T. \quad (2.10)$$

$$n_{lt} \leq 1 - \left(\frac{q_l}{K^I}\right), \quad l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T. \quad (2.11)$$

$$y_{lt}^I \leq w_{lt} \leq |S_t| y_{lt}^I, \quad l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T. \quad (2.12)$$

$$\sum_{l=1}^L w_{lt} \leq |S_t|, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.13)$$

$$z_{ijt}^{II}, y_{lt}^I = 0/1, w_{lt} \in Z_+, x_{jt}^{II} \text{ e } n_{lt} \geq 0, u_{jt} \geq 0, I_{j(t-1)}^+ \geq 0, I_{jt}^- \geq 0, \\ j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T, l = 1, \dots, L. \quad (2.14)$$

A função objetivo (2.1) minimiza a soma total dos custos de estoque, atraso, e troca de itens. No estágio II as restrições (2.2) são restrições de balanceamento e estoque. Para assegurar que a capacidade da máquina em cada período seja respeitada utilizamos as restrições (2.3). As restrições (2.4) asseguram que o item  $j$  será produzido somente se a máquina foi preparada. Diferente do modelo P1S1M, onde o preparo da máquina é determinado explicitamente por uma variável, o modelo P1S1MTS considera o preparo implícito usando a variável de troca ( $z_{ijt}^{II}$ ). O conjunto de restrições (2.5) garantem que somente haverá troca de um item  $i$  qualquer para um item  $k$  qualquer se existir uma troca do item inicial  $i_0$  para algum item  $j$  no período  $t$ . As restrições (2.6) proibem mais de uma troca a partir de um item  $i$ , o que significa que em cada período só pode ser produzido um único lote de cada item. As restrições (2.7) garantem que se ocorre uma troca de um item  $i$  para um item  $k$ , então haverá uma troca deste item  $k$  para um item  $j$ .

As restrições (2.8) controlam o número máximo de trocas na máquina no período  $t$ . Elas foram incluídas no modelo para possibilitar a comparação com o modelo P1S1M. O modelo P1S1M permite a produção de apenas um lote por subperíodo, assim o número máximo de preparos no período  $t$  é limitado pelo número total de subperíodos  $|S_t|$ . Este parâmetro também é usado para controlar o número máximo de tanques com capacidade total que podem ser preparados por período.

O conjunto das restrições (2.5), (2.6) e (2.7) sozinhas podem gerar subrotas, ou seja, no caso do sequenciamento dos itens, subsequências desconexas. Para impedi-las são utilizadas as restrições (2.9) baseadas nas restrições MTZ para o problema do caixeiro viajante.

As restrições (2.10), (2.11), (2.12), e (2.13) são similares às restrições propostas em [3] e controlam a quantidade de xarope produzida. Assim como Ferreira *et al.* [8], consideramos que a quantidade de xarope necessária para a produção do item  $j$  estará pronta no momento do envase deste item e que todos os tanques da xaroparia possuem a mesma capacidade  $K^I$ . As restrições (2.10) garantem que o xarope  $l$  é produzido na quantidade demandada pelo estágio II. As restrições (2.11) garantem que se uma fração da capacidade máxima do tanque for produzida ( $n_{lt} > 0$ ), esta fração deve ser suficiente para garantir a homogeneidade do xarope  $l$ . As restrições (2.12) garantem que só haverá produção do xarope  $l$  se o tanque estiver preparado ( $y_{lt} = 1$ ), ou seja,  $w_{lt} = 0$  se  $y_{lt} = 0$  e  $1 \leq w_{lt} \leq |S_t|$  caso contrário. De acordo com as restrições (2.13), a soma total do número de tanques produzidos no período  $t$  deve ser limitada pelo número total de preparos do tanque em  $t$ . As restrições (2.14) são de domínio das variáveis.

No modelo P1S1M a produção de um lote de xarope é limitada a um tanque

por subperíodo e, cada lote de xarope preparado é totalmente utilizado no envase de apenas um tipo de item. No caso de envase do mesmo sabor de xarope em subperíodos consecutivos, não há a possibilidade de aproveitamento da capacidade ociosa do tanque em um subperíodo para o preparo de um lote maior de xarope que possa ser utilizado em sequencia no envase de outro item de mesmo sabor. As restrições (2.10)-(2.13) do modelo P1S1MTS permitem este aproveitamento da capacidade do tanque. Parte do xarope preparado para o envase de um item pode ser utilizado para envasar um item diferente, mas de mesmo sabor, no mesmo período. Isto faz com que, o número de preparos de xarope de um determinado sabor possa ser menor que a quantidade de itens que o utilizam. Como consequência tem-se economia de tempo e redução do número de utilizações de um tanque. Por exemplo, consideremos um único período ( $T=1$ ), demanda positiva para 3 itens diferentes, mas de mesmo sabor 1 (xarope 1), e tal que a demanda do item 1 necessita de 30% da capacidade de um tanque para ser suprida, a do item 2 necessita de 40% desta capacidade, e a demanda do item 3 necessita de 50% (total de 120% da capacidade de um tanque). Consideremos também que nesse período poderá haver no máximo dois preparos do tanque (2 subperíodos). Suponhamos que a sequência ótima de produção seja item 1, item 2 e item 3 e que os preparos dos respectivos xaropes podem ter ocorrido em um mesmo tanque ou em tanques diferentes. A Figura 1-a representa a produção do xarope nos tanques de acordo com o modelo P1S1M, e a Figura 1-b, mostra a produção dos xaropes de acordo com o modelo P1S1MTS.

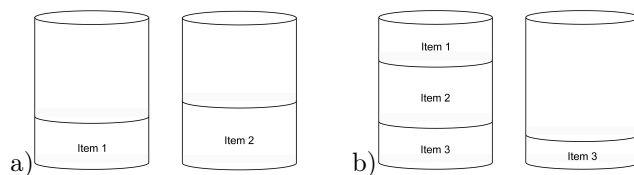


Figura 1: Produção de xarope nos tanques de acordo com os modelos: a - P1S1M; b - P1S1MTS.

Podemos observar na Figura 1-a que, como o número de preparos (subperíodos) é limitado em dois, a produção do item 3 fica em atraso. Assim, seria necessário o preparo de mais um tanque do xarope para a produção do item 3, o que de acordo com as condições do exemplo, que representa simplificadaamente uma situação prática, é inviável. No caso da Figura 1-b, o xarope 1 produzido no 1º tanque foi utilizado para a produção da demanda total dos itens 1 e 2 e demanda parcial do item 3. Dada a necessidade de completar a demanda do item 3 recorreu-se ao 2º tanque e, portanto, não houve atraso deste item. Essa situação ilustra a rigidez do modelo P1S1M, depois de fixado o número de subperíodos. Para contorna-la seria necessário, por exemplo, permitir a produção de mais um tanque (subperíodo) o que automaticamente aumenta o número de variáveis e restrições do modelo para este exemplar.

### 3. Validação do modelo P1S1MTS

Com o intuito de validar o modelo P1S1MTS e analisar se os modelos P1S1M e P1S1MTS retratam a mesma situação, foram criadas três classes de exemplares. A primeira classe (Classe 1) considera que mais de um item utiliza o mesmo xarope para a sua produção, a segunda classe (Classe 2) é uma modificação da Classe 1 onde os valores dos custos de trocas são iguais a 10% dos valores dos tempos de troca. Na terceira classe (Classe 3) itens diferentes utilizam xaropes diferentes para a sua produção, ou seja, os exemplares dos dois modelos nesta classe retratam exatamente a mesma situação, não é possível haver aproveitamento da capacidade ociosa do tanque para o preparo de um lote maior de xarope. Para cada classe foram gerados aleatoriamente 8 exemplares, sendo que os exemplares A1-A8 se referem à Classe 1, os exemplares B1-B8 se referem à Classe 2 e os exemplares C1-C8 se referem à Classe 3.

Em todos os exemplares foram considerados 4 itens sendo que os exemplares que utilizam xaropes iguais para a produção de alguns itens possuem dois xaropes diferentes (Classes 1 e 2), e os exemplares da Classe 3 possuem 4 xaropes. Para todos os exemplares há um horizonte de planejamento contendo 2 períodos os quais possuem no máximo 6 preparos (subperíodos). A capacidade máxima do tanque considerada é de 1000 litros. A quantidade mínima de xarope considerada é de 176,802 litros. Os parâmetros para geração dos exemplares são mostrados na Tabela 1 e são baseados nos parâmetros utilizados em [6] e [2]. Os custos de atraso e estoque, a capacidade necessária para a produção de uma unidade de cada item, o tempo de troca, a demanda, o estoque inicial e a quantidade de xarope necessária para a produção de uma unidade de cada item são gerados aleatoriamente através de uma distribuição uniforme nos respectivos intervalos. A capacidade da máquina considerada nos experimentos aleatórios é de 867,48 minutos, que é uma capacidade considerada folgada. Supondo que se tenha uma demanda máxima de 12.958 itens e que o tempo de produção de cada item seja o tempo máximo de 0,06 minutos, então são necessários 777,48 minutos de tempo disponível para a produção dos itens. Considerando também que o tempo de troca de todos os itens fosse o maior possível, que é de 30 minutos, e que sempre são realizadas 3 trocas, então são consumidos 90 minutos. Note que os custos de troca ( $s_{ij}$ ) são frações dos tempos de troca  $b_{ij}$ .

Parâmetros	Valores
Custo de estoque ( $h_j$ )	[0,006; 0,009]
Custo de atraso ( $g_j$ )	[15; 18,9]
Capacidade para produção de uma unidade para o item $j$ ( $a_j$ )	[0,03; 0,06]
Tempo de troca ( $b_{ij}$ )	[4; 30]
Custo de troca - Exemplares 1 e 3 ( $s_{ij}$ )	$0,5 \times b_{ij}$
Custo de troca - Exemplar 2 ( $s_{ij}$ )	$0,1 \times b_{ij}$
Demanda ( $d_j$ )	[746; 12.958]
Estoque inicial ( $estini_i$ )	[0; 0]
Quantidade de xarope por item $j$ ( $r_{ij}$ )	[0,237; 0,29]

Tabela 1: Parâmetros para a geração dos dados.

Os modelos P1S1M e P1S1MTS foram escritos na sintaxe da linguagem de modelagem AMPL [10] e os exemplares foram resolvidos pelo método *Branch-and-Cut*



incluído no pacote computacional CPLEX 10.0 [11]. A Tabela 2 apresenta os custos de atraso (Atraso), troca (Troca), custos totais (Z) e tempos de processamento em segundos (Tempos (s)) associados à solução ótima dos 24 exemplares dos modelos P1S1M (PM) e P1S1MTS (PMTS). Para estes exemplares, os níveis de estoque das soluções dos dois modelos foram muito baixos, e similares, por esta razão não foram apresentados na Tabela 2.

	Atraso		Troca		Z		Tempo(s)	
	PM	PMTS	PM	PMTS	PM	PMTS	PM	PMTS
A1	288.317,0	269.194,8	12,0	16,7	288.330,0	269.211,0	1,38	0,06
A2	289.276,0	278.719,6	9,5	9,5	289.287,0	278.729,0	0,38	0,02
A3	188.036,0	187.129,8	17,1	17,1	188.053,0	187.150,0	0,86	0,02
A4	424.328,0	420.423,1	19,3	19,3	424.348,0	420.443,0	0,86	0,02
A5	314.928,0	308.991,0	11,8	14,2	314.939,0	309.006,0	0,30	0,02
A6	400.915,0	385.337,0	22,2	13,7	400.946,0	385.351,0	0,09	0,03
A7	614.993,0	613.133,0	10,7	10,6	615.004,0	613.144,0	0,19	0,03
A8	331.752,0	323.443,1	15,4	21,1	331.768,0	323.464,0	0,42	0,00
B1	474.532,0	471.322,0	1,9	2,5	474.534,0	471.324,0	0,94	0,02
B2	292.563,0	287.905,0	5,9	6,2	292.569,0	287.911,0	0,95	0,09
B3	358.646,4	347.515,1	7,1	7,5	358.653,0	347.523,0	0,28	0,03
B4	728.090,0	719.607,0	4,8	4,8	728.095,0	719.612,0	0,22	0,02
B5	370.731,0	370.683,0	4,9	4,9	370.736,0	370.688,0	0,97	0,02
B6	408.370,0	408.007,0	6,1	6,1	408.376,0	408.012,0	0,67	0,06
B7	562.739,0	561.072,0	10,2	7,2	562.749,0	561.079,0	0,11	0,03
B8	173.417,0	173.417,0	7,8	7,8	173.433,0	173.432,0	1,94	0,03
C1	466.589,0	466.589,0	11,7	11,7	466.601,0	466.601,0	1,05	0,14
C2	372.316,0	372.316,0	9,7	9,7	372.326,0	372.326,0	1,52	0,11
C3	339.578,0	339.578,0	17,5	17,5	339.595,0	339.595,0	1,39	0,11
C4	385.579,0	385.579,0	22,2	22,2	385.602,0	385.602,0	1,02	0,06
C5	474.923,0	474.923,0	3,2	3,2	474.926,0	474.926,0	0,45	0,05
C6	426.467,0	426.467,0	9,9	9,9	426.476,0	426.476,0	0,91	0,05
C7	178.622,5	178.622,5	10,9	10,9	178.670,0	178.670,0	0,58	0,08
C8	80.583,5	80.583,5	15,9	15,8	80.641,4	80.641,4	0,58	0,05

Tabela 2: Tabela de Custos - Exemplares Aleatórios.

Para os exemplares A1-A8 da Classe 1 (original) e B1-B8 da Classe 2 (custo de troca reduzido), podemos observar que a solução ótima fornecida pelo modelo P1S1MTS foi melhor que a fornecida pelo modelo P1S1M. Isto aconteceu por causa das diferenças entre as restrições de preparo de xarope nos modelos. A produção de xarope no modelo P1S1M é limitada a um tanque por subperíodo e, no caso de produção do mesmo tipo de xarope em subperíodos consecutivos, sem aproveitamento do xarope que restou no subperíodo anterior. No modelo P1S1MTS o xarope de sabor  $l$  produzido no período  $t$  pode ser usado para a produção de itens diferentes no mesmo período. Assim, por causa do número limitado de preparos no tanque (subperíodos), a quantidade produzida pelo modelo P1S1M é menor e a quantidade de itens em atraso maior, gerando conseqüentemente um custo de atraso mais alto. Para os exemplares C1-C8 da Classe 3 (itens diferentes utilizam xaropes diferentes para a sua produção), podemos notar que todos os custos fornecidos pelos dois

modelos são iguais. Logo, nesta situação, os dois modelos apresentaram respostas similares para os 8 exemplares. Na resolução dos exemplares das três classes, o modelo P1S1MTS foi em torno de 90% mais rápido que o modelo P1S1M.

## 4. Testes com Exemplares Baseados em Dados Reais

Nesta seção apresentamos resultados do estudo computacional realizado utilizando exemplares gerados com base em dados reais obtidos de [6] e [8]. Os exemplares, nomeados S1 a S10, representam 10 cenários diferentes de produção. Os exemplares S1 e S6 são baseados em dados reais e possuem demanda e estoque inicial diferentes. A Tabela 3 resume as diferenças entre os exemplares. Mais detalhes podem ser encontrados em [8]. Os dados usados são referentes a uma máquina, que pode produzir 27 itens de diferentes tamanhos, e 10 sabores (xaropes) diferentes. A capacidade máxima do tanque é de 84.000 litros. Foi considerado um horizonte de planejamento de 5 semanas (períodos). O tempo disponível para a produção no primeiro período é de 2 dias (2.280 minutos) e nos demais 5 dias (6.840 minutos). O número de subperíodos foi de 8 para o primeiro período e de 24 para os demais, com um total de 104 subperíodos. Todos os exemplares do modelo P1S1M possuem 80.404 restrições, 82.796 variáveis, das quais 3.848 são binárias. Os exemplares do modelo P1S1MTS possuem 4.481 restrições, 4.541 variáveis, das quais 3.830 são binárias.

Exemplares	Modificações
S1(S6)	Dados reais.
S2(S7)	Capacidade da máquina de S1(S6) reduzida em 25%.
S3(S8)	Custos de estoque de S1(S6) foram dobrados.
S4(S9)	Custos de troca de S2(S7) reduzidos em 1/3.
S5(S10)	Custos de estoque de S4(S9) foram dobrados.

Tabela 3: Descrição dos exemplares reais (Ferreira *et al.* 2010).

Foi disponibilizada apenas a programação da produção da fábrica do exemplar S1. Por esse motivo, a comparação dos resultados dos modelos P1S1M e P1S1MTS com resultados da fábrica será feita apenas com os resultados do exemplar S1. O modelo P1S1MTS desconsidera o custo de troca de itens entre períodos, porém tanto o modelo P1S1M quanto a fábrica incluem estes custos no custo total. Para permitir uma comparação justa, o custo de troca entre períodos foi adicionado ao custo total associado à solução fornecida pelo modelo P1S1MTS.

O exemplar S1 foi resolvido pelo pacote de otimização CPLEX 10.0, com limite de tempo de 3 horas de processamento para os modelos P1S1M e P1S1MTS. Os testes realizados para o modelo P1S1M foram processados novamente por causa da utilização de um computador com processador e memória diferentes do utilizado em [8] resultando em uma pequena diferença entre os resultados deste trabalho e os de [8]. A Tabela 4 apresenta na primeira, segunda e terceira colunas, respectivamente, os custos totais de estoque, atraso e troca de itens obtidos pela programação da

fábrica e pelos dois modelos, na quarta coluna é apresentado o custo total, e na última coluna o percentual da solução em relação à solução da fábrica, sendo que um percentual positivo significa uma solução pior que a da fábrica.

	Estoque	Atraso	Troca item	Z	Percentual
Fábrica	6.262,9	0,0	183.106,6	189.369,4	
PM	2.209,0	37.428,0	306.744,0	346.381,0	45,3
PMTS	6.947,3	0,0	82.280,0	89.227,3	-52,9

Tabela 4: Custos de programação - Exemplar S1.

De acordo com a Tabela 4 podemos observar que o modelo P1S1M obteve uma solução 45,3% pior que a solução de 189.369,4 da fábrica. Note que os custos de troca na solução do modelo P1S1M foram bem mais altos que os custos apresentados pela fábrica. Já o modelo P1S1MTS obteve um bom desempenho, com uma solução 52,9% melhor que a solução da fábrica. Os custos de troca associados, ao contrário do que ocorre com a solução do modelo P1S1M, são bem menores que os apresentados pela fábrica. Analisando os resultados fornecidos pelos modelos P1S1M e P1S1MTS para o exemplar S1 (ver Tabela 4), podemos verificar que o modelo P1S1MTS fornece uma solução 74,2% melhor que a solução fornecida pelo modelo P1S1M. Isto acontece principalmente por causa dos custos de troca, que são 73,2% maiores no modelo P1S1M do que no modelo P1S1MTS (ver coluna 4 da Tabela 4).

As soluções obtidas pelos dois modelos para os exemplares S1 a S10 são - apresentadas na Tabela 5 juntamente com o valor do GAP, conforme informado pelo CPLEX, dado em porcentagem. Podemos observar na Tabela 5 que nenhuma das soluções obtidas pelos modelos P1S1M e P1S1MTS, considerando todos os 10 exemplares, foi ótima. No entanto, o modelo P1S1MTS forneceu uma solução de menor custo que a solução fornecida pelo modelo P1S1M. Além disso, o modelo P1S1MTS possui melhor desempenho computacional que o modelo P1S1M gerando soluções com um GAP bem menor em um mesmo tempo de processamento. Mais detalhes sobre o estudo computacional realizado podem ser obtidos em [5].

## 5. Conclusão

Analisando os exemplares gerados aleatoriamente, notamos que em situações onde pode haver aproveitamento da capacidade ociosa do tanque para a produção de itens diferentes do mesmo sabor no mesmo período (Exemplares das Classes 1 e 2), o modelo P1S1MTS fornece uma solução melhor que a solução fornecida pelo modelo P1S1M. Em situações em que não há possibilidade deste aproveitamento (Exemplares da Classe 3), os dois modelos apresentam soluções com o mesmo custo. Estes resultados indicam que o modelo proposto captura com mais flexibilidade a realidade da fábrica de bebidas de pequeno porte. Além disso, os exemplares do modelo P1S1MTS foram resolvidos em um tempo menor que os exemplares do modelo P1S1M. Podemos então concluir que o modelo proposto, P1S1MTS, é competitivo nas três situações analisadas. Com relação aos testes realizados com exemplares baseados em dados reais, o modelo P1S1MTS forneceu uma solução de

Exemplares	Modelos	Z	GAP(%)
S1	PM	346.381,0	99,5
	PMTS	89.227,3	30,2
S2	PM	266.634,0	99,2
	PMTS	88.092,5	27,4
S3	PM	374.659,1	98,9
	PMTS	96.985,3	26,4
S4	PM	109.988,2	98,1
	PMTS	35.288,4	27,5
S5	PM	123.263,2	96,6
	PMTS	41.378,9	29,1
S6	PM	345.157,6	99,7
	PMTS	87.750,2	24,0
S7	PM	346.671,7	99,6
	PMTS	96.341,6	20,7
S8	PM	9.565.521,7	99,9
	PMTS	37.315,5	19,7
S9	PM	1.737.835,2	99,9
	PMTS	43.253,5	21,7
S10	PM	275.445,9	99,5
	PMTS	37.315,5	18,2

Tabela 5: Custo total e GAP - exemplares reais.

menor custo que as soluções fornecidas pela fábrica e pelo modelo P1S1M. Além disso, os resultados mostraram também que o modelo P1S1MTS possui melhor desempenho computacional que o modelo P1S1M, fornecendo soluções de menor custo em um mesmo tempo de processamento.

O modelo P1S1M contabiliza o tempo de preparo entre períodos, enquanto que o modelo P1S1MTS não. Estes tempos são adicionados após a obtenção da solução. Um tópico interessante para pesquisa futura é a contabilização do custo de preparo entre períodos no modelo P1S1MTS. Outros tópicos para trabalhos futuros incluem a adaptação da heurística *relax and fix* proposta em [8] para a solução do modelo P1S1MTS e testar a modelagem do problema com outras classes de inequações para a eliminação de subrotas.

### Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio financeiro do CNPq, FAPESP e CAPES. Agradecemos os comentários e sugestões dos revisores anônimos.

### Referências

- [1] B. Almada-Lobo, D. Klabjan, J.F. Oliveira, M.A. Carravila, Single machine multiproduct capacitated lot sizing with sequence-dependent setups, *International Journal of Production Research*, **45**, 20 (2007), 4873–4894.

- [2] E. D. Bernardes, “Reformulação e Inequações Válidas para um Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Fevereiro, 2008.
- [3] A.R. Clark, A local search approach to lot sequencing and sizing, *Proceedings of the Third International Workshop of the IFIP WG 5.7 special interest group on “advanced techniques in production planning & control”*, Florença, Itália, Fevereiro, 2000.
- [4] C. Defalque, S. Rangel, D. Ferreira, “Estratégias para incorporação das decisões de sequenciamento em um problema integrado de produção de bebidas”. *Anais do XXXIII CNMAC*, (2010), São Carlos: SBMAC. v. único.
- [5] C. Defalque, “Estratégias para Incorporação das Decisões de Sequenciamento em um Problema Integrado de Produção de Bebidas”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Fevereiro, 2010.
- [6] D. Ferreira, “Abordagens para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes da Produção de Bebidas”. Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia de Produção, 2006.
- [7] D. Ferreira, R. Morabito, S. Rangel, Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem, *European Journal of Operational Research*, **196**, No. 2 (2009), 697–706.
- [8] D. Ferreira, R. Morabito, S. Rangel, Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants, *Computers and Operations Research*, **37**, No. 4 (2010), 684–691.
- [9] B. Fleischmann, H. Meyr, The general lotsizing and scheduling problem, *OR Spektrum*, **19** (1997), 11–21.
- [10] R. Fourer, M.D. Gay, B.W. Kernighan, “AMPL - A Modeling Language for Mathematical Programming”, 2nd Edition, Duxbury Press, Brooks, Cole Publishing Company, 540, 2002.
- [11] ILOG - AMPL/CPLEX A user’s guide, (2008), 1–102.
- [12] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.K.G. Kinnooy Kan, D.B. Shmmoys “The Traveling Salesman Problem - A Guided Tour of Combinatorial Optimization”, Chichester: Wiley, 1985.
- [13] M.S. Rangel, D. Ferreira, Um modelo de dimensionamento de lote para uma fábrica de refrigerantes, *TEMA - Tend. Mat. Apl. Comput.*, **4**, No. 2 (2003), 237–246.
- [14] D.H. Sherali, P.J. Driscoll, On Tightening the Relaxations of Miller-Tucker-Zemlin Formulations for Asymmetric Traveling Salesman Problem, *Operations Research*, **50** (2002), 656–669.

- [15] C.F.M. Toledo, P.M. França, R. Morabito, A. Kimms, Um Modelo de Otimização para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção em Fábrica de Refrigerantes, *Pesquisa Operacional*, **27** (2007), 155–186.
- [16] E.A.V. Toso, R. Morabito, A. Clark, Combinação de abordagens GLSP e ATSP para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção de suplementos para nutrição animal, *Pesquisa Operacional*, **28**, No. 3 (2008), 423–450.
- [17] W.W. Trigeiro, L.J. Thomas, J.O. McClain. Capacitated lotsizing with setup times, *Management Science*. **35**, No. 3 (1989).

## 6. Apêndice

O modelo P1S1M conforme apresentado em [8] é dado pelas expressões (6.1)-(6.10). Na descrição do modelo,  $N$  é número total de subperíodos, isto é, número de preparos no horizonte de planejamento;  $s \in \{1, \dots, N\}$ . A descrição dos demais índices, parâmetros e variáveis pode ser obtida na Seção 2.

### Modelo P1S1M

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J s_{ij}^{II} z_{ijs}^{II} \quad (6.1)$$

sujeito a: Estágio II (Envase)

$$I_{j(t-1)}^+ + I_{jt}^- + \sum_{s \in S_t} x_{js}^{II} - I_{jt}^+ - I_{j(t-1)}^- = d_{jt}, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (6.2)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} a_j^{II} x_{js}^{II} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{s \in S_t} b_{ij}^{II} z_{ijs}^{II} \leq K_t^{II}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (6.3)$$

$$a_j^{II} x_{js}^{II} \leq K_t^{II} y_{js}^{II}, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T, s \in S_t. \quad (6.4)$$

$$\sum_{j=1}^J y_{js}^{II} = 1, \quad s = 1, \dots, N. \quad (6.5)$$

$$z_{ijs}^{II} \geq y_{i(s-1)}^{II} + y_{js}^{II} - 1, \quad i, j = 1, \dots, J, s = 1, \dots, N. \quad (6.6)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J z_{ijs}^{II} \leq 1, \quad s = 1, \dots, N. \quad (6.7)$$

Estágio I (Xaroparia)

$$q_l y_{ls}^I \leq \sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{js}^{II} \leq K^I y_{ls}^I, \quad l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T, s \in S_t. \quad (6.8)$$

$$I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, \quad j = 1, \dots, J, t = 1, \dots, T. \quad (6.9)$$

$$x_{js}^{II}, z_{ijs}^{II} \geq 0, y_{js}^{II}, y_{ls}^I = 0/1; j = 1, \dots, J; t = 1, \dots, T; s \in S_t; l = 1, \dots, L. \quad (6.10)$$

A função objetivo (6.1) minimiza a soma total dos custos de estoque, atraso, e troca de itens. No estágio II as restrições (6.2) são restrições de balanceamento de estoque de cada item em cada período. Como a variável de produção é definida para cada subperíodo, para obter a produção total do item  $j$  no período  $t$  é necessário somar sua produção em todos os subperíodos do período  $t$ . As restrições (6.3) são restrições de capacidade máxima da máquina em cada período. As restrições (6.4) asseguram que o item  $j$  será produzido somente se a máquina foi preparada. As restrições (6.5) estabelecem que ocorre exatamente um preparo da máquina por subperíodo. As restrições (6.6) controlam as trocas de itens em cada subperíodo  $s$ . As restrições (6.7) garantem que existe no máximo uma troca de item em cada subperíodo  $s$ .

No estágio I,  $\sum_{j \in \gamma_l} r_{lj} x_{js}^{II}$  corresponde à demanda do xarope  $l$  em cada subperíodo

$s$ . As restrições (6.8) asseguram que se o tanque está preparado para a produção do xarope  $l$ , então haverá a produção e a quantidade produzida deve estar entre a quantidade mínima necessária para garantir a homogeneidade do xarope e a capacidade máxima do tanque. As restrições (6.9) e (6.10) definem o domínio das variáveis.